Таблица 2

T	L	Q	T	L	Q
1,0	0,0923	0,9079	3,5	0,1119	0,6894
1,5	0,0980	0,8244	4,0	0,1143	0,6714
2,0	0,1025	0,7735	4,5	0,1165	0,6565
2,5	0,1061	0,7378	5,0	0,1185	0,6438
3,0	0,1092	0,7108			

к поверхности земли, т. е. чем больше H, тем меньше расход воды на фильтрацию [5].

Однако наиболее существенное влияние на ширину орошаемой полосы грунта оказывает его капиллярность. Из последнего раздела табл. 1 видно, что в первой серии при изменении параметра $h_к$ от 0,1 до 0,89 L увеличивается в 27,2 раза. Отметим, что при $h_к \approx 0$ и $h_к \approx T - H$ радиус капиллярного растекания воды превышает высоту капиллярного поднятия $h_к$, причем наибольшая разница достигается при значениях $h_к$, близких к $T - H$. Так, в случае $h_к = 0{,}89$ $L = 2{,}7132$ и, следовательно, $L/h_к = 3{,}0$. Таким образом, подтверждается отмеченное в [1, 5] существенное значение горизонтального всасывания, в том числе и для слабокапиллярных почв. Расчеты показали, что к еще большему растеканию приводит увеличение подпора H. Например, из второй серии табл. 1 при $h_к = 0{,}69$ получаем $L/h_к = 3{,}7$. Что касается расхода, то его изменения для приводимых в третьем разделе табл. 1 значений $h_к$ составляют в первой и второй сериях соответственно 37 и 27 %.

Проследим за влиянием глубины залегания сильнопроницаемого слоя при $D = 0{,}3$, $h_к = 0{,}1$, фиксируя величину $T - H - h_к = 0{,}8$. Результаты расчетов приведены в табл. 2. Видно, что влияние мощности слоя на радиус капиллярного растекания воды практически перестает сказываться при $T > 5$. При бóльших T два последующих значения L отличаются друг от друга не более чем на 1,5 %. Несколько бóльшим оказывается влияние T на расход; пренебрежимо малым его можно считать при $T > 7$.

Автор выражает благодарность В. Н. Эмиху за полезные замечания, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Веригин Н. Н.** Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы // ДАН СССР.— 1949.— Т. 66, № 4.
2. **Нумеров С. Н.** Об одном способе решения фильтрационных задач // Изв. АН СССР. ОТН.— 1954.— № 4.
3. **Береславский Э. Н.** К задаче о фильтрации из оросителя ирригационной системы // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 2.
4. **Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.** Математические методы в вопросах орошения.— М.: Наука, 1969.
5. **Ведерников В. В.** Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа.— М.: Госстройиздат, 1939.

г. Ленинград *Поступила 27/IV 1988 г.*

УДК 536.23

А. С. Романов, Т. А. Саникидзе

О КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СЕРОМ ВЕЩЕСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ (СТОКОВ)

В настоящее время в литературе широко обсуждаются различные интенсивные процессы теплопереноса, происходящие при значительных перепадах температур. Исследование таких интенсивных процессов затрудняется из-за необходимости учета переменных теплофизических свойств вещества. В частности, к ним можно отнести лучистый теплоперенос. Основная характеристика вещества — длина пробега излучения, которая существенно зависит от температуры [1].

Лучистый теплоперенос описывается нелинейными интегродифференциальными уравнениями согласно нелокальному характеру взаимодействия излучения с веществом [1, 2]. Во многих важных случаях достаточно ограничиться приближением серого тела [1], считая коэффициент поглощения не зависящим от спектрального состава излучения. При плоской симметрии в безразмерных переменных интегродифференциальное уравнение при наличии тепловых источников (стоков) имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \varkappa^2 k (U - T^4) + Q, \quad U = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I d\mu. \tag{0.1}$$

Здесь $E(T) \geqslant 0$ $(E(0) = 0)$ — удельная внутренняя энергия вещества, являющаяся монотонно растущей функцией температуры; $T(x, t) \geqslant 0$ — температура вещества; $x \in R^1$ — пространственная координата, вдоль которой передается тепло; $t > 0$ — время; $U(x, t) \geqslant 0$ — объемная плотность лучистой энергии; $k = k(T)$ — коэффициент поглощения излучения веществом $(0 < k(T) < \infty$ при $0 < T < \infty$, $k(0) = 0)$; $Q(T)$ — функция тепловых источников (стоков) $(Q(0) = 0)$; $\varkappa^2 = (L/l)^2$; L — характерный размер нагретой излучением области; l — характерная длина пробега излучения; $I(x, t, \mu)$ — интенсивность излучения, определяемая по формуле

$$I = \begin{cases} I_+ = \dfrac{\varkappa^2}{\mu} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} k[T(\xi, t)]\, T^4(\xi, t) \exp\left[-\dfrac{|P(x, \xi)|}{\mu}\right] d\xi, & \mu > 0, \\ I_- = \dfrac{\varkappa^2}{\mu} \displaystyle\int_{\infty}^{x} k[T(\xi, t)]\, T^4(\xi, t) \exp\left[-\dfrac{|P(x, \xi)|}{\mu}\right] d\xi, & \mu < 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

$$P(x, \xi) = \varkappa^2 \int_{x}^{\xi} k[T(\varepsilon, t)]\, d\varepsilon,$$

где $\mu = \cos\theta_*$; θ_* — угол между положительным направлением оси x и произвольно выбранным направлением излучения $(0 \leqslant \theta_* \leqslant \pi)$. Следует отметить, что соотношение (0.2) имеет место, если выполняется условие ограниченности роста температуры при $|x| \to \infty$ [1], обеспечивающее существование несобственных интегралов в определениях (0.2) (например, $T(x, t) < M$, $M = \text{const}$, $0 < M < \infty$).

Предельный переход $\varkappa^2 \to \infty$ в (0.1) означает переход к приближению лучистой теплопроводности. В этом приближении проблема сводится к анализу квазилинейного дифференциального уравнения параболического типа [3], которое оказывается нелинейным, даже если коэффициент поглощения $k(T) = \text{const} > 0$. В [3] было обнаружено, что в результате интенсивного локального тепловыделения тепло может переноситься в виде тепловой волны, фронт которой строго разграничивает области холодного и нагретого вещества. Физически наличие фронтовой поверхности тепловой волны означает ограниченность скорости распространения тепловых возмущений. Влиянию источников (стоков) на распространение тепловых волн посвящено значительное число работ, обсудить которые здесь нет возможности. Отметим лишь [4], которая может служить введением в проблему.

Физическая природа источников и стоков при лучистом теплопереносе может быть различной. Выделение или сток тепла возможны при экзо- и эндотермических химических реакциях и фазовых превращениях в веществе [1, 5, 6]. Учтем также охлаждение вещества за счет объемного высвета. Это явление связано с существованием «окон прозрачности» в холодном веществе, т. е. интервалов частот, для которых длина пробега излучения в холодном веществе велика [1, 7]. При усреднении по частотам коэффициента поглощения существованием «окон прозрачности» пренебрегается. Наряду с этим можно приближенно учесть потери энергии веществом введением соответствующего стока.

В [8] исследовано уравнение (0.1) при $Q = 0$ и получены необходимые условия существования фронтовых поверхностей (основным является условие неограниченности функции $k(T) \to \infty$ при $T \to 0$). Ниже проведен анализ влияния тепловых источников (стоков) $Q \not\equiv 0$ на проблему.

1. Простая волна. Рассмотрим сначала частное решение уравнения (0.1) типа простой волны. Пусть $T = T(\eta)$, $I = I(\mu, \eta)$ $(\eta = x - vt$, $v = \text{const} \neq 0)$. Тогда уравнение (0.1) приводится к виду

$$-v \frac{dE}{dz} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T^4 W_1(|z - \xi|)\, d\xi - T^4 + \frac{Q}{\varkappa^2 k}. \tag{1.1}$$

Здесь $W_n = \int\limits_1^{\infty} \exp(-y\tau)\tau^{-n}\,d\tau$; $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ — интегральная показательная функция [9]; $z = \varkappa^2\int k d\eta$ — оптическая толщина вещества (в целях сокращения записи аргументы в интеграле (1.1) и везде в дальнейшем опущены). Уравнение (1.1) необходимо дополнить граничными условиями при $z = \infty$ или $z = -\infty$. Для определенности положим

$$T = 0,\ I = 0 \text{ при } z = \infty. \tag{1.2}$$

Интегрируя (1.1) с учетом (1.2), получаем уравнение

$$vE = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T^4 \operatorname{sgn}(z-\xi)\, W_2(|z-\xi|)\,d\xi + \int\limits_z^{\infty} \frac{Q}{\varkappa^2 k}\,d\xi. \tag{1.3}$$

Интегрируя (1.3) еще дважды, получим соотношение

$$v\int\limits_z^{\infty}\int\limits_{\xi}^{\infty} E\,d\varepsilon\,d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T^4 \operatorname{sgn}(z-\xi)\, W_4(|z-\xi|)\,d\xi + \tag{1.4}$$
$$+\frac{1}{3}\int\limits_z^{\infty} T^4\,d\xi + \int\limits_z^{\infty}\int\limits_{\xi}^{\infty}\int\limits_{\zeta}^{\infty} \frac{Q}{\varkappa^2 k}\,d\varepsilon\,d\zeta\,d\xi.$$

С помощью известных неравенств между интегральными показательными функциями [9] можно записать $W_4(|z-\xi|) = \alpha(|z-\xi|)W_2(|z-\xi|)$ $\alpha(|z-\xi|) \in [1/3,\ 1]$. С учетом этого соотношения, применяя теорему о среднем и используя (1.3), уравнение (1.4) запишем как

$$v\int\limits_z^{\infty}\int\limits_{\xi}^{\infty} E\,d\varepsilon\,d\xi = \delta\left(vE - \int\limits_z^{\infty}\frac{Q}{\varkappa^2 k}\,d\xi\right) - \frac{1}{3}\int\limits_z^{\infty} T^4\,d\xi + \tag{1.5}$$
$$+\int\limits_z^{\infty}\int\limits_{\xi}^{\infty}\int\limits_{\zeta}^{\infty} \frac{Q}{\varkappa^2 k}\,d\varepsilon\,d\zeta\,d\xi, \quad \delta(z) \in [1/3, 1].$$

Заметим, что уравнение (1.5) удобно для асимптотического анализа решения при $z \to \infty$, так как содержит только интегрирование в пределах луча $\xi \in [z,\ \infty]$.

Для нас представляют интерес фронтовые решения уравнения (0.1) или (1.5). Для таких решений характерно наличие в плоскости x, t границы раздела (фронта решения), строго разграничивающей область $\Omega^+ = \{(x,\ t) : T(x,\ t) > 0\}$ и фон $\Omega^0 = \{(x,\ t) : T(x,\ t) \equiv 0\}$ [8]. Решение уравнения (1.5) в полном объеме можно, по-видимому, получить только численными методами.

Из физических соображений следует, что в точках кривой $x = x_f(t)$ (фронта волны) должны выполняться необходимые условия непрерывности температуры T, объемной плотности лучистой энергии U и интенсивности I.

Рассмотрим решение $T(\eta)$ уравнения (1.5) вблизи фронта $\eta = \eta_f(t)$, предполагая, что фронт существует. Положим для определенности $T(\eta) > 0$ при $\eta > \eta_f$ и $T(\eta) \equiv 0$ при $\eta \geqslant \eta_f$; пусть также $E = T$, $k = T^{-\gamma}$, $Q = qT^{\beta}$, где γ, $\beta > 0$, q — произвольные постоянные, причем из физических соображений вытекает, что $\gamma < 4$ [1]. (Здесь уместно отметить, что для явления объемного высвета сток можно считать пропорциональным T^{β}, $\beta \geqslant 1$. Если «окна прозрачности» соответствуют рэлей-джинсовской области частот для характерной температуры нагрева, то $\beta \approx 1$. Именно такая ситуация реализуется при тепловом взрыве в воздухе [1]. Возможны и другие ситуации [10].)

Будем считать, что асимптотическое представление $T(\eta)$ при $\eta \to \eta_f - 0$ определено выражением [4]

$$T(\eta) \sim \theta(\eta_f - \eta)^{\omega}, \ \omega, \theta = \mathrm{const} > 0. \tag{1.6}$$

Возвращаясь в уравнении (1.5) к физической переменной η и подставляя туда выражение (1.6), получим алгебраическое уравнение

$$va_1(\eta_f - \eta)^{\omega(1-2\gamma)+2} = v\delta_*\theta(\eta_f - \eta)^{\omega} + qa_2(\eta_f - \eta)^{\omega\beta+1} + a_3(\eta_f - \eta)^{\omega(4-\gamma)+1} + qa_4(\eta_f - \eta)^{\omega(\beta-2\gamma)+3}, \tag{1.7}$$

где $\delta_* = \delta(\infty)$; $a_1 = \dfrac{\varkappa^4\theta^{1-2\gamma}}{[\omega(1-\gamma)+1][\omega(1-2\gamma)+2]}$; $a_2 = -\dfrac{\delta_*\theta^{\beta}}{\omega\beta+1}$;

$$a_3 = \frac{\varkappa^2\theta^{4-\gamma}}{3[\omega(4-\gamma)+1]}, \ a_4 = \frac{\varkappa^4\theta^{\beta-2\gamma}}{(\omega_\beta+1)[\omega(\beta-\gamma)+2][\omega(\beta-2\gamma)+3]}.$$

Характер асимптотического решения $T(\eta)$ уравнения (1.5) вблизи фронта определяется условиями разрешимости уравнения (1.7); для этого необходимо, чтобы по крайней мере два показателя степени в (1.7) совпали, а оставшиеся были строго больше этих двух. Анализируя различные варианты соотношений между показателями степени при $(\eta_f - \eta)$ в отдельных слагаемых (1.7), определим возможные значения ω, θ и, как следствие, получим соотношения на показатели степени γ, β, которые определяют структуру асимптотического представления решения в окрестности фронта. Тем самым оказывается возможным классифицировать фронтовые решения.

Пусть $\beta \geqslant 1$. В этом случае в асимптотическом представлении решения $\omega = \omega_1 \equiv 1/\gamma$, $\theta = \theta_1 \equiv (\varkappa^2\gamma/\sqrt{\delta_*})^{1/\gamma}$. Из уравнения (1.1) можно получить асимптотическое представление для объемной плотности лучистой энергии $U \sim -(v/\varkappa^2 k)dT/d\eta$. Условие $U \geqslant 0$ требует $v > 0$, что физически означает существование только волны разогрева; при этом асимптотическое представление (1.6) не зависит от действия тепловых источников $q > 0$ или стоков $q < 0$. (Аналогичные результаты получены в [8] при $q \equiv 0$.) Следовательно, если $\beta \geqslant 1$, то влияние источников (стоков) на образование фронта тепловой волны несущественно. Такие тепловые источники (стоки) будем называть «слабыми».

Положим теперь $0 < \beta < 1$. Анализ уравнения (1.7) показывает, что в таком случае источники (стоки) могут оказывать определяющее влияние на образование фронтовой поверхности. Будем называть источники (стоки) «сильными» при $0 < \beta < 1$. Наряду с асимптотикой, определяемой показателем $\omega = \omega_1$, появляется другая возможность: $\omega = \omega_2 \equiv 1/(1-\beta)$. Асимптотическое представление (1.6) с $\omega = \omega_1$ при $0 < \beta < 1$ зависит от суммы $\gamma + \beta$; при этом выражение для коэффициента θ в (1.6) имеет вид

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, & \gamma + \beta > 1, \\ \theta_2, & \gamma + \beta < 1 \end{cases}$$

$(\theta_2 \equiv \{\varkappa^2\gamma/[\sqrt{\delta_*}(\gamma+\beta)]\}^{1/\gamma})$. Условие $U \geqslant 0$ требует $q < 0$, $v > 0$.

Другая возможность построения асимптотического представления (1.6) с $\omega = \omega_2$ может реализоваться для всех значений $0 < \gamma < 4$. Тогда множитель θ определяется из (1.7): $\theta = \theta_3 \equiv [q(1-\beta)/v]^{1/(1-\beta)}$. Из этого выражения вытекает, что $\mathrm{sign}\, v = \mathrm{sign}\, q$, т. е. рассматриваемое асимптотическое представление возможно при действии как источников ($q > 0$, $v > 0$), так и стоков ($q < 0$, $v < 0$). Следовательно, возможны волна разогрева ($v > 0$) и волна охлаждения ($v < 0$).

Интересно отметить, что для сильных источников (стоков) эффект появления фронта имеет место даже для $\gamma = 0$, т. е. при отсутствии вырождения коэффициента поглощения при $T \to 0$: $0 < k(0) < \infty$.

Для большей наглядности возможные режимы локализации тепловых возмущений с соответствующими значениями ω и θ в асимптотическом

v		$\gamma+\beta<1$		$\gamma+\beta=1$		$\gamma+\beta>1$			
		$\beta<1$		$\beta<1$		$\beta<1$		$\beta\geqslant 1$	
		$q>0$	$q<0$	$q>0$	$q<0$	$q>0$	$q<0$	$q>0$	$q<0$
>0	ω	ω_2	ω_1	ω_2	—	ω_2	ω_1	ω_1	ω_1
	θ	θ_3	θ_2	θ_3	—	θ_3	θ_1	θ_1	θ_1
<0	ω	—	ω_2	—	ω_2	—	ω_2	—	—
	θ	—	θ_3	—	θ_3	—	θ_3	—	—

представлении решения $T(\eta)$ (1.6) в зависимости от параметров γ, β приведены в таблице, для полноты в ней учтен также случай $\gamma+\beta=1$.

2. Пример аналитически замкнутого решения. Выше отмечалось, что исследование уравнения (1.1) или (1.5) аналитически наталкивается на значительные трудности. Поэтому для подтверждения полученных выводов приведем пример, когда решение уравнения (0.1) можно получить аналитически в замкнутом виде. Согласно [11], положим $E = T^4$. Примем также $Q = \varkappa^2 k(aT^4 + bdT^4/dz)$ (a, b — произвольные постоянные). Тогда в уравнении (0.1) переменные разделяются. В результате получим, что температура $T(\eta)$ определяется из квадратуры

$$\eta = \frac{4}{\varkappa^2\nu}\int\limits_0^T \frac{dT}{kT} + \eta_f,\quad \eta_f = \mathrm{const},\quad |\eta_f| < \infty,$$

а интенсивность I находится по формуле $I = T^4/(\nu\mu + 1)$, где постоянная разделения переменных $\nu \in (-1,\ 0)$ определяет скорость тепловой волны

$$v = \frac{1}{\nu}\left[\left(1 - \frac{1}{2\nu}\ln\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) - (a + \nu b)\right].$$

Знак функции $Q(T)$ совпадает со знаком суммы $c = a + \nu b$. При $c > 0$ возможна только волна нагрева ($v > 0$). При $c < 0$ возможны как волна нагрева ($v > 0$), так и волна охлаждения ($v < 0$), что подтверждает полученные выше выводы (см. таблицу).

3. Асимптотическое представление для температуры вблизи фронта тепловой волны в общем случае. Полученные выше условия существования фронта для простой волны могут быть сформулированы как необходимые и в общем случае лучистого теплопереноса в сером теле.

Пусть существует поверхность $x = x_f(t)$, $\dot{x}_f \equiv dx_f/dt \not\equiv 0$, являющаяся фронтом, т. е. $T(x, t) > 0$, $x < x_f(t)$ и $T(x, t) \equiv 0$, $x \geqslant x_f(t)$. Следуя [12], продифференцируем условие $E(x_f(t),\ t) = 0$ по времени $\partial E/\partial t + \dot{x}_f \partial E/\partial x = 0$, $x = x_f(t)$. Предположим, что это равенство выполняется асимптотически при $x \to x_f(t) - 0$, и, заменив производную $\partial E/\partial t$ в (0.1), имеем соотношение

$$-\dot{x}_f \partial E/\partial t = \varkappa^2 k(U - T^4) + Q,\ x \to x_f - 0. \tag{3.1}$$

Из сравнения (3.1) и (1.1) видно, что они совпадают, если положить $v = \dot{x}_f$, $\eta = x - x_f$. Тем самым полученные выше результаты относительно существования фронта у простой волны полностью переносятся на случай произвольно движущейся фронтовой поверхности $x = x_f(t)$, $\dot{x}_f \neq 0$.

Таким образом, наличие тепловых источников (стоков) может оказывать существенное влияние на образование и распространение фронтов тепловых возмущений при лучистом теплопереносе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
2. **Унзольд А.** Физика звездных атмосфер.— М.: ИЛ, 1949.
3. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // К 70-летию акад. А. Ф. Иоффе.— М.: Изд-во АН СССР, 1950.
4. **Павлов К. Б., Романов А. С.** Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 6.
5. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
6. **Лейбензон А. С.** Распространение волны горения в среде с нелинейной теплопроводностью // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 4.
7. **Андрианкин Э. И.** Тепловая волна, излучающая энергию с фронта // ЖТФ.— 1959.— Т. 29, № 11.
8. **Романов А. С.** О конечной скорости лучистого теплопереноса // ПМТФ.— 1987.— № 1.
9. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. А. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
10. **Киселев Ю. Н.** Излучательные свойства сильной ударной волны в неопе // ПМТФ.— 1983.— № 1.
11. **Думкина Г. В., Козманов М. Ю.** Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // ЖВММФ.— 1979.— № 4.
12. **Самарский А. А., Соболь И. М.** Примеры численного расчета температурных волн // ЖВММФ.— 1963.— Т. 3, № 4.

г. Москва *Поступила 18/V 1987 г., в окончательном варианте — 11/V 1988 г.*

УДК 536.24

А. М. Бубенчиков, С. Н. Харламов

ТРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА ЗА УСКОРЯЮЩИМСЯ ПОРШНЕМ

Рассматриваются неустановившееся турбулентное движение газа и теплообмен на отрезке круглой цилиндрической трубы, ограниченной с одного конца неподвижной стенкой, с другого — поршнем, способным перемещаться. В начальный момент времени давление, плотность и температура газов в области между стенкой и поршнем существенно превосходят параметры состояния в свободной части канала. Стенка трубы теплопроводящая. Под действием давления сжатых газов поршень, имеющий конечную массу, приобретает значительное ускорение и движется к свободному концу трубы. В плане определения усредненных по сечению канала характеристик потока и скорости движения поршня такая постановка известна как классическая задача Лагранжа [1].

Цель настоящей работы — исследование турбулентной структуры течения в рассматриваемых условиях и определение параметров динамического и теплового воздействия потока на стенку канала.

Предполагаем, что существует осевая симметрия течения. Газ совершенный, аксиальный перенос тепла и импульса посредством диффузии отсутствует. Течение газа в данном случае описывается уравнениями Рейнольдса в приближении «узкого канала» [2], которые совместно с уравнениями энергии для газа и теплопроводности для стенки имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho u_r r)}{\partial r} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_\Sigma\frac{\partial u_x}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \tag{2}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x\frac{\partial T}{\partial x} + u_r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{dp}{dt} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_\Sigma\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu_\Sigma\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2, \tag{3}$$

$$p = \rho R_\text{г} T;$$

$$\rho_\text{с} c_\text{с}\frac{\partial T_\text{с}}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_\text{с}\frac{\partial T_\text{с}}{\partial r}\right), \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u_x \partial p}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\mu_\Sigma = \mu + \mu_t, \quad \lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_t.$$