

УДК 539

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН ПОЛЯ ДЕФЕКТОВ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Н. В. Чертова, Ю. В. Гриняев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634055 Томск

На основе динамических уравнений континуальной теории дефектов исследована структура волн поля дефектов, характеризуемого тензором плотности и тензором плотности потока дефектов, в вязкопластической среде. Получены соотношения, определяющие закономерности прохождения волн поля дефектов через границу раздела двух сред. Рассмотрены частные случаи сред с сильно- и слабозатухающими волнами.

Ключевые слова: континуальная теория дефектов, поперечные волны, затухание, отражение, преломление.

**Введение.** Волновые процессы — одна из важнейших форм движения материи. Распространение волн является наиболее быстрым способом переноса энергии, позволяющим осуществить в системе переход от неравновесного состояния к равновесному [1]. Механизмы распространения возмущений в различных материальных объектах существенно различны. Распространение рассматриваемых волн поля дефектов происходит вследствие того, что переменная плотность дислокаций, появляющаяся в какой-либо точке деформируемого тела, возбуждает в соседних точках поток дефектов, и наоборот.

Продолжая исследования [2], где на основе полевой теории дефектов рассмотрены закономерности распространения плоских волн дефектов в вязкопластической среде, учтем влияние поверхности раздела двух сред. Результаты, полученные в работах [3–5], свидетельствуют об особой роли границ раздела в процессах деформирования, поэтому изучение поведения материалов под нагрузкой при наличии поверхности раздела представляет собой важную задачу механики деформируемого тела. В последнее время решению этой задачи уделяют внимание многие исследователи (см., например, [6, 7]).

В настоящей работе приведена система уравнений полевой теории дефектов в случае вязкопластического тела. Выполнен анализ структуры волн поля дефектов, характеризуемого тензором плотности и тензором плотности потока дефектов, который имеет большое значение в силу ряда причин. Во-первых, исследование структуры волн поля дефектов является обязательным этапом изучения закономерностей распространения плоских волн дефектов на границе раздела двух сред. Во-вторых, проводимый анализ позволяет дополнить экспериментальные измерения скорости пластической дисторсии [8] соответствующими компонентами тензора плотности дислокаций, характеризующего дефектную структуру материала. То есть эти результаты позволяют по скорости пластической деформации, измеряемой в эксперименте, оценить плотность дислокаций, связанную с моментными напряжениями [9].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01188).

В работе исследуются закономерности распространения плоских волн дефектов при наличии границы раздела двух сред. Полученные соотношения (закон преломления, коэффициенты отражения и преломления) используются для анализа волн, распространяющихся в средах с сильным и слабым затуханием; рассмотрен также общий случай распространения волн в средах с произвольным затуханием.

**1. Формулировка задачи.** Исходная система динамических уравнений полевой теории дефектов [1, 10] имеет вид

$$\begin{aligned} B(\nabla \cdot I) &= -\mathbf{P}, & \nabla \cdot \alpha &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \nabla \times I, & S(\nabla \times \alpha) &= -B \frac{\partial I}{\partial t} - \sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $I$  — тензоры плотности и плотности потока дислокаций;  $\mathbf{P}$ ,  $\sigma$  — эффективные напряжения и импульс;  $B$ ,  $S$  — константы теории; знаки “.”, “ $\times$ ” обозначают скалярное и векторное произведение. Из уравнений (1) следует, что эффективные напряжения и импульс удовлетворяют условию совместности

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma, \quad (2)$$

которое является уравнением динамического равновесия в механике сплошных сред. Согласно определению вязкопластического тела [11], предполагающему зависимость напряжений от скорости пластической деформации, будем считать

$$\sigma = \eta I. \quad (3)$$

Здесь  $\eta$  — тензор коэффициентов вязкости;  $I$  — тензор плотности потока дефектов, определяемый скоростью пластической дисторсии  $\beta$  [12]:

$$I = -\frac{\partial \beta}{\partial t}.$$

При этом  $\alpha = -\nabla \times \beta$ . Как отмечалось ранее [2], соотношение (3) может быть записано формально на основе аналогии уравнений (1) и системы уравнений электродинамики Максвелла [13]. В общем случае [14] эффективные напряжения имеют вид

$$\sigma = \sigma^{ext} + \sigma^{int} + \sigma^{vis}.$$

Использование в модели выражения (3) означает, что  $\sigma^{ext} \ll \sigma^{vis}$  и  $\sigma^{int} \ll \sigma^{vis}$  ( $\sigma^{ext}$  — напряжения, обусловленные внешне приложенной нагрузкой;  $\sigma^{int}$  — внутренние напряжения, определяемые дефектами материала;  $\sigma^{vis}$  — вязкие напряжения).

Рассматривая совместно (1)–(3), можно показать, что в вязкопластической среде эффективный импульс убывает со временем по закону

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \exp(-t/\tau), \quad (4)$$

где  $\tau = B/\eta$  — время релаксации;  $\mathbf{P}_0$  — начальное значение импульса. Чем меньше время релаксации, определяемое величинами  $B$ ,  $\eta$ , характеризующими инерционные свойства ансамбля дефектов и вязкость среды, тем быстрее убывает импульс. Согласно (4) поле дефектов в вязкопластической среде не может являться причиной возникновения импульса, поскольку если  $\mathbf{P}(0) = 0$ , то и в дальнейшем  $\mathbf{P}(t) = 0$ . С учетом равенств (3), (4) исходная система уравнений (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot I &= 0, & \nabla \cdot \alpha &= 0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \nabla \times I, & S(\nabla \times \alpha) &= -B \frac{\partial I}{\partial t} - \eta I. \end{aligned} \quad (5)$$

Для полноты рассматриваемой системы (5), позволяющей однозначно определить характеристики поля дефектов по заданным начальным значениям, необходимо записать граничные условия, которым  $\alpha$ ,  $I$  должны удовлетворять на поверхности раздела. Эти граничные условия можно получить известным способом [15], используя интегральную форму записи уравнений (5). Будем считать, что нормальные  $\alpha_{nk}$ ,  $I_{nk}$  и касательные  $\alpha_{tk}$ ,  $I_{tk}$  компоненты характеристик поля дефектов на границе раздела удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} I_{nk}^1 - I_{nk}^2 &= 0, & \alpha_{nk}^1 - \alpha_{nk}^2 &= 0, \\ I_{tk}^1 - I_{tk}^2 &= 0, & S_1 \alpha_{tk}^1 - S_2 \alpha_{tk}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

**2. Структура волн поля дефектов.** Рассмотрим поле дефектов, в котором величины  $\alpha$ ,  $I$  зависят от одной пространственной координаты  $\xi = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}$  и времени  $t$ . В этом случае каждая из девяти компонент  $\alpha_{ik}$  будет удовлетворять одному скалярному уравнению

$$\frac{B}{S} \frac{\partial^2 \alpha_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \alpha_{ij}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{S} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Аналогичное уравнение записывается для компонент  $I_{ik}$ . Как показано в работе [2], уравнения (7) описывают процесс распространения двух плоских гармонических волн

$$\alpha^{1,2} = \alpha \exp(i\omega(t \pm \xi/V)), \quad I^{1,2} = I \exp(i\omega(t \pm \xi/V)) \quad (8)$$

со скоростью

$$V = \sqrt{(S/B)/(1 + i\eta/(B\omega))}.$$

Для того чтобы определить структуру волн поля дефектов, рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении  $\mathbf{m}$ . В этом случае уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{m}I) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{m}\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{m}I] &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, & S \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{m}\alpha] &= -B \frac{\partial I}{\partial t} - \eta I. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первых двух уравнений следует, что  $\partial_\xi I_{\xi i} = 0$ ,  $\partial_\xi \alpha_{\xi i} = 0$ , т. е. если проекции тензоров  $\alpha$ ,  $I$  на направление распространения волны не равны нулю, то они могут зависеть только от времени. Умножая последние два равенства скалярно на вектор  $\mathbf{m}$ , получим

$$\frac{\partial \alpha_{\xi i}}{\partial t} = 0, \quad B \frac{\partial I_{\xi i}}{\partial t} + \eta I_{\xi i} = 0. \quad (10)$$

Первое из этих равенств означает, что проекция волны плотности дефектов на направление  $\xi$  не зависит также от времени, т. е.  $\alpha_{\xi i} \equiv 0$ . Иными словами, волна плотности дефектов является поперечной, а все неравные нулю компоненты лежат в плоскости волны. Из второго равенства в (10) следует, что продольные компоненты тензора плотности потока дефектов уменьшаются со временем:

$$I_{\xi i} = I_{\xi i}(0) \exp(-t/\tau),$$

поэтому в вязкопластической среде волна тензора  $I$  также поперечная.

Определим связь между характеристиками поля дефектов в плоской гармонической волне. Подставляя (8) в третье уравнение (9), получим

$$\alpha = [\mathbf{m}I]/V. \quad (11)$$

Величина

$$1/V = \sqrt{B/(S(1 + i\eta)/(B\omega))} = \sqrt{1 + i \operatorname{tg} \delta / C} = (n + i\chi)/C, \quad (12)$$

определяющая количественную связь  $\alpha$  и  $I$ , имеет значение импеданса среды. Здесь  $\operatorname{tg} \delta = \eta/(B\omega)$  — тангенс угла потерь;  $n, \chi$  — показатели преломления и поглощения;  $C = \sqrt{S/B}$ .

Используя (11), можно получить отношение модулей характеристик поля дефектов и сдвиг фаз  $\varphi$ :

$$|I|/|\alpha| = |V| = C/\sqrt{n^2 + \chi^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \chi/n = \operatorname{tg}(\delta/2), \quad \varphi = \delta/2.$$

Здесь  $n = \sqrt{(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} + 1)/2}$ ;  $\chi = \sqrt{(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} - 1)/2}$  [2].

Рассмотрим предельные случаи, когда в среде распространяются слабо- и сильнозатухающие волны. Для слабозатухающих волн  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ , поэтому  $n = 1$ ,  $\chi = (\operatorname{tg} \delta)/2$  и

$$|I|/|\alpha| = |V| = C/\sqrt{1 + (\operatorname{tg}^2 \delta)/4} \approx C, \quad \operatorname{tg} \varphi = (\operatorname{tg} \delta)/2.$$

Для сильнозатухающих волн  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ ,  $n \approx \chi = \sqrt{(\operatorname{tg} \delta)/2}$  и

$$|I|/|\alpha| = |V| \approx C/\sqrt{\operatorname{tg} \delta}, \quad \operatorname{tg} \varphi \approx 1.$$

Однако в случае  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$  волновой процесс практически не реализуется, поскольку волна дефектов затухает на очень малых расстояниях от границы. Амплитуда уменьшается в  $e$  раз на расстоянии

$$d = C/(\chi\omega) = \lambda/(2\pi\chi), \quad (13)$$

которое при  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ ,  $n \approx \chi \gg 1$  намного меньше длины волны  $\lambda$ .

**3. Закономерности прохождения плоской волны дефектов через границу раздела двух сред.** 3.1. *Законы отражения и преломления.* Предположим, что граница раздела двух однородных сред совпадает с плоскостью  $z = 0$  в декартовой системе координат. Среды, расположенные выше ( $z > 0$ ) и ниже ( $z < 0$ ) границы, характеризуются параметрами  $B_1, S_1, \eta_1$  и  $B_2, S_2, \eta_2$  соответственно. На границу раздела из среды 1 падает плоская волна под углом  $\theta_0$  к оси  $z$  с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{K}_0 = k_1 \mathbf{m}_0$ , где  $k_1 = \omega/V_1$ ;  $\mathbf{m}_0$  — единичный вектор нормали к фронту падающей волны (рис. 1). Плоскость падения, содержащую вектор  $\mathbf{K}_0$  и ось  $z$ , совместим с плоскостью  $xz$ . Волновой вектор отраженной волны обозначим через  $\mathbf{K}_1 = k_1 \mathbf{m}_1$ , преломленной — через  $\mathbf{K}_2 = k_2 \mathbf{m}_2$ ;  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор нормали к границе, направленный из среды 2 в среду 1.

Согласно (8), (11) поле дефектов можно записать следующим образом: для падающей волны

$$I = I_0 \exp(-i\omega t + ik_1 \mathbf{m}_0 \mathbf{r}), \quad \alpha = [\mathbf{m}_0 I_0] Z_1 \exp(-i\omega t + ik_1 \mathbf{m}_0 \mathbf{r}); \quad (14)$$

для отраженной волны

$$I_R = I_1 \exp(-i\omega t + ik_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{r}), \quad \alpha_R = [\mathbf{m}_1 I_1] Z_1 \exp(-i\omega t + ik_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{r});$$

для преломленной волны

$$I_T = I_2 \exp(-i\omega t + ik_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r}), \quad \alpha_T = [\mathbf{m}_2 I_2] Z_2 \exp(-i\omega t + ik_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r}). \quad (15)$$

Здесь  $Z_1 = 1/V_1$ ,  $Z_2 = 1/V_2$  — импедансы сред 1 и 2 соответственно.

При  $z = 0$  должны выполняться граничные условия (6) для касательных компонент суммарного волнового поля  $\alpha$  и  $I$ :

$$\begin{aligned} [z_0 I_0] e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} + [z_0 I_1] e^{i\mathbf{K}_1 \mathbf{r}} &= [z_0 I_2] e^{i\mathbf{K}_2 \mathbf{r}}, \\ [z_0 [m_0 I_0]] e^{i\mathbf{K}_0 \mathbf{r}} + [z_0 [m_1 I_1]] e^{i\mathbf{K}_1 \mathbf{r}} &= (S_2 Z_2 / S_1 Z_1) [z_0 [m_2 I_2]] e^{i\mathbf{K}_2 \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (16)$$

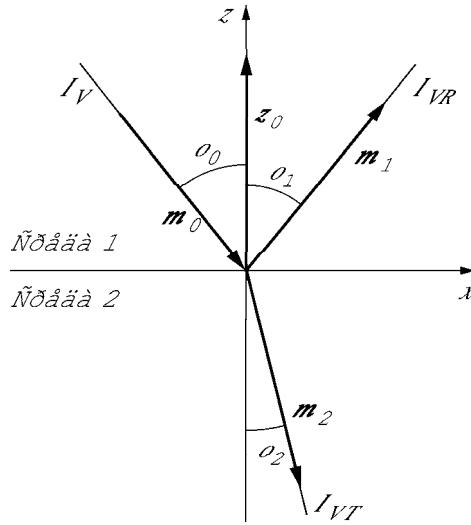


Рис. 1. Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух сред

Из соотношений (16), справедливых во всех точках плоскости  $z = 0$ , следует одинаковая зависимость полей трех волн от координат  $x, y$  при  $z = 0$ , т. е. фазовые множители должны удовлетворять условиям

$$k_1 \mathbf{m}_0 \mathbf{r} \Big|_{z=0} = k_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{r} \Big|_{z=0} = k_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r} \Big|_{z=0}$$

или

$$k_1 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2, \tag{17}$$

где  $\theta_1$  — угол отражения;  $\theta_2$  — угол преломления (рис. 1). Из (17) следует, что угол отражения равен углу падения (закон отражения):

$$\theta_0 = \theta_1,$$

а синусы углов преломления и падения связаны соотношением

$$\sin \theta_2 / \sin \theta_0 = k_1 / k_2, \tag{18}$$

что является аналогом закона преломления или закона Снеллиуса в электродинамике [1].

3.2. Коэффициенты отражения и преломления. Для того чтобы определить амплитуды отраженной и преломленной волн, обратимся к системе уравнений (16). Рассмотрим волны двух различных линейных поляризаций: горизонтально поляризованную волну с тензором  $I$ , ненулевые компоненты которого перпендикулярны плоскости падения ( $I_{xi} = I_{zi} = 0, I_{yi} \neq 0$ ), и вертикально поляризованную волну с тензором  $I$ , компоненты которого принадлежат плоскости падения ( $I_{yi} = 0, I_{xi} \neq 0, I_{zi} \neq 0$ ). В первом случае (для волн горизонтальной поляризации) из уравнений (16) для неизвестных амплитуд  $I_1, I_2$  получим

$$I_0 + I_1 = I_2, \quad S_1 Z_1 (I_0 - I_1) \cos \theta_0 = S_2 Z_2 I_2 \cos \theta_2. \tag{19}$$

Решая (19), найдем коэффициенты, связывающие амплитуды отраженной и преломленной волн с амплитудой падающей волны:

$$R_g = \frac{S_1 Z_1 \cos \theta_0 - S_2 Z_2 \cos \theta_2}{S_1 Z_1 \cos \theta_0 + S_2 Z_2 \cos \theta_2}, \quad T_g = \frac{2 S_1 Z_1 \cos \theta_0}{S_1 Z_1 \cos \theta_0 + S_2 Z_2 \cos \theta_2}. \tag{20}$$

Здесь  $R_g = I_1/I_0$ ;  $T_g = I_2/I_0$ . Для вертикально поляризованной волны система уравнений (16) принимает вид

$$(I_0 - I_1) \cos \theta_0 = I_2 \cos \theta_2, \quad S_1 Z_1 (I_0 + I_1) = S_2 Z_2 I_2.$$

Коэффициенты, связывающие амплитуды трех волн, известные в электродинамике как коэффициенты Френеля, записываются в виде

$$R_v = \frac{S_2 Z_2 \cos \theta_0 - S_1 Z_1 \cos \theta_2}{S_2 Z_2 \cos \theta_0 + S_1 Z_1 \cos \theta_2}, \quad T_v = \frac{2 S_1 Z_1 \cos \theta_0}{S_2 Z_2 \cos \theta_0 + S_1 Z_1 \cos \theta_2}. \quad (21)$$

С учетом (18) выражения (20), (21) можно переписать следующим образом:

$$R_g = \frac{(S_1 V_2 / S_2 V_1) \cos \theta_0 - \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}}{(S_1 V_2 / S_2 V_1) \cos \theta_0 + \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}}, \quad (22)$$

$$T_g = \frac{(2 S_1 V_2 / S_2 V_1) \cos \theta_0}{(S_1 V_2 / S_2 V_1) \cos \theta_0 + \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}};$$

$$R_v = \frac{(S_2 V_1 / S_1 V_2) \cos \theta_0 - \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}}{(S_2 V_1 / S_1 V_2) \cos \theta_0 + \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}}, \quad (23)$$

$$T_v = \frac{2 \cos \theta_0}{(S_2 V_1 / S_1 V_2) \cos \theta_0 + \sqrt{1 - (V_2 / V_1)^2 \sin^2 \theta_0}}.$$

При нормальном падении ( $\theta_0 = 0$ )

$$R_g = \frac{S_1 Z_1 - S_2 Z_2}{S_1 Z_1 + S_2 Z_2} = -R_v.$$

**4. Анализ частных случаев.** 4.1. *Слабозатухающие волны.* Проанализируем общие выражения (20), (21) в частных случаях предельных сред, в которых распространяются сильно- и слабозатухающие волны. Предварительно сделаем следующее замечание. Граница раздела двух сред в действительности представляет собой не геометрическую поверхность, а тонкий переходный слой. Справедливость формул (17) не связана с какими-либо предположениями о характере этого слоя. Вывод формул (22), (23), основанный на использовании условий на границе раздела, предполагает малость толщины переходного слоя  $\delta$  по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Обычно при макроскопическом описании  $\lambda \gg \delta$ .

Рассмотрим среды, в которых волны слабо затухают ( $\text{tg } \delta_1 \ll 1$ ,  $\text{tg } \delta_2 \ll 1$ ) и поэтому отношение

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{1 + i \text{tg } \delta_1}{1 + i \text{tg } \delta_2}} \simeq \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{S_2 B_1}{S_1 B_2}} \quad (24)$$

является действительным. Коэффициенты отражения и преломления (22), (23) при  $V_2 / V_1 < 1$  также действительные, т. е. сдвиг фаз между падающей и отраженной волнами равен 0 либо  $\pi$ .

На рис. 2 приведены зависимости  $R_g(\theta)$  и  $R_v(\theta)$  для различных соотношений параметров модели. Зависимость  $R_g(\theta)$  не имеет особенностей и обращается в нуль только при  $V_2 / V_1 = 1$  и  $S_1 / S_2 = 1$ , когда свойства обеих сред идентичны, т. е. отражение исчезает с исчезновением границы раздела. Коэффициент отражения  $R_v(\theta)$ , определяемый в виде

$$R_v = \frac{S_2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - S_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2}{S_2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + S_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2} = \frac{\text{tg}(\theta_0 - \varphi)}{\text{tg}(\theta_0 + \varphi)},$$

имеет две особенности: при  $V_2 / V_1 = 1$ ,  $S_1 / S_2 = 1$  и при

$$\theta_0 + \varphi = \pi/2. \quad (25)$$

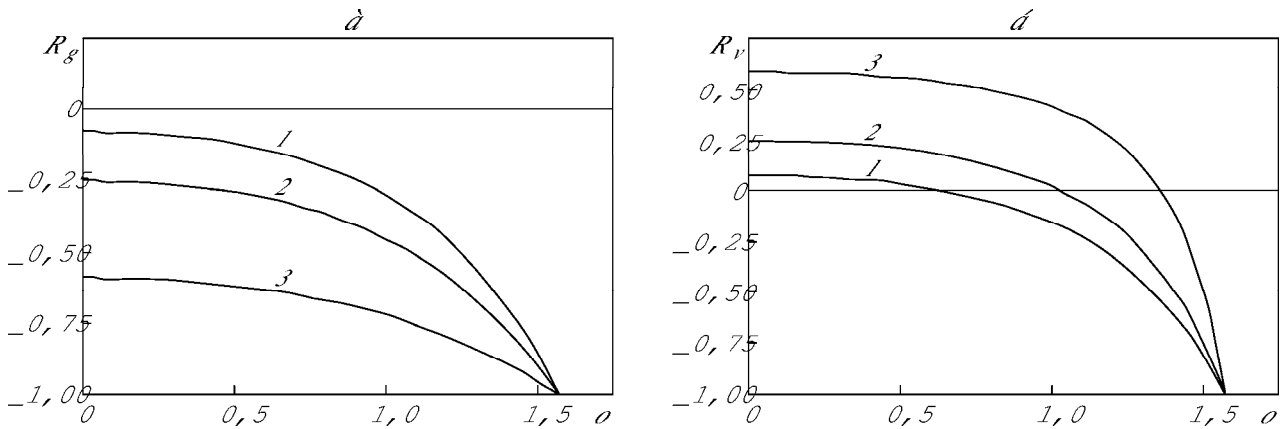


Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения компонент тензора плотности потока дефектов, перпендикулярных (а) и параллельных (б) плоскости падения, от угла падения при  $V_2/V_1 = 0,6$ :  
 1 —  $S_1/S_2 = 1,43$ ; 2 —  $S_1/S_2 = 1$ ; 3 —  $S_1/S_2 = 0,43$

Здесь  $\varphi = (1/2) \arcsin ((S_1/S_2) \sin 2\theta_2)$ . Рассматривая совместно (18) и (25), можно определить угол падения, при котором вторая особенность имеет место:

$$\theta_0^* = \arcsin \sqrt{\frac{(V_2/V_1)^2 - (S_2/S_1)^2}{(V_2/V_1)^4 - (S_2/S_1)^2}}$$

Угол  $\theta_0^*$  является углом полной поляризации (угол Брюстера в электродинамике), поскольку произвольно ориентированная волна, падающая под этим углом, отражается горизонтально поляризованной ( $R_v(\theta) = 0$ ). При изменении угла падения от 0 до  $\theta_0^*$  модуль  $R_v(\theta)$  убывает от величины, определяемой согласно (23), до нуля; при  $\theta_0^* < \theta < \pi/2$   $|R_v(\theta)|$  возрастает от 0 до 1. Фаза  $R_v(\theta)$ , равная нулю при  $0 < \theta < \theta_0^*$ , изменяется скачкообразно при  $\theta = \theta_0^*$  и становится равной  $\pi$  при  $\theta_0^* < \theta < \pi/2$ .

Если отражение происходит на границе сред, удовлетворяющих условию  $V_2/V_1 > 1$ , при котором  $\theta_0 < \theta_2$ , то при  $\sin \theta_0 > V_1/V_2 \cos \theta_2 = \sqrt{1 - (V_2/V_1)^2 \sin^2 \theta_0}$  является мнимой величиной. Этот случай соответствует полному внутреннему отражению от границы раздела двух вязких сред. Угол  $\theta_0$ , удовлетворяющий условию

$$\sin \theta_0 = V_1/V_2, \tag{26}$$

называется углом полного внутреннего отражения. При этом  $\sin \theta_2 = 1$  и преломленная волна распространяется параллельно границе раздела двух сред. Определим структуру преломленной волны для углов падения, больших или равных предельному (26). В этом случае

$$\cos \theta_2 = \pm i \sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2 \theta_0 - 1} \tag{27}$$

и преломленная волна согласно (15) имеет вид

$$I_T = I_2 \exp \left( -i(\omega t - k_1 \sin \theta_0 x) - |z| k_2 \sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2 \theta_0 - 1} \right).$$

Это выражение описывает плоскую неоднородную волну, фаза которой меняется вдоль оси  $x$ , а амплитуда убывает в направлении оси  $z$ . Таким образом, в случае полного внутреннего отражения во второй среде существует убывающее по экспоненте поле.

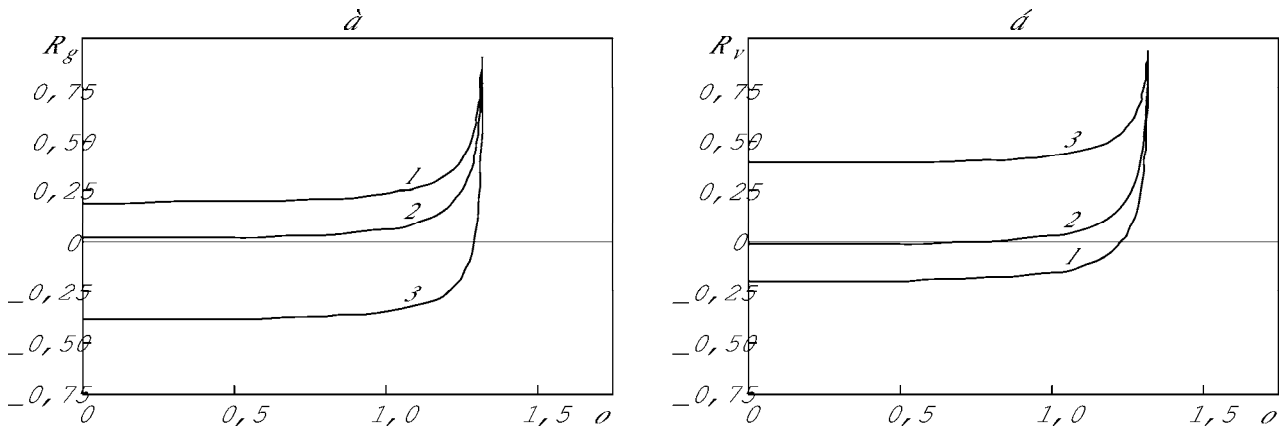


Рис. 3. Зависимости  $R_g(\theta)$  (а) и  $R_v(\theta)$  (б) при  $V_2/V_1 = 1,033$ :  
 1 —  $S_1/S_2 = 1,43$ ; 2 —  $S_1/S_2 = 1$ ; 3 —  $S_1/S_2 = 0,43$

На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов отражения  $R_g(\theta)$ ,  $R_v(\theta)$  при условии  $V_2/V_1 > 1$ . Согласно (22), (23) в случае полного внутреннего отражения  $|R_g| = 1$ ,  $|R_v| = 1$ , т. е. для каждой компоненты горизонтальной ( $R_g = |R_g| \exp(i\delta_g)$ ) или вертикальной ( $R_v = |R_v| \exp(i\delta_v)$ ) поляризации интенсивность отраженной волны дефектов равна интенсивности падающей волны. Несложно вычислить изменение фаз отраженной и падающей волн  $\delta_g$ ,  $\delta_v$ , учитывая, что выражения (22), (23) при условии (27) имеют вид отношения двух комплексно-сопряженных величин

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_g}{2} = -\frac{\sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2 \theta_0 - 1}}{(S_1 V_2 / S_2 V_1) \cos \theta_0}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta_v}{2} = -\frac{\sqrt{(V_2/V_1)^2 \sin^2 \theta_0 - 1}}{(S_2 V_1 / S_1 V_2) \cos \theta_0}.$$

4.2. *Сильнозатухающие волны.* Как отмечено выше, при условиях  $\operatorname{tg} \delta_1 \gg 1$ ,  $\operatorname{tg} \delta_2 \gg 1$  в среде распространяются сильнозатухающие волны. Величина

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{1 + i \operatorname{tg} \delta_1}{1 + i \operatorname{tg} \delta_2}} \approx \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2} + \frac{i}{\operatorname{tg} \delta_2} (\operatorname{tg} \delta_1 - 1)}$$

будет действительной лишь при одном из условий:  $\operatorname{tg} \delta_1 / \operatorname{tg} \delta_2 \approx 1$  или  $\operatorname{tg} \delta_1 / \operatorname{tg} \delta_2 \ll 1$ . В этих случаях

$$\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{C_2}{C_1} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_2}} = \sqrt{\frac{S_2 \eta_1}{S_1 \eta_2}}$$

и формально справедливы все выводы подп. 4.1. Однако сильнозатухающие волны распространяются на очень малые расстояния  $d$  (13), сравнимые с толщиной поверхностного слоя  $\delta$ , поскольку  $d \ll \lambda$ ,  $\delta \ll \lambda$ , поэтому макроскопическое описание в данном случае некорректно.

**5. Общий случай.** При произвольных значениях  $\operatorname{tg} \delta_1$  и  $\operatorname{tg} \delta_2$  выражение (24) является комплексным. В этом случае величина  $\theta_2$  также комплексная и не имеет смысла обычного угла преломления (18). Зависящая от координат часть фазы падающей (14) и отраженной (12) волн имеет вид

$$ik_1 \mathbf{m}_0 \mathbf{r} = i(\omega/C_1)(n_1 + i\chi_1)(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0). \quad (28)$$

Аналогичное выражение можно записать для преломленной волны:

$$ik_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r} = i(\omega/C_2)(n_2 + i\chi_2)(x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)$$



или, с учетом (18),

$$ik_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r} = ik_1 x \sin \theta_0 + ik_2 z \sqrt{1 - (k_1/k_2)^2 \sin^2 \theta_0}. \quad (29)$$

Учитывая, что

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \theta_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \left(\frac{n_1 + i\chi_1}{n_2 + i\chi_2}\right)^2 \sin^2 \theta_0},$$

и вводя новое представление  $\cos \theta_0 = q e^{i\gamma}$  ( $q, \gamma$  — вещественные числа), выражение (29) можно записать в виде

$$ik_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{r} = i(\omega/C_2)[(C_2/C_1)n_1 x \sin \theta_0 + zq(n_2 \cos \gamma - \chi_2 \sin \gamma)] - \\ - (\omega/C_2)[(C_2/C_1)\chi_1 x \sin \theta_0 + zq(\chi_2 \cos \gamma + n_2 \sin \gamma)],$$

где

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - (C_2/C_1)^2((n_1 n_2 + \chi_1 \chi_2)^2 - (\chi_1 n_2 - n_1 \chi_2)^2)/(n_2^2 + \chi_2^2)^2, \\ q^2 \sin 2\gamma = 2(C_2/C_1)^2((n_1 n_2 + \chi_1 \chi_2)(\chi_1 n_2 - n_1 \chi_2))/(n_2^2 + \chi_2^2)^2.$$

Таким образом, в средах с произвольным затуханием волн падающая и отраженная волны (28) однородны, поскольку поверхности постоянной амплитуды и фазы, определяемые уравнением  $x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0 = \text{const}$ , совпадают. Уменьшение амплитуды этих волн в  $e$  раз происходит на расстоянии

$$d_1 = C_1/(\chi_1 \omega) = \lambda_1/(2\pi \chi_1) \quad (30)$$

в направлении распространения волны. Преломленная волна (29) в общем случае не является однородной, поскольку поверхности постоянной амплитуды

$$(C_2/C_1)\chi_1 x \sin \theta_0 + zq(\chi_2 \cos \gamma + n_2 \sin \gamma) = \text{const} \quad (31)$$

и постоянной фазы

$$(C_2/C_1)n_1 x \sin \theta_0 + zq(n_2 \cos \gamma - \chi_2 \sin \gamma) = \text{const}$$

различны. Обе совокупности поверхностей представляют собой плоскости, нормали к которым образуют углы  $\theta_a, \theta_{ph}$  с нормалью к границе  $z_0$ , причем

$$\cos \theta_a = q(\chi_2 \cos \gamma + n_2 \sin \gamma)/R_a, \quad \sin \theta_a = (C_2/C_1)\chi_1 \sin \theta_0/R_a, \\ \cos \theta_{ph} = q(n_2 \cos \gamma - \chi_2 \sin \gamma)/R_{ph}, \quad \sin \theta_{ph} = (C_2/C_1)n_1 \sin \theta_0/R_{ph},$$

где

$$R_a = \sqrt{((C_2/C_1)\chi_1 \sin \theta_0)^2 + q^2(\chi_2 \cos \gamma + n_2 \sin \gamma)^2}, \\ R_{ph} = \sqrt{((C_2/C_1)n_1 \sin \theta_0)^2 + q^2(n_2 \cos \gamma - \chi_2 \sin \gamma)^2}.$$

**Заключение.** Сформулируем основные результаты работы. Проведенный анализ структуры волн поля дефектов позволил определить поперечный характер волн плотности и плотности потока дефектов в вязкопластической среде. Поперечный характер волн тензора плотности дефектов установлен на основе кинематических тождеств упругого континуума с дефектами и не зависит от материального соотношения (3), определяющего свойства среды. Что касается волн тензора плотности потока дефектов, то их характер неразрывно связан со свойствами среды, и сделанный вывод справедлив лишь для рассматриваемых вязкопластических сред.

При анализе структуры волн также найдена связь между тензором плотности дефектов и тензором плотности потока дефектов в плоской гармонической волне. Рассмотрены частные случаи вязкопластических сред с сильным и слабым затуханием волн. Полученные условия сильного ( $\eta/(B\omega) \gg 1$ ) или слабого ( $\eta/(B\omega) \ll 1$ ) затухания волн позволяют выбрать режимы поверхностного или объемного динамического воздействия на образец, варьируя частоту нагружения, при заданных константах материала.

В средах с сильным затуханием волн толщина поверхностного пластически деформируемого слоя определяется глубиной проникновения волн поля дефектов. Получено аналитическое выражение, связывающее глубину проникновения поля дефектов с характеристиками материала и параметрами внешнего воздействия (13).

В ходе исследования закономерностей распространения плоских волн поля дефектов через границу раздела двух вязкопластических сред получены соотношения, определяющие законы отражения, преломления, коэффициенты отражения и преломления, связывающие амплитуды отраженной и преломленной волн с амплитудой падающей волны.

При рассмотрении особенностей распространения слабозатухающих волн установлено, что имеет место полное внутреннее отражение, а также явление, аналогичное эффекту падения электромагнитной волны под углом Брюстера. В случае полного внутреннего отражения поле дефектов в преломленной волне, распространяющейся вдоль границы раздела двух сред, экспоненциально затухает.

В средах с произвольным затуханием волн падающая и отраженная волны однородны. Амплитуды этих волн экспоненциально убывают на расстоянии  $d_1$  (30) в направлении распространения волны. Возможно, изменяя условия нагружения, свойства первой среды и ее геометрию, можно достичь того, что падающая волна будет затухать, не достигнув границы раздела двух сред. Если возмущение распространяется до границы раздела двух сред, то возникает преломленная волна (29), которая не является однородной и экспоненциально затухает в направлении нормали к плоскости постоянной амплитуды (31).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. М.: Наука, 1990.
2. **Чертова Н. В., Гриняев Ю. В.** Закономерности распространения плоских волн дефектов в вязкопластической среде // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25, вып. 18. С. 91–94.
3. **Панин В. Е.** Физическая мезомеханика поверхностных слоев твердых тел // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, № 6. С. 5–23.
4. **Алехин В. П.** Физика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. М.: Наука, 1983.
5. **Орлов Л. Г.** О зарождении дислокаций на внешних и внутренних поверхностях кристаллов // Физика твердого тела. 1967. Т. 9, № 8. С. 2345–2349.
6. **Псахье С. Г., Уваров Т. Ю., Зольников К. П.** О новом механизме генерации дефектов на границе раздела. Молекулярно-динамическое моделирование // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 3. С. 69–71.
7. **Князева А. Г.** О распределении температуры, напряжений и деформаций в системе “материал — покрытие” при условии неидеальности теплового контакта между веществами // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 1. С. 39–51.
8. **Деревягина Л. С., Панин В. Е., Стрелкова И. Л.** Эволюция деформированного состояния в зоне надреза при растяжении поликристаллов NiTi в мартенситном состоянии // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 5. С. 83–90.
9. **Kroner E.** On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Intern. J. Engng Sci. 1963. V. 1. P. 261–278.

10. **Гриняев Ю. В., Чертова Н. В.** Полевая теория дефектов // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 5. С. 19–32.
11. **Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968.
12. **Косевич А. М.** Основы механики кристаллической решетки. М.: Мир, 1972.
13. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. Т. 8. Теоретическая физика. М.: Наука, 1982.
14. **Гриняев Ю. В., Панин В. Е.** Полевая теория на мезоуровне // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.
15. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1.

*Поступила в редакцию 4/III 2003 г.*

---