УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УЗКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА. НЕИЗВЕСТНАЯ ОБЛАСТЬ КОНТАКТА

И. И. Аргатов, С. А. Назаров*

Государственная морская академия им. С. О. Макарова, 199106 Санкт-Петербург
* Санкт-Петербургский государственный университет, 198904 Санкт-Петербург

Изучена нелинейная задача определения контактных давлений и зоны контакта под подошвой узкого кольцевого штампа. На основе метода сращиваемых асимптотических разложений построена асимптотическая модель одностороннего контакта вдоль линии. В явном виде выписаны асимптотические представления для плотности погонных давлений. Найдена асимптотика дуги контакта.

1. Постановка задачи и обсуждение. Пусть Γ — окружность радиуса R, параметризованная полярным углом θ (см. рисунок). Обозначим через h и $\varepsilon = h/R$ полуширину и относительную полуширину кольца $\Gamma(\varepsilon)$, срединной линией которого является Γ. Вектор перемещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ точек упругого полупространства под действием кольцевого штампа с основанием $\Gamma(\varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\mu\Delta_x \boldsymbol{u}(\varepsilon;\boldsymbol{x}) + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\varepsilon;\boldsymbol{x}) = 0, \quad x_3 < 0; \tag{1.1}$$

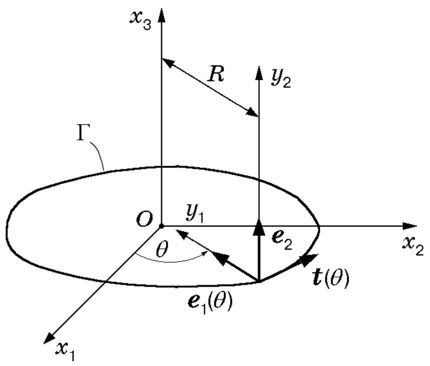
$$\sigma_{31}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}) = \sigma_{32}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}) = 0, \quad x_3 = 0; \tag{1.2}$$

$$\sigma_{33}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}) = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad (x_1,x_2) \notin \Gamma(\varepsilon); \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} u_3(\varepsilon;\boldsymbol{x}) \leqslant -\delta_0 - \beta_2 x_1, \qquad \sigma_{33}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \\ [u_3(\varepsilon;\boldsymbol{x}) + \delta_0 + \beta_2 x_1]\sigma_{33}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x}) = 0, \quad x_3 = 0, \quad (x_1,x_2) \in \Gamma(\varepsilon); \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{u}(\varepsilon;\boldsymbol{x}) = o(1), \qquad |\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \to \infty. \tag{1.5}$$

Здесь Δ_x — оператор Лапласа; λ, μ — параметры Ламе; $\sigma_{3j}(\boldsymbol{u})$ — компоненты тензора напряжений; δ_0, β_2 — заданные поступательное смещение и угол поворота штампа



Работа выполнена при финансовой поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

относительно оси Ox_2. Выражая нормальную составляющую вектора перемещений в граничной точке через поверхностные давления p и используя общепринятые обозначения для модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν, условия одностороннего контакта (1.4) запишем в виде

$$p(x_1,x_2)>0\Rightarrow\iint\limits_{\Gamma(\varepsilon)}\frac{p(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}}\,d\xi_1\,d\xi_2=\frac{\pi E}{1-\nu^2}\,(\delta_0+\beta_2x_1),$$

$$p(x_1,x_2)=0\Rightarrow\iint\limits_{\Gamma(\varepsilon)}\frac{p(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}}\,d\xi_1\,d\xi_2\geqslant\frac{\pi E}{1-\nu^2}\,(\delta_0+\beta_2x_1),\tag{1.6}$$

$$p(x_1,x_2)\geqslant 0,\qquad (x_1,x_2)\in\Gamma(\varepsilon).$$

Замечание 1. Из соотношений (1.6) следует, что контакт не может осуществляться в точках $(x_1,x_2)\in\Gamma(\varepsilon)$, в которых поверхность штампа располагается выше уровня невозмущенной границы упругого основания.

Поставленная в рамках линейной теории упругости задача (1.1)–(1.5) нелинейна. Ввиду того что в процессе нагружения штампа расчетная схема конструкции изменяется (появляются новые связи или разрушаются старые), нелинейность такого рода принято называть конструкционной. Математическое исследование подобных задач проводилось с привлечением аппарата теории вариационных неравенств (см., например, [1, 2]). Методы качественного исследования разработаны в [3]. Численные алгоритмы предлагались в [1, 2, 4]. Задачи оптимального управления изучались в [5]. В работе [6] в задачах механики трещин выводилось неравенство, аналогичное рассматриваемому в данной работе, и на его основе формулировались критерии разрушения.

Специфика рассматриваемой задачи заключается в необходимости указать расположение границы смены типа краевых условий в (1.4). Искомая зона контакта представляет собой узкую подобласть кольца $\Gamma(\varepsilon)$, которая при уменьшении ε стягивается к некоторой дуге окружности Γ. В данном случае будем говорить о контакте вдоль линии [7]. Поэтапный процесс уточнения сведений о том, где на $\Gamma(\varepsilon)$ осуществляется контакт штампа с поверхностью упругого основания, назван вариацией зоны контакта [8].

Ниже описываются асимптотические конструкции, на основе которых строится приближенное решение задачи (1.1)–(1.5). Впервые они применялись в работах [7, 9, 10]. Метод сращиваемых разложений, используемый в п. **3**, подробно изложен в [11]. Цель данной работы состоит в получении компактных формул, подходящих для расчетов. В [8] изучена аналогичная задача для оператора Лапласа и дано обоснование асимптотического решения. Предположение об отсутствии трения позволяет применить представление Папковича — Найбера и использовать результаты [8] для решения рассматриваемой задачи.

2. Внешнее асимптотическое представление. Обозначим через $\boldsymbol{T}$ решение задачи Буссинеска о воздействии на границу упругого полупространства $x_3\leqslant 0$ единичной сосредоточенной силы, приложенной в начале координат и направленной противоположно оси Ox_3. Вектор смещения точек полупространства под влиянием нагрузки, распределенной вдоль контура Γ с некоторой погонной плотностью P, выражается интегралом

$$\boldsymbol{v}(P;\boldsymbol{x})=\int\limits_{-\pi}^{\pi}P(\tau)\boldsymbol{T}(x_1-R\cos\tau,\;x_2-R\sin\tau,\;x_3)R\,d\tau.\tag{2.1}$$

Вектор-функция (2.1) служит приближением к решению $\boldsymbol{u}$ в области, удаленной от $\Gamma(\varepsilon)$, если интерпретировать P как интенсивность контактных давлений, рассчитанных на единицу длины дуги срединной линии подошвы штампа.

В окрестности Γ перейдем к криволинейной ортогональной системе координат $(\theta,\, y_1,\, y_2)$ (см. рисунок), связанных с декартовыми формулами

$$x_1 = (R - y_1)\cos\theta, \qquad x_2 = (R - y_1)\sin\theta, \qquad x_3 = y_2. \tag{2.2}$$

Декартовы компоненты вектора перемещений, вызванных единичной силой, приложенной на Γ в точке с угловой координатой τ, записываются в виде

$$T_1(\theta,\boldsymbol{y};\tau) = -\frac{R(\cos\theta - \cos\tau) - y_1\cos\theta}{4\pi\mu R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)}\Big(\frac{y_2}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)^2} + \frac{1-2\nu}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau) - y_2}\Big),$$

$$T_2(\theta,\boldsymbol{y};\tau) = -\frac{R(\sin\theta - \sin\tau) - y_1\sin\theta}{4\pi\mu R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)}\Big(\frac{y_2}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)^2} + \frac{1-2\nu}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau) - y_2}\Big),$$

$$4\pi\mu T_3(\theta,\boldsymbol{y};\tau) = -\frac{1}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)}\Big(\frac{y_2^2}{R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)^2} + 2(1-\nu)\Big),$$

$$R_{\boldsymbol{y}}(\theta,\tau)^2 = 4R^2(1 + R^{-1}y_1)\sin^2[(\theta-\tau)/2] + |\boldsymbol{y}|^2, \qquad |\boldsymbol{y}| = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}.$$

Введем в рассмотрение проекции вектора (2.1) на координатные орты $\boldsymbol{t}(\theta)$, $\boldsymbol{e}_1(\theta)$, $\boldsymbol{e}_2$ (см. рисунок):

$$V_t(P;\theta,\boldsymbol{y}) = \int_{-\pi}^{\pi} P(\tau)[-T_1(\theta,\boldsymbol{y};\tau)\sin\theta + T_2(\theta,\boldsymbol{y};\tau)\cos\theta]R\,d\tau,$$

$$V_1(P;\theta,\boldsymbol{y}) = \int_{-\pi}^{\pi} P(\tau)[-T_1(\theta,\boldsymbol{y};\tau)\cos\theta - T_2(\theta,\boldsymbol{y};\tau)\sin\theta]R\,d\tau, \tag{2.3}$$

$$V_2(P;\theta,\boldsymbol{y}) = \int_{-\pi}^{\pi} P(\tau)T_3(\theta,\boldsymbol{y};\tau)R\,d\tau.$$

Считаем, что функция P непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную с разрывами первого рода (в дальнейшем эти условия соблюдаются). Используя методы асимптотического анализа [6, 7, 9, 10] интегралов типа (2.3), при $|\boldsymbol{y}| \to 0$ получим представления

$$4\pi\mu V_t(P;\theta,\boldsymbol{y}) = (1-2\nu)\ \text{v.p.}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(\tau)\frac{\cos[(\tau-\theta)/2]}{\sin[(\tau-\theta)/2]}\,d\tau + \ldots,$$

$$4\pi\mu V_1(P;\theta,\boldsymbol{y}) = -\frac{2y_1y_2}{|\boldsymbol{y}|^2}P(\theta) + 2(1-2\nu)\,\mathrm{sign}\,(y_1)\Big(\operatorname{arctg}\frac{|y_2|}{|y_1|} - \frac{\pi}{2}\Big)P(\theta) + \frac{1-2\nu}{2R}\,Q + \ldots, \tag{2.4}$$

$$4\pi\mu V_2(P;\theta,\boldsymbol{y}) = 4(1-\nu)\Big[P(\theta)\ln\frac{|\boldsymbol{y}|}{8R} - (\boldsymbol{J}P)(\theta)\Big] - \frac{2y_2^2}{|\boldsymbol{y}|^2}P(\theta) + \ldots.$$

Здесь v.p. — главное значение интеграла в смысле Коши; Q — равнодействующая системы нагрузок, прижимающих штамп к поверхности упругого основания; $\boldsymbol{J}$ — интегральный оператор;

$$(\boldsymbol{J}P)(\theta) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{P(\tau) - P(\theta)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau, \qquad Q = \int_{-\pi}^{+\pi} P(\tau)R\,d\tau. \tag{2.5}$$

Обсуждение оценок отброшенных членов в соотношениях (2.4) выходит за рамки статьи; отметим только, что они во многом зависят от дифференциальных свойств плотности P [8–10].

3. Внутреннее асимптотическое представление. В окрестности подошвы штампа перейдем к локальной системе координат $(\theta,\, y_1,\, y_2)$, осуществляя замену (2.2) в соотношениях (1.1)–(1.4), записанных в цилиндрических координатах. Введем "быстрые" переменные

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) = \varepsilon^{-1}(y_1, y_2).$$

Удерживая в полученных соотношениях только старшие (относительно параметра ε) слагаемые, сформируем в полуплоскости $\eta_2 \leqslant 0$ задачу для внутреннего асимптотического представления решения исходной задачи:

$$\boldsymbol{w}(\theta,\boldsymbol{\eta}) = w_t(\theta,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{t}(\theta) + W_1(\theta,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{e}_1(\theta) + W_2(\theta,\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{e}_2. \tag{3.1}$$

В силу векторного уравнения (1.1) имеем соотношения

$$\begin{aligned} &\mu\Delta_\eta W_1(\theta,\boldsymbol{\eta}) + (\lambda+\mu)[\partial_1^2 W_1(\theta,\boldsymbol{\eta}) + \partial_1\partial_2\, W_2(\theta,\boldsymbol{\eta})] = 0,\\ &\mu\Delta_\eta W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) + (\lambda+\mu)[\partial_1\partial_2\, W_1(\theta,\boldsymbol{\eta}) + \partial_2^2 W_2(\theta,\boldsymbol{\eta})] = 0; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mu\Delta_\eta w_t(\theta,\boldsymbol{\eta}) = 0, \quad \eta_2 < 0, \tag{3.3}$$

где Δ_η — двумерный оператор Лапласа; $\partial_i = \partial/\partial\eta_i$. Из уравнения (1.2) следуют краевые условия

$$\mu\partial_2 w_t(\theta,\boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad \eta_2 = 0; \tag{3.4}$$

$$\tau_{12}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{\eta}) \equiv \mu(\partial_1 W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) + \partial_2 W_1(\theta,\boldsymbol{\eta})) = 0, \qquad \eta_2 = 0. \tag{3.5}$$

Формула (1.3) заменяется следующей:

$$\tau_{22}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{\eta}) \equiv \lambda\partial_1 W_1(\theta,\boldsymbol{\eta}) + (\lambda+2\mu)\partial_2 W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad \eta_2 = 0, \quad R < |\eta_1|. \tag{3.6}$$

Условия одностороннего контакта (1.4) преобразуются в соотношения

$$\begin{gathered} W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) \leqslant -\delta_0 - \beta_2 R\cos\theta, \qquad \tau_{22}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{\eta}) \leqslant 0,\\ [W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) + \delta_0 + \beta_2 R\cos\theta]\tau_{22}(\boldsymbol{W};\boldsymbol{\eta}) = 0, \qquad \eta_2 = 0, \quad -R < \eta_1 < R. \end{gathered} \tag{3.7}$$

В рамках метода сращиваемых разложений формулы (3.2)–(3.7) необходимо дополнить требованиями, характеризующими поведение решения $\boldsymbol{w}$ на бесконечности. Процедура сращивания внутреннего (3.1) и внешнего (2.1) асимптотических представлений подразумевает совпадение главных членов асимптотик величин $\boldsymbol{v}(P;\theta,\boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{w}(\theta,\boldsymbol{\eta})$ при $|\boldsymbol{y}| \to 0$ и $|\boldsymbol{\eta}| = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2} \to \infty$ соответственно. Таким образом, согласно (2.4) при $|\boldsymbol{\eta}| \to \infty$ имеем

$$4\pi\mu w_t(\theta,\boldsymbol{\eta}) = (1-2\nu)\ \mathrm{v.p.}\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(\tau)\,\frac{\cos[(\tau-\theta)/2]}{\sin[(\tau-\theta)/2]}\,d\tau + o(1); \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} 4\pi\mu W_1(\theta,\boldsymbol{\eta}) &= -\frac{2\eta_1\eta_2}{|\boldsymbol{\eta}|^2}\,P(\theta) + 2(1-2\nu)\,\mathrm{sign}\,(\eta_1)\Bigl(\mathrm{arctg}\,\frac{|\eta_2|}{|\eta_1|} - \frac{\pi}{2}\Bigr)P(\theta) + \frac{1-2\nu}{2R}\,Q + o(1),\\ 4\pi\mu W_2(\theta,\boldsymbol{\eta}) &= 4(1-\nu)\Bigl[P(\theta)\Bigl(\ln\frac{|\boldsymbol{\eta}|}{R} - \ln\frac{8R}{h}\Bigr) - (\boldsymbol{J}P)(\theta)\Bigr] - \frac{2\eta_2^2}{|\boldsymbol{\eta}|^2}\,P(\theta) + o(1). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Нетрудно видеть, что задача (3.2)–(3.9) для "плоского" пограничного слоя распадается на две: задачу двумерной теории упругости, включающую соотношения (3.2), (3.5)–(3.7), (3.9), и задачу об "антиплоском" сдвиге (3.3), (3.4), (3.8), причем зависимость от "медленной" угловой координаты θ параметрическая.

Функция w_t, характеризующая проскальзывание границы полупространства в касательном направлении, задается формулой

$$w_t(\theta) = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E}\,\text{v.p.}\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(\tau)\,\frac{\cos[(\tau-\theta)/2]}{\sin[(\tau-\theta)/2]}\,d\tau.$$

Определим вектор $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2)$. Поскольку соотношения (3.2), (3.5)–(3.7), (3.9) описывают плоскую контактную задачу для штампа с прямолинейным горизонтальным основанием, то возможны две ситуации: всюду на отрезке $|\eta_1| \leqslant R$ реализуются либо условия контакта $W_2(\theta, \eta_1, 0) = -\delta_0 - \beta_2 R\cos\theta$, либо условия отсутствия напряжений.

Перемещения точек упругой полуплоскости выражаются через комплексный потенциал φ по формуле Колосова — Мусхелишвили [12]

$$2\mu(W_1(\eta) + iW_2(\eta)) = æ\varphi(\eta) + \varphi(\bar\eta) - (\eta-\bar\eta)\overline{\Phi(\eta)}. \tag{3.10}$$

Здесь $\eta = \eta_1 + i\eta_2$; $\Phi(\eta) = \varphi'(\eta)$; $æ = 3 - 4\nu$; черта означает комплексное сопряжение, штрих — дифференцирование по η. Если штамп нагружен единичной силой, то $\hat\Phi_1(\eta) = (2\pi)^{-1}(R^2-\eta^2)^{-1/2}$ [12] и

$$\hat\varphi_1(\eta) = -\frac{1}{2\pi i}\ln\Big(\frac{\eta}{R} + \sqrt{\frac{\eta^2}{R^2} - 1}\Big) + c. \tag{3.11}$$

Положив в (3.11) $c = -[4(æ+1)]^{-1}(æ-1)$, по формуле (3.10) можно построить комплексную функцию, удовлетворяющую (3.1), (3.5), (3.6), а также условию $\hat W_2(\eta) = 0$ при $|\eta_1| < R$, $\eta_2 = 0$. Кроме того, при $|\eta| \to \infty$ верны следующие формулы:

$$4\pi\mu\hat W_1(\eta) = -\frac{2\eta_1\eta_2}{|\eta|^2} + 2(1-2\nu)\,\mathrm{sign}\,(\eta_1)\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{|\eta_2|}{|\eta_1|} - \frac{\pi}{2}\Big) + O(|\eta|^{-1}),$$

$$4\pi\mu\hat W_2(\eta) = 4(1-\nu)\ln\frac{2|\eta|}{R} - \frac{2\eta_2^2}{|\eta|^2} + O(|\eta|^{-1}).$$

Согласно построению функции

$$W_1(\theta, \boldsymbol{\eta}) = P(\theta)\hat W_1(\eta) + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{4\pi ER}\,Q; \tag{3.12}$$

$$W_2(\theta, \boldsymbol{\eta}) = P(\theta)\hat W_2(\eta) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\Big[P(\theta)\ln\frac{16R}{h} + (\boldsymbol{J}P)(\theta)\Big] \tag{3.13}$$

полностью удовлетворяют соотношениям (3.2), (3.5), (3.6), (3.9). Закон распределения контактного давления в главном имеет вид

$$p(\theta, y_1) = \frac{P(\theta)}{\pi\sqrt{h^2 - y_1^2}}. \tag{3.14}$$

Возможность выполнения ограничения (3.7) для W_1, W_2 изучается ниже.

4. Результирующее вариационное неравенство и главный член логарифмической асимптотики его решения. Пусть $P(\theta) > 0$. Тогда в силу (3.14) во втором соотношении (3.7) реализуется знак строгого неравенства, а в первом — знак равенства. Поэтому согласно (3.13)

$$P(\theta) > 0 \;\Rightarrow\; P(\theta)\ln\frac{16R}{h} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{P(\tau) - P(\theta)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\,(\delta_0 + \beta_2 R\cos\theta). \tag{4.1}$$

Если $P(\theta) = 0$, то функции (3.12), (3.14) не зависят от "быстрых" переменных и

$$P(\theta) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{P(\tau)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\, d\tau \geqslant \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\, (\delta_0 + \beta_2 R \cos\theta). \tag{4.2}$$

Наконец, ситуация $P(\theta) < 0$ невозможна как противоречащая второму условию (3.7), т. е. возникает требование

$$P(\theta) \geqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{4.3}$$

Функция P определяется из соотношений (4.1)–(4.3) и включает все допущения в конструкциях внешнего и внутреннего асимптотических представлений решения исходной задачи.

Для упрощения записи используем обозначения

$$\Lambda = \ln \frac{16R}{h}, \qquad \gamma(\theta) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E R}\, P(\theta), \qquad \varphi(\theta) = \frac{\delta_0}{R} + \beta_2 \cos\theta. \tag{4.4}$$

Следуя общей схеме построения вариационных неравенств (см., например, [1]), соберем формулы (4.1)–(4.3) в единую задачу для искомой плотности γ. Умножим равенство в (4.1) и неравенство в (4.2) на произвольную гладкую неотрицательную функцию σ и проинтегрируем по Г. С учетом (4.4) имеем

$$\Lambda(\gamma, \sigma) + (\boldsymbol{J}\gamma, \sigma) \geqslant (\varphi, \sigma), \qquad (\gamma, \sigma) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \gamma(\tau)\sigma(\tau)\, d\tau. \tag{4.5}$$

Повторим процедуру с $\sigma = \gamma$. В силу (4.1), (4.2) находим

$$\Lambda(\gamma, \gamma) + (\boldsymbol{J}\gamma, \gamma) = (\varphi, \gamma). \tag{4.6}$$

Вычитая (4.5) из (4.6), получим формулу

$$\Lambda(\gamma, \gamma - \sigma) + (\boldsymbol{J}\gamma, \gamma - \sigma) \leqslant (\varphi, \gamma - \sigma) \qquad \forall \sigma \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Результирующее вариационное неравенство формулируется как задача нахождения неотрицательной функции γ, удовлетворяющей соотношению (4.7) при произвольной гладкой неотрицательной функции σ. Отметим, что решение задачи (4.7), обладающее некоторой гладкостью (если оно существует), удовлетворяет (4.1)–(4.3); вывод этих формул из (4.7) подчиняется общей схеме [1].

Замечание 2. В силу определенных свойств оператора $\boldsymbol{J}$ [8] вопрос о разрешимости задачи (4.7) остается открытым. Однако для построения асимптотики решения задачи (1.1)–(1.5) достаточно асимптотического решения (4.7).

Задача (4.7) содержит большой параметр. Пренебрегая в левой части (4.7) вторым слагаемым, получаем

$$\Lambda(\gamma_1, \gamma_1 - \sigma) \leqslant (\varphi, \gamma_1 - \sigma) \qquad \forall \sigma \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Пусть γ_1 — решение вариационного неравенства (4.8). Подставив в (4.8) в качестве пробной функции $\sigma = \gamma_1 + \sigma_1$ с произвольной $\sigma_1 \geqslant 0$, выводим неравенство $(\Lambda\gamma_1 - \varphi, \sigma_1) \geqslant 0$ $\forall \sigma_1 \geqslant 0$. Следовательно,

$$\Lambda\gamma_1(\theta) - \varphi(\theta) \geqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{4.9}$$

Положим в (4.8) сначала $\sigma = 0$, а затем $\sigma = 2\gamma_1$. Получим

$$(\Lambda\gamma_1(\theta) - \varphi(\theta))\gamma_1(\theta) = 0, \qquad \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{4.10}$$

Используя обозначения (4.4), перепишем (4.9), (4.10) в альтернативной форме и добавим требование неотрицательности искомой плотности:

$$P_1(\theta) > 0 \Rightarrow \quad P_1(\theta)\ln\frac{16R}{h} = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\,(\delta_0 + \beta_2 R\cos\theta); \tag{4.11}$$

$$P_1(\theta) = 0 \Rightarrow \quad \delta_0 + \beta_2 R\cos\theta \leqslant 0; \tag{4.12}$$

$$P_1(\theta) \geqslant 0, \qquad \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{4.13}$$

Пусть $(t)_+ = (t + |t|)/2$. Тогда функция P_1, удовлетворяющая (4.11)–(4.13), а следовательно, являющаяся решением задачи (4.8), имеет вид

$$P_1(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{1}{\ln(16R/h)}\,(\delta_0 + \beta_2 R\cos\theta)_+. \tag{4.14}$$

Соотношения (4.11)–(4.13) формализуют задачу одностороннего контакта для упругого основания Винклера.

5. Вариация зоны контакта. Конкретизируя исходную задачу, примем $\beta_2 > 0$, $-1 \leqslant -\delta_0/(\beta_2 R) < 1$. В этом случае $P_1(\theta) > 0$, если угол θ по модулю ограничен величиной

$$\Theta_1 = \arccos\,[-\delta_0/(\beta_2 R)]. \tag{5.1}$$

Известен итерационный метод решения контактных задач, реализация которого на каждом шаге состоит в решении задачи с фиксированной зоной контакта. Переход к очередному шагу осуществляется удалением из расчетной области точек, в которых получены отрицательные значения контактных давлений. При этом необходимо, чтобы в начале процесса предполагаемая область контакта охватывала истинную. В [8] показано, что искомая узкая зона контакта оказывается в определенном смысле малым возмущением дуги $\theta \in (-\Theta_1, \Theta_1)$. Следует ожидать, что формула (4.14) дает оценку сверху (см. замечание 1) и уточнение первого приближения приведет к уменьшению величины (5.1).

Положим $\gamma_n(\theta) \equiv 0$ при $\theta \notin (-\Theta_{n-1}, \Theta_{n-1})$. Согласно (2.5) имеем

$$(\boldsymbol{J}\gamma_n)(\theta) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\Theta_{n-1}}^{\Theta_{n-1}} \frac{\gamma_n(\tau) - \gamma_n(\theta)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau - {}$$
$$- \frac{\gamma_n(\theta)}{2}\Big(\int\limits_{-\pi}^{-\Theta_{n-1}} \frac{1}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau + \int\limits_{\Theta_{n-1}}^{\pi} \frac{1}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau\Big).$$

Вычисляя последние интегралы и подставляя результат в (4.8), для $\theta \in (-\Theta_{n-1}, \Theta_{n-1})$ получаем

$$\gamma_n(\theta)\Big(\ln\frac{16}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\Big[\operatorname{tg}\frac{\Theta_{n-1}+\theta}{4}\ \operatorname{tg}\frac{\Theta_{n-1}-\theta}{4}\Big]\Big) + \frac{1}{2}\int\limits_{-\Theta_{n-1}}^{\Theta_{n-1}} \frac{\gamma_n(\tau) - \gamma_n(\theta)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau = \varphi(\theta). \tag{5.2}$$

Решение уравнения (5.2) запишем в форме ряда

$$\gamma_n(\theta) \sim \Lambda^{-1}\gamma_n^1(\theta) + \Lambda^{-2}\gamma_n^2(\theta) + \ldots, \qquad \gamma_n^1(\theta) = \varphi(\theta),$$
$$\gamma_n^2(\theta) = -\frac{1}{2}\,\varphi(\theta)\ln\Big[\operatorname{tg}\frac{\Theta_{n-1}+\theta}{4}\ \operatorname{tg}\frac{\Theta_{n-1}-\theta}{4}\Big] - \frac{1}{2}\int\limits_{-\Theta_{n-1}}^{\Theta_{n-1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\theta)}{2|\sin[(\tau-\theta)/2]|}\,d\tau. \tag{5.3}$$

Ограничиваясь двумя членами разложения (5.3), находим второе, уточняющее (4.11), приближение к решению задачи (4.1)–(4.3)

$$P_2(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{1}{\Lambda}\Big(\delta_0 + \beta_2 R\cos\theta + \frac{\beta_2 R}{\Lambda}\Big[\cos\theta - \cos\frac{\Theta_1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\Big] - \\ - \frac{\delta_0 + \beta_2 R\cos\theta}{2\Lambda}\ln\Big[\operatorname{tg}\frac{\Theta_1+\theta}{4}\operatorname{tg}\frac{\Theta_1-\theta}{4}\Big]\Big)_+. \qquad (5.4)$$

Плотности распределения погонных давлений (5.4) соответствует дуга контакта $\theta \in (-\Theta_2, \Theta_2)$, причем равенство $\Theta_2 = \Theta_1 - \Lambda^{-1}S_1$ обеспечивает ту же точность, что и в (5.4). Отбрасывая величины $O(\Lambda^{-2}\ln\Lambda)$, выводим следующее трансцендентное уравнение вариации зоны контакта:

$$S_1\Big[1 - \frac{1}{2\Lambda}\ln\Big(\frac{S_1}{4\Lambda}\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2}.$$

Асимптотика его решения имеет вид $S_1 = (1/2)\operatorname{tg}(\Theta_1/2) + O(\Lambda^{-1}\ln\Lambda)$ (пренебрегаем вычитаемым в квадратных скобках). Данная формула становится неверной при значениях Θ_1, близких к π, т. е. не позволяет описать начало отрыва штампа от основания.

Если $\Theta_1^0 = \pi$, что соответствует $\delta_0 = \beta_2 R$, то уравнение (5.2) совпадает с (4.1) и имеет решение в замкнутой форме [10]. Удерживая, как и ранее, в его логарифмической асимптотике только два первых члена, имеем

$$P_2^0(\theta) = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{\beta_2 R}{\Lambda}\Big(1 + \cos\theta + \frac{2}{\Lambda}\cos\theta\Big)_+.$$

Раствор угла дуги контакта находится из уравнения $\Lambda(1+\cos\Theta_2^0) + 2\cos\Theta_2^0 = 0$. Его решение выражается в конечном виде и обладает асимптотикой $\Theta_2^0 = \pi - 2\Lambda^{-1/2} + O(\Lambda^{-3/2})$.

Заключение. Полученные формулы следует понимать именно в асимптотическом смысле: они тем точнее, чем меньше параметры ε и Λ^{-1} ($\Lambda = \ln(16/\varepsilon)$). Напряженно-деформированное состояние упругого тела в окрестности концевых зон контакта трехмерно и, очевидно, не описывается "плоской" зависимостью (3.14). При определении контактных давлений на этих участках можно применять численные методы, объединив их с асимптотическим. Используя найденные конструкции, асимптотику зоны контакта нельзя определить с точностью, сравнимой с полушириной штампа $h = \varepsilon R$. Только возникновение в результирующей задаче новой масштабной единицы $\Lambda^{-1}R$ позволило исследовать вопрос о вариации дуги контакта.

Укажем некоторые возможные пути обобщения предлагаемой одномерной модели одностороннего контакта. Замена упругого основания на слой конечной толщины незначительно усложняет модель. Задачу для штампа переменной толщины с "волнистым" основанием и отличной от круговой срединной линией можно рассматривать, привлекая результаты из [6, 8, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
2. **Кравчук А. С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Моск. акад. приборостроения и информатики, 1997.
3. **Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.** Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 82–94.

4. **Ковтуненко В. А.** Метод численного решения задачи о контакте упругой пластины с препятствием // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 142–146.
5. **Хлуднев А. М.** О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 2. С. 882–894.
6. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Разрушение узкой перемычки между трещинами, лежащими в одной плоскости // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, № 1. С. 157–165.
7. **Kalker J. J.** On elastic line contact // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1972. V. 39, N 4. P. 1125–1132.
8. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 3–32.
9. **Федорюк М. В.** Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 46, № 1. С. 167–186.
10. **Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.** Асимптотика решений задачи Дирихле в трехмерной области с вырезанной тонкой трубкой // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 2. С. 187–217.
11. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 17/V 1999 г.,
в окончательном варианте — 25/ VIII 1999 г.