

11. Карелов Н. В., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г. Заселенность вращательных уровней молекул азота при неравновесной конденсации в свободно расширяющемся газе // ПМТФ.— 1978.— № 3.
12. Васильев А. П., Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. Приближенное аналитическое описание колебательной релаксации слабоангармонических осцилляторов // ПМТФ.— 1984.— № 5.
13. Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. Релаксация ангармонических молекул // ПМТФ.— 1986.— № 3.
14. Zacharias H., Loy M. M. T. et al. Rotational and electronic relaxation in pulsed supersonic beams of NO seeded in He and Ar // J. Chem. Phys.— 1984.— V. 81, N 7.
15. Богданов А. В., Горбачев Ю. Е., Дубровский Г. В., Стрельчя В. М. К теории колебательного и вращательного возбуждения полиатомных молекул. II. Упрощенные формулы для констант скоростей.— Л., 1984.— (Препринт/ФТИ АН СССР; № 916).

Поступила 30/I 1986 г.

УДК 532.517

## МЕДЛЕННОЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ДИСКАМИ

Л. А. Кадинский, Ю. А. Половко, В. С. Юфеев

(Ленинград)

Исследованию течения жидкости между коаксиальными дисками посвящена обширная литература. Обзор по этой проблеме можно найти, например, в [1]. Детально изучен также класс течений в каналах с проницаемыми стенками (со вдувом или отсосом) [2]. Для обоих классов задач в предположении, что жидкость несжимаемая, найдены точные одномерные решения уравнений Навье — Стокса.

Очевидно, что в случае сжимаемого газа аналогичные одномерные решения, вообще говоря, получить нельзя. Однако если рассматривать медленные течения вязкого газа, когда число Маха мало и им можно пренебречь, а изменение плотности газа связано с большими перепадами температуры, то при определенных условиях одномерность решений удастся сохранить. С учетом прикладной значимости таких задач, например для химической технологии и микроэлектроники, в настоящей работе получено одномерное решение уравнений Навье — Стокса для течения вязкого, теплопроводного газа в дисковом канале.

Пусть нижний диск вращается с угловой скоростью  $\omega$ , а через верхний осуществляется вдув газа с входной скоростью  $v_{вх}$ . Введем цилиндрическую систему координат с осью  $Oz$ , направленной вдоль оси диска. Поскольку число Маха предполагается малым, то можно пренебречь вкладом кинетической энергии в полную энергию газа и не учитывать в уравнении энергии вязкую диссипацию. Кроме того, если изменение давления газа в канале невелико, то в уравнении состояния этим изменением можно пренебречь и считать, что плотность газа зависит только от его температуры. Конкретные условия применимости последнего допущения указаны ниже.

Сделанные допущения позволяют представить решение задачи в виде (индекс 0 относится к параметрам при  $z = 0$ )

$$(1a) \quad v_r = r \frac{v_0}{h^2} F\left(\frac{z}{h}\right), \quad v_\omega = \omega r G\left(\frac{z}{h}\right), \quad v_z = \frac{v_0}{h} H\left(\frac{z}{h}\right);$$

$$(1b) \quad p = -\rho_0 \frac{v_0^2}{2h^4} ar^2 + \rho_0 \frac{v_0^2}{h^2} P\left(\frac{z}{h}\right) + p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right),$$

$$T = T_0 \Theta\left(\frac{z}{h}\right), \quad \rho = \rho_0 \Theta^{-1}\left(\frac{z}{h}\right),$$

где  $h$  — ширина канала;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $g$  — ускорение свободного падения;  $R$  — газовая постоянная;  $a$  — параметр, связанный с величиной скорости вдува. Последнее слагаемое в (1b) учитывает наличие в уравнении импульсов силы тяжести, направленной по оси  $Oz$ .

Выражение (16) показывает, что изменение давления в уравнении состояния мало при условии

$$(2a) \quad \frac{gh}{RT_0} \ll 1, \quad \rho_0 \frac{v_0^2}{h^2} \ll P_0$$

и пока

$$(2b) \quad r \ll \frac{2h^4 P_0}{v_0^2 a \rho_0}.$$

Таким образом, даже для бесконечных дисков разыскиваемое решение (1) справедливо лишь в конечной области значений  $r$ , удовлетворяющих условиям (2). С другой стороны, несмотря на малые изменения давления, первое слагаемое в (16), определяя радиальный градиент давления, будет оказывать существенное влияние на характер течения в канале.

Пусть далее зависимость коэффициентов теплопроводности  $\lambda$  и динамической вязкости  $\mu$  имеет вид

$$(3) \quad \lambda = \lambda_0 \Theta^n, \quad \mu = \mu_0 \Theta^m.$$

Тогда, подставляя (1), (3) в полную систему уравнений Навье — Стокса, которая здесь не приводится, и учитывая сделанные выше допущения, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(4) \quad H' = \Theta^{-1} \Theta' H - 2F, \\ F'' = \Theta^{-(m+1)} (F^2 - \text{Ec}^{-2} G^2 + HF' - a\Theta) - m\Theta^{-1} \Theta' F';$$

$$(5) \quad G'' = \Theta^{-(m+1)} (2FG + HG') - m\Theta^{-1} \Theta' G', \\ \Theta'' = \text{Pr} H \Theta^{-(n+1)} \Theta' - n\Theta^{-1} \Theta'^2;$$

$$(6) \quad p' = -HH' \Theta^{-1} + \text{Ga} (1 - \Theta^{-1}) + \frac{4}{3} (\Theta^m H')' + \\ + \frac{2}{3} \Theta^m F' - \frac{4}{3} m \Theta^{m-1} \Theta' F,$$

где  $\text{Ec}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $\text{Ga}$  — числа Экмана, Прандтля, Галилея, определяемые как

$$\text{Pr} = \frac{\rho_0 v_0 c_p}{\lambda_0}, \quad \text{Ec} = \frac{v_0}{\omega h^2}, \quad \text{Ga} = \frac{gh^3}{v_0^2}.$$

Уравнения (4), (5) являются взаимосвязанными, а (6) служит для определения давления. При выводе (6) экспонента в (16) с учетом (2) разложена в ряд с сохранением только линейных членов.

Для сравнения приведем аналогичную систему для несжимаемой жидкости, когда коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры:

$$(7) \quad H' = -2F, \\ F'' = \Theta^{-m} (F^2 - \text{Ec}^{-2} G^2 + HF' - a) - m\Theta^{-1} \Theta' F';$$

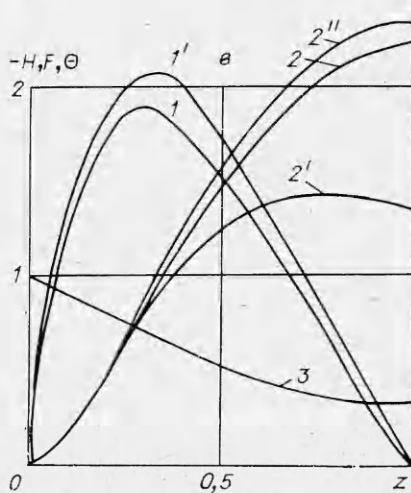
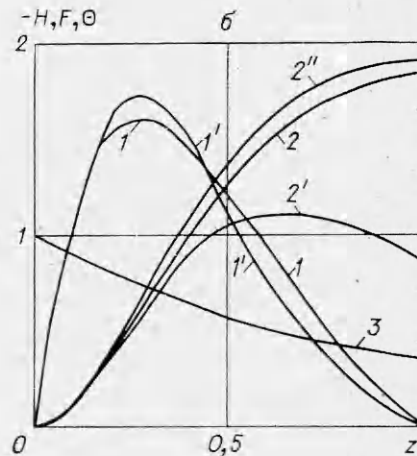
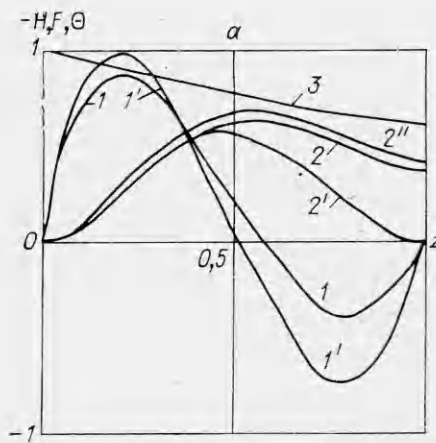
$$(8) \quad G'' = \Theta^{-m} (2FG + HG') - m\Theta^{-1} \Theta' G', \quad \Theta'' = \text{Pr} H \Theta^{-n} \Theta' - n\Theta^{-1} \Theta'^2;$$

$$(9) \quad p' = -HH' + \text{Ga} (1 - \Theta^{-1}) + 2\Theta^m F' + 2(\Theta^m H)'$$

Граничные условия для системы (4):

$$F(0) = F(1) = 0, \quad G(0) = 1, \quad G(1) = 0, \quad H(0) = 0,$$

кроме того, есть еще дополнительное условие на  $H(1)$ , связанное с заданной скоростью вдува:  $H(1) = -h v_{\text{вх}} / v_0$ . Этому условию можно удовлетворить, подбирая, например, в процессе решения параметр  $a$  при фиксированном значении числа Экмана. Можно наоборот, задавая  $a$ , находить из решения системы величину скорости вдува.



Краевые условия для температуры задавались в виде

$$(10) \quad T = T_0 \text{ при } z = 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = (-\rho v_z c_p + \alpha)(T - T_\infty) \text{ при } z = h,$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплообмена с окружающей средой; во втором условии принята во внимание специфика задач со вдувом и в явном виде выделен член  $\rho v_z c_p$ , учитывающий расход тепла на нагрев вдуваемого газа, исходная температура которого  $T_\infty$ . Проходя через верхнюю стенку канала,

газ нагревается и поступает в канал с температурой, равной температуре этой стенки. Подставляя (1) в (10), окончательно находим

$$(11) \quad \Theta|_{z=0} = 1, \quad \Theta' - (\text{Pr}\Theta^{-(n+1)}H(1) - \text{Bi}\Theta^{-n})(\Theta - \Theta_\infty)|_{z=1} = 0, \\ \text{Bi} = h\alpha/\lambda_0.$$

Полученная граничная задача решалась комбинацией методов встречной пристрелки и продолжения решения по параметру. Результаты расчетов показаны на рисунке.

Заметим, что для системы (7)—(9) граничное условие для  $\Theta$  имеет вид

$$(12) \quad \Theta' - \Theta^{-n}(\text{Pr}H(1) - \text{Bi})(\Theta - \Theta_\infty)|_{z=1} = 0.$$

Расчеты проводились при  $\text{Ec} = 0,1$ ,  $\text{Pr} = 0,7$ ,  $\text{Bi} = 1,0$ ,  $m = n = 1/2$  для  $a = -18,8; 0; 5$  (рисунок,  $a - v$  соответственно, где кривые 1, 1' —  $F$ , 2, 2', 2'' —  $H$ , 3 —  $\Theta$ ; 1, 2 построены при  $\Theta_\infty = 1$ ; 1', 2' при  $\Theta_\infty = 0,3$ ; 2'' получена из решения системы (7), (8) при  $\Theta_\infty = 0,3$ ).

Вариант  $\Theta_\infty = 1$  соответствует решению задачи для несжимаемой жидкости, поскольку в этом случае  $\Theta = 1$  по всей высоте канала и, следовательно, распределение температуры не оказывает влияния на поле скорости. Из рисунка видно, что сжимаемость газа, вызванная неоднородностью поля температуры, оказывает существенное влияние на поле скорости. При  $\Theta_\infty < 1$  осевая скорость  $H(z)$  уменьшается по всей ширине канала и становится немонотонной даже при  $a > 0$ , в то время как радиальная скорость  $F(z)$  уменьшается около нижнего диска и возрастает у верхнего. Необходимо подчеркнуть, что отклонение решения в приближе-

нии несжимаемой жидкости от решения, учитывающего сжимаемость газа, возрастает, если учитывать зависимость  $\lambda$  и  $\mu$  от температуры при сохранении постоянства плотности  $\rho$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dijkstra D., Van Heijst G. J. F. The flow between two finite rotating disks enclosed a cylinder // J. Fluid Mech. — 1983. — V. 128. — P. 123.
2. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. — М.: Наука, 1984.

Поступила 6/II 1986 г.

УДК 532.526

### ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. Б. Лебедев, В. М. Фомичев

(Москва)

В настоящее время имеется достаточно большое количество работ (см., например, [1, 2]) как теоретического, так и экспериментального характера, в которых рассматривается влияние охлаждения или нагрева поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход к турбулентности.

Исследования сводились к выяснению влияния температурного фактора, т. е. отношения температуры поверхности к температуре на внешней границе пограничного слоя при неизменных их величинах. Хорошо известно, что для газа нагревание поверхности приводит к уменьшению, а охлаждение — к увеличению критических чисел Рейнольдса. Последнее свойство может быть использовано для искусственной ламинаризации пограничного слоя.

Однако в практических приложениях часто встречаются условия, в которых существуют значительные градиенты температуры вдоль поверхности. Приближенный теоретический анализ показывает, что такие градиенты температуры существенно влияют на характеристики стационарного пограничного слоя: профили скорости, температуры и т. д. Поэтому надо ожидать, что неравномерность распределения температуры поверхности в значительной мере скажется и на устойчивости течения. Для газа таких исследований не проводилось, за исключением [3], где рассматривалось влияние нагрева передней кромки пластины на устойчивость пограничного слоя.

Ниже показано, что при неизменном суммарном тепловом потоке точка потери устойчивости может смещаться как вверх, так и вниз по течению в зависимости от вида распределения температуры поверхности. Отсюда вытекает исключительно важный с точки зрения проблемы управления пограничным слоем и, в частности, проблемы ламинаризации вывод — путем соответствующего выбора распределения температуры можно получить дополнительное увеличение длины ламинарного обтекания.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается устойчивость плоского дозвукового пограничного слоя при неравномерном распределении температуры поверхности. В качестве математической модели примем систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности, уравнений Навье — Стокса и уравнения энергии в пренебрежении вязкой диссипацией:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right],$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right],$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y.$$

Предполагается, что газ подчиняется уравнению состояния совершенного