

О МАХОВСКОМ ОТРАЖЕНИИ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН
ОТ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

Б. И. Заславский, Р. А. Сафаров

(Москва)

На основании экспериментальных наблюдений и теоретического анализа структуры течения в окрестности тройной точки показано, что от условия равенства углов поворота потоков, прошедших через маховский и два других фронта, следует отказаться и заменить его некоторым дополнительным условием. Система уравнений совместности в указанной окрестности замкнута уравнением, полученным из предположения экстремальности угла поворота потока, прошедшего через падающий и отраженный фронты.

Расчеты перепадов давлений за ударными фронтами при этом согласуются с данными экспериментов.

1. Закономерности, характеризующие отражение слабых ударных волн от жесткой стенки в рамках акустического приближения, изучены достаточно полно [1]. При больших углах падения результаты этих работ могут быть экстраполированы на случай волн малой, но конечной амплитуды.

При малых углах линейное акустическое приближение является качественно неверным. Как показано в работах [2,3], теория малых возмущений приводит в этом и аналогичном случаях к нелинейным уравнениям коротких волн с нелинейными граничными условиями. В рамках теории коротких волн рассмотрены задачи регулярного отражения и почти скользящего падения, когда отраженная ударная волна вырождается в слабый разрыв [2,4]. В последнем случае движение может быть исследовано методом Лайтхилла [5].

В работах [2,3] рассматривалась и проблема маховского взаимодействия ударных волн с относительно малыми, но конечными перепадами давления при углах падения, близких к критическому. Величины перепадов давления на фронтах ударных волн в окрестности тройной точки в работах [2-9] не были определены. Данной проблеме посвящены экспериментальные работы [6-9] и статьи обзорного характера в [10,11].

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования на ударной трубе оптическими методами маховского отражения слабых ударных волн от жесткой стенки в широком диапазоне углов и относительных интенсивностей, а также некоторые теоретические зависимости, полученные из условий совместности на ударных фронтах.

Пусть плоская ударная волна падает на клин с углом полураствора α . Угол между нормалью к отраженному ударному фронту в точке пересечения ударных волн и поверхностью клина назовем углом отражения β , а α — углом падения. При углах α , больших некоторого критического угла α^* , имеет место регулярное отражение. Можно установить связь между α , β и интенсивностями падающей $\Delta P_1 = P_1 - P_0$ и отраженной $\Delta P_2 = P_2 - P_0$ ударных волн в точке их пересечения. Здесь P_0 — начальное давление, P_1 и P_2 — давление за падающим и отраженным ударными фронтами.

В [2] для этого случая получены простые приближенные формулы. Критическому углу соответствует отношение перепадов давлений в точке пересечения ударных фронтов $\Delta P_2 / \Delta P_1 \approx 3$. При $\alpha < \alpha^*$ возникает третья — маховская ударная волна, соединяющая точку пересечения падающей и отраженной ударных волн с жесткой стенкой. Совместим центр цилиндрической системы координат r, φ с угловой точкой клина O , угол φ будем отсчитывать от поверхности клина. Если течение автомодельно, точка A пересечения трех ударных волн должна перемещаться по некоторому лучу $\varphi = \chi$. Вдоль отраженной ударной волны по мере удаления от тройной точки перепад давления падает, и на достаточном удалении отраженная ударная волна вырождается в слабый разрыв.

Пусть $r_1 = r_1(\varphi, t)$, $r_2 = r_2(\varphi, t)$, $r_3 = r_3(\varphi, t)$ — уравнения падающей, отраженной и маховской ударных волн. Запишем уравнения этих фронтов и условия совместности на них

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & dr_1 / dt = N_1 [1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi)]^{1/2} \\
 & u_1 = q_1 \cos(\alpha + \varphi), \quad v_1 = -q_1 \sin(\alpha + \varphi) \\
 & dr_2 / dt = [N_2 + q_1 \cos(\alpha + \beta)] [1 + \operatorname{tg}^2(\beta - \varphi)]^{1/2} \\
 & u_2 = q_2 \cos(\beta - \varphi) + q_1 \cos(\alpha + \varphi) \\
 & v_2 = q_2 \sin(\beta - \varphi) - q_1 \sin(\alpha + \varphi) \\
 & dr_3 / dt = N_3 (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/2} \\
 & u_3 = q_3 \cos \psi, \quad v_3 = -q_3 \sin \psi \\
 & N_{1,3}^2 = c_0^2 [1 + 1/2(n+1)\varepsilon_{1,3}] \\
 & N_2^2 = c_0^2 [1 + 1/2(n-1)\varepsilon_1 + 1/2(n+1)\varepsilon_2] (1 + \Gamma_1)^{-1} \\
 & q_{1,3}^2 = c_0^2 \varepsilon_{1,3}^2 [1 + 1/2(n+1)\varepsilon_{1,3}]^{-1} \\
 & q_2^2 = c_0^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 [1 + 1/2(n-1)\varepsilon_1 + 1/2(n+1)\varepsilon_2]^{-1} (1 + \Gamma_1)^{-1} \\
 & \Gamma_{1,3} = \varepsilon_{1,3} [1 + 1/2(n-1)\varepsilon_{1,3}]^{-1} \\
 & \Gamma_2 = \varepsilon_2 (1 + n\varepsilon_1) [1 + n\varepsilon_1 + 1/2(n-1)\varepsilon_2 + 1/4(n^2 - 1)\varepsilon_1^2 + \\
 & \quad + 1/4(n-1)^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2]^{-1} \\
 & \varepsilon_i = (P_i - P_0) / nP_0, \quad \Gamma_i = (\rho_i - \rho_0) / \rho_0, \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Здесь ψ — угол между нормалью к маховскому ударному фронту и направлением радиус-вектора; $N_{1,3}$ — скорости распространения в направлении нормали падающего и маховского ударных фронтов; N_2 — скорость распространения отраженного ударного фронта относительно частиц, по которым он распространяется; q_1, q_2, q_3 — перепады скоростей частиц на соответствующих ударных фронтах; ρ_1, ρ_2, ρ_3 — плотности за соответствующими фронтами, ρ_0 — начальная плотность; u, v — проекции вектора скорости частиц на направление радиус-вектора и перпендикулярное ему; t — время; c_0 — скорость звука; n — показатель адиабаты.

В точке пересечения трех ударных волн

$$(1.2) \quad r_1 = r_2 = r_3, \quad P_2 = P_3$$

Последнее условие выполняется, если конфигурация ударных волн такова, что течение за фронтами дозвуковое. Если течение сверхзвуковое, то возможна центрированная волна разрежения.

Обычно [10] третьим условием в тройной точке в подвижной системе координат ставят условие равенства углов поворота потоков, прошед-

пих через два ударных фронта (Θ_2) и через один (маховский) ударный фронт (Θ_3). Поскольку

$$(1.3) \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{v_2 \cos(\alpha + \varphi)}{N_1 - u_2 \cos(\alpha + \varphi)}, \quad \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{v_3 \cos(\alpha + \varphi)}{N_1 - u_3 \cos(\alpha + \varphi)}$$

это условие можно записать в виде

$$(1.4) \quad v_2[N_1 - u_3 \cos(\alpha + \chi)] = v_3[N_1 - u_2 \cos(\alpha + \chi)]$$

Если Γ_1 или ε_1 значительно меньше единицы (слабые ударные волны), то (1.1) можно существенно упростить, разлагая эти уравнения в ряд по степеням Γ_1 , ε_1 или любого другого параметра Γ_0 , характеризующего относительный перепад плотности или давления на фронте падающей волны. Уравнения (1.1) в первом приближении примут вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\partial \delta_1 / \partial \varphi^\circ)^2 &= 2\delta_1 + 2\partial \delta_1 / \partial \tau - \gamma_1, & v_1 &= -\gamma_1 \partial \delta_1 / \partial \varphi^\circ \\ (\partial \delta_2 / \partial \varphi^\circ)^2 &= 2\delta_2 + 2\partial \delta_2 / \partial \tau - \gamma_2 - \gamma_1, & v_2 &= -(\gamma_2 - \\ & - \gamma_1) \partial \delta_2 / \partial \varphi^\circ + v_1 \\ (\partial \delta_3 / \partial \varphi^\circ)^2 &= 2\delta_3 + 2\partial \delta_3 / \partial \tau - \gamma_3, & v_3 &= -\gamma_3 \partial \delta_3 / \partial \varphi^\circ \\ \mu &= \gamma \end{aligned}$$

Здесь согласно [2] введены следующие безразмерные координаты и функции:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \varphi^\circ &= \varphi [^{1/2}(n+1)\Gamma_0]^{-1/2}, & \delta &= (r - c_0 t) [^{1/2}(n+1)\Gamma_0 c_0 t]^{-1} \\ v &= v / c_0 \Gamma_0 [^{1/2}(n+1)\Gamma_0]^{1/2}, & \mu &= u / c_0 \Gamma_0 \\ \gamma &= \Gamma / \Gamma_0, & \tau &= \ln t \end{aligned}$$

Уравнения (1.5) являются первым приближением при разложении в ряд по малому параметру уравнений (1.1) при условии $\varphi \sim \Gamma_0^{1/2}$.

Если течение явно не зависит от времени, то (1.5) принимают вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} d\delta_1 / d\varphi^\circ &= (2\delta_1 - \gamma_1)^{1/2}, & v_1 &= -\gamma_1 d\delta_1 / d\varphi^\circ \\ d\delta_2 / d\varphi^\circ &= \pm (2\delta_2 - \gamma_2 - \gamma_1)^{1/2}, & v_2 &= -(\gamma_2 - \gamma_1) d\delta_2 / d\varphi^\circ + \\ & + v_1 \\ d\delta_3 / d\varphi^\circ &= \pm (2\delta_3 - \gamma_3)^{1/2}, & v_3 &= -\gamma_3 d\delta_3 / d\varphi^\circ \end{aligned}$$

Из (1.2) и (1.4) получаем условия в точке A для первого приближения

$$(1.8) \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3, \quad \gamma_2 = \gamma_3, \quad v_2 = v_3$$

Поскольку в первом приближении в точке A

$$(1.9) \quad \begin{aligned} d\delta_1 / d\varphi^\circ &= b_1, & d\delta_2 / d\varphi^\circ &= b_2, & d\delta_3 / d\varphi^\circ &= \psi^\circ \\ b_1 &= (\alpha + \chi) [^{1/2}(n+1)\Gamma_0]^{-1/2}, & b_2 &= (\beta - \chi) [^{1/2}(n+1)\Gamma_0]^{-1/2} \\ \psi^\circ &= \psi [^{1/2}(n+1)\Gamma_0]^{-1/2} \end{aligned}$$

формулы (1.7) в этой точке преобразуются к виду

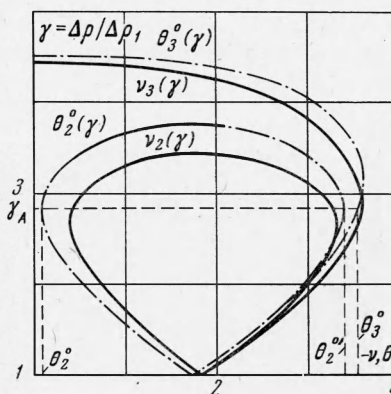
$$(1.10) \quad \begin{aligned} v_1 &= -\gamma_1 b_1, & v_2 &= \pm (\gamma_2 - \gamma_1) (b_1^2 - \gamma_2)^{1/2} - \gamma_1 b_1 \\ v_3 &= \pm \gamma_2 (b_1^2 - \gamma_2 + \gamma_1)^{1/2}, & b_2 &= \pm (b_1^2 - \gamma_2)^{1/2} \\ \psi^\circ &= \pm (b_1^2 - \gamma_2 + \gamma_1)^{1/2} \end{aligned}$$

На фиг. 1 представлены зависимости v_2 и v_3 от γ_2 согласно (1.10), а также $\theta_2^\circ = \theta_2 \Gamma_0^{-1} [1/2(n+1)\Gamma_0]^{-1/2}$ и $\theta_3^\circ = \theta_3 \Gamma_0^{-1} [1/2(n+1)\Gamma_0]^{-1/2}$ от γ_2 , полученные на основании расчетов по формулам (1.1) для случая $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.02$. Угол b_1 в обоих случаях взят равным 1.85

$$\theta_2^\circ(\gamma_2) \rightarrow v_2(\gamma_2), \quad \theta_3^\circ(\gamma_2) \rightarrow v_3(\gamma_2) \quad \text{при } \Gamma_1 \rightarrow 0$$

Из приведенных графиков видно, что уравнения (1.10) при $\Gamma_1 \rightarrow 0$ имеют один корень $\gamma_2 = 1$, поскольку кривые $v_2(\gamma_2)$ и $v_3(\gamma_2)$ пересекаются только в начальной точке. Соответствующие ударные поляры для маховской и отраженной волн также пересекаются лишь в точке $\gamma_2 = 1$. Расчеты показывают, что при $\Gamma_1 \ll 0.2$ при всех углах падения, соответствующих маховскому отражению, поляры пересекаются только в начальной точке. Это соответствует случаю вырождения отраженной ударной волны в слабый разрыв.

Теоретически возможен случай [12], когда в окрестности тройной точки A имеет место центрированная волна разрежения — течение типа Праудтля—Майера. Уравнения этого течения в обозначениях (1.6) имеют вид [3]



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \gamma &= -1/2 (\delta - \delta_A)^2 (\varphi^0 - \varphi_A^0)^{-2} + \gamma_A \\ v &= 1/3 (\delta - \delta_A)^3 (\varphi^0 - \varphi_A^0)^{-3} + v_A \end{aligned}$$

или

$$(1.11) \quad \gamma = -1/2 [3(v - v_A)]^{2/3} + \gamma_A$$

Углы наклона характеристик к направлению, перпендикулярному радиус-вектору точки A , определяются уравнением

$$(1.12) \quad d\delta / d\varphi^0 = -[2(\delta - \gamma)]^{1/2}$$

Из (1.10)—(1.12), легко получить следующие формулы для определения всех параметров потока в окрестности тройной точки

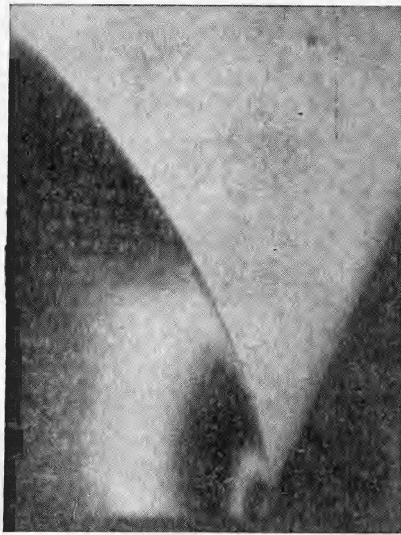
$$(1.13) \quad \begin{aligned} b_2 &= [1/2 (b_1^2 - \gamma_1)]^{1/2}, \quad \gamma_2 = 1/2 (b_1^2 + \gamma_1) \\ v_2 &= -(\gamma_2 - \gamma_1) [1/2 (b_1^2 - \gamma_1)]^{1/2} - \gamma_1 b_1 \\ \psi^0 &= (2\gamma_2 - \gamma_3)^{1/2}, \quad v_3 = \gamma_3 \psi^0 \\ \gamma_3 &= \gamma_2 - 1/2 [3(\gamma_3 - v_2)]^{2/3} \end{aligned}$$

В окрестности тройной точки A $\gamma_3 < \gamma_2$; максимальное значение $\gamma_A = 2.5$ достигается при $b_1 = 2$. Перепад плотности вдоль фронта отраженной волны по мере удаления от тройной точки вначале возрастает, достигая максимума на некотором удалении от нее, затем падает.

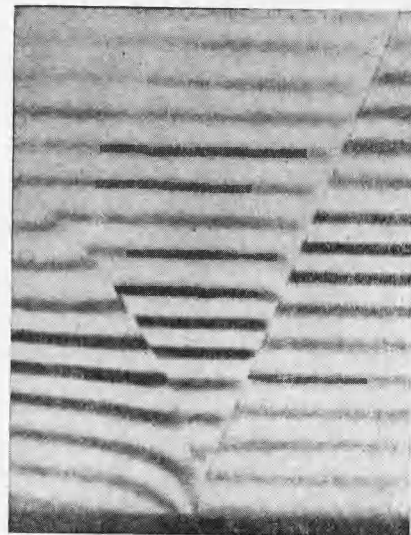
2. Проведено экспериментальное исследование отражения слабых ударных волн от клина при $0.009 \leq \Gamma_1 \leq 0.132$.

Эксперименты проводились на ударной трубе диафрагменного типа с прямоугольным каналом 90×45 мм². С целью получения ударных волн возможно меньшей интенсивности использовалась камера высокого дав-

ления с площадью сечения в 5 раз меньшей площади сечения канала. Между камерой высокого давления и каналом устанавливалась переходная секция в виде сопла с профилем, подобранным так, чтобы избежать образования дуга отраженных от стенок волн, возмущающих «пробку» за головной волной. Изменяя давление в канале от 0.2 до 11 кг/см² и перепад на диафрагме из целлофановой пленки от 1 до 3 кг/см², удавалось варьировать интенсивность волны в пределах $0.009 < \Gamma_1 < 0.34$. Ударная труба оснащена теневым прибором ИАБ-451, интерферометром ИТ-42 типа Маха — Цендера и сверхскоростными камерами СФР. Съемки теневым и шпирен-методами производились для получения более четкой картины конфигурации ударных волн. Для измерения распределения перепадов плотности на фронтах волн и в потоке за ними производились съемки интерферограмм методом начальной бесконечно широкой полосы и методом полос конечной ширины.



Фиг. 2



Фиг. 3

Интерферограммы первого типа (фиг. 2) позволяют детально проследить изменение картины отражения при вариации начальных условий, поскольку интерференционные полосы в этом случае соответствуют линиям равных плотностей.

Второй тип интерферограмм (фиг. 3) удобен для получения численных значений плотности в любой точке поля.

При расчете картины отражения в рамках теории коротких волн основной искомой функцией является γ (в работах [2,3] — μ ; в первом приближении $\mu = \gamma$).

Значения γ вдоль отраженного и маховского фронтов измеряются с помощью интерферограмм второго типа. Перепад плотности $\Delta\rho$ пропорционален смещению полос в соответствующей точке на интерферограмме Δm . Если за фронтом падающей ударной волны перепад плотности $\Delta\rho_1$ и смещение полос на интерферограмме — Δm_1 , то при $\Gamma_0 = \Gamma_1$

$$\Delta\rho / \Delta\rho_1 = \Delta m / \Delta m_1 = \gamma$$

Для получения более точных данных при одних и тех же параметрах волны и углах α производилось несколько пусков установки. Начальное положение интерференционных полос несколько менялось от опыта к опыту. Интерференционные картины регистрировались в белом и в монохроматическом свете. Это позволило при надежной идентификации полос повысить точность измерения величины сдвига полос на падающей волне до 0.05 полосы, на отраженной и маховской до 0.1—0.3 полосы. Погрешность в определении интенсивности падающей волны и величины γ не превышала 2 и 5% соответственно.

Интерферограммы и теневые снимки показали автомодельность рассматриваемого явления. Конфигурации волн в различные моменты времени подобны. Вдоль лучей, исходящих из угловой точки клина, перепады плотности на ударных фронтах в процессе их движения остаются неизменными, т. е. $\gamma = \gamma(\varphi)$ при заданных Γ_1 и α .

По результатам обработки серии интерферограмм при одинаковых Γ_1 и α строились усредненные кривые в γ , φ — плоскости. Величины γ у основания волны Маха (γ_B) и в тройной точке (γ_A) определялись как точки пересечения полученной кривой с прямыми $\varphi = 0$ и χ . Для примера на фиг. 4 представлены зависимости $\gamma(\varphi)$ для $\Gamma_1 = 0.132$. Кривая 1 получена при $\alpha = 32^\circ$ ($\chi = 0$), 2 — при $\alpha = 26.3^\circ$ ($\chi = 1.2^\circ$), 3 — при $\alpha = 20.5^\circ$ ($\chi = 3.4^\circ$). На каждой кривой указано положение тройной точки А. Максимальный перепад плотности достигается на ударном фронте на поверхности клина. По мере увеличения угла φ вдоль маховского и отраженного фронтов перепад плотности и соответствующая ему величина γ монотонно падают. В тройной точке

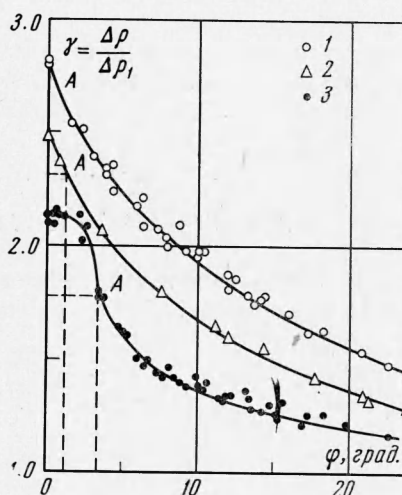
$$\bar{\gamma}_A = \gamma_A(\alpha, \Gamma_1) \quad \text{или} \quad \gamma_A = \gamma_A(\alpha + \chi, \Gamma_1)$$

При $\Gamma_1 \ll 1$ движение может быть рассмотрено в рамках теории коротких волн. В этом случае

$$(2.1) \quad \gamma_A = \gamma_A(b_1)$$

На фиг. 5 светлыми точками нанесены значения $\gamma_A(b_1)$, соответствующие $0.0085 \leq \Gamma_1 \leq 0.022$. Приведенные данные показывают, что плотность испытывает скачок на фронте отраженной волны даже при очень малых значениях Γ_1 и малых углах клина ($\alpha < 1/2\alpha^*$).

3. Установленные факты не могут быть объяснены в рамках трехударной теории. Трудности, возникающие при попытке объяснить наблюдаемые явления, обсуждались в работах [6, 13]. Предположим, что перепады давлений на ударных фронтах в окрестности тройной точки А и связанные с ними углы $\alpha + \chi$, $\beta - \chi$, ψ принимают значения, при которых поток, прошедший через падающий и отраженный ударные фронты, отклоняется на минимальный возможный угол. Значения v_2 при этом также минимальны. На ударных полярах фиг. 1 этому режиму движения соответствуют углы поворота потока Θ_2^0 и Θ_3^0 .



Фиг. 4

Можно получить при таком предположении в первом приближении зависимость b_1 и b_2 от γ_A

$$(3.1) \quad b_1 = [1/2(3\gamma_A - 1)]^{1/2}, \quad b_2 = [1/2(\gamma_A - 1)]^{1/2}$$

На фиг. 5 представлена рассчитанная по (3.1) кривая $\gamma_A = \gamma_A(b_1)$. Экспериментальные данные (светлые точки) лежат левее этой кривой. С увеличением Γ_1 точки, полученные при обработке экспериментальных данных, смещаются еще левее. Если аргументом в (2.1) вместо

$$b_1 = (\alpha + \chi)^{1/2}(n + 1)\Gamma_1^{-1/2} = (\alpha + \chi)^{1/2}\alpha^*{}^{-1}$$

взять

$$b_{1e} = (\alpha + \chi)^{1/2}\alpha_e^*{}^{-1}$$

то экспериментальные данные, полученные при $0.0085 \leq \Gamma_1 \leq 0.132$ (темные точки на фиг. 5) ложатся на общую кривую.

Формулы (3.1) преобразуются к виду

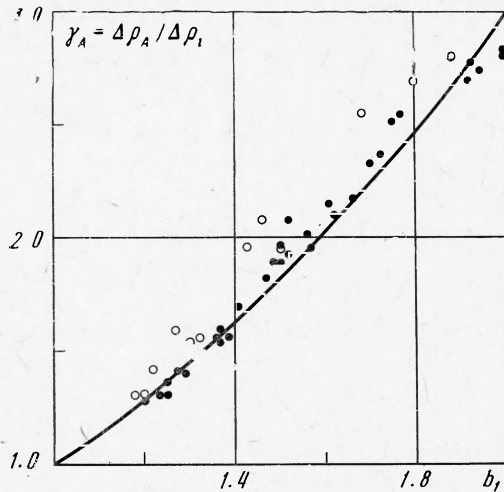
$$(3.2) \quad \alpha + \chi = 1/2\alpha_e^*[1/2(3\gamma_A - 1)]^{1/2}$$

$$\beta - \chi = 1/2\alpha_e^*[1/2(\gamma_A - 1)]^{1/2}$$

Здесь α^* — значения критического угла, рассчитанные по асимптотической формуле, α_e^* — наблюдаемые значения, $\alpha^* \rightarrow \alpha_e^*$, $b_1 \rightarrow b_{1e}$ при $\Gamma_1 \rightarrow 0$. Различие между α^* и α_e^* существенно при $\Gamma_1 > 0.05$.

Таким образом, эксперименты согласуются с (3.2) и качественно расходятся с теорией, изложенной в п. 1.

По-видимому, в тройной точке соотношение (1.4) не выполняется, т. е. в окрестности этой точки в подвижной системе координат векторы скоростей частиц, прошедших через один и два ударных фронта, составляют конечный угол $\Theta_3 - \Theta_2$. Должна существовать зона, ограниченная двумя тангенциальными разрывами, где скорость значительно понижается, а давление совпадает с давлением в соседних областях. Эта



Фиг. 5

область должна быть зоной интенсивного вихревого течения.

Опыт показывает (фиг. 2), что в окрестности тройной точки существует область, где плотность за фронтом возрастает вниз по потоку, а не падает, как это имеет место в соседних областях. Наличие области «обратных» градиентов плотности также является подтверждением выдвинутого предположения, поскольку поступление массы в угловую зону ($\theta_3 - \theta_2$) возможно только при таком направлении градиента плотности и давления.

Формулы (3.1) выведены из предположения экстремальности угла поворота потока, прошедшего через два фронта. Таких углов два — минимальный θ_2° и максимальный $\theta_2^{\circ'}$. В обоих случаях перепады плотности на фронтах в окрестности тройной точки одинаковы. Углы отражения β при минимальных углах θ_2° ближе к наблюдаемым.

Авторы благодарят С. А. Христиановича за внимание к работе и советы.

Поступила 14 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. М., Изд-во МГУ, 1962.
2. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
4. Шиндяпин Г. П. О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, 1964, № 2.
5. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc. (London), 1949, vol. 198, No. 1055.
6. Kawamura R., Saito H. Reflection of shock waves. I. Pseudostationary case. J. Phys. Soc. Japan, 1956, vol. 11, No. 5.
7. Fletcher C. H., Taub A. H., Bleakney W. The mach reflection of shock waves at nearly glancing incidence. Rev. Mod. Phys., 1951, vol. 23, No. 3.
8. Smith L. G. Photographic investigation of the reflection of plane shocks in air. Off. Sci. Res. and Develop. 1945, No. 6274.
9. Bleakney W., Taub A. H. Interaction of shock waves. Rev. Mod. Phys., 1949, vol. 21, No. 4.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
11. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г., Лобастов Ю. С., Набоко И. М., Немков Р. Г., Предводителева О. А. Ударные волны в реальных газах. М., «Наука», 1968.
12. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
13. Sternberg J. Triple-shock-wave intersections. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 2.