

Ш. А. Ершин, Л. П. Ярин
(Алма-Ата)

К РАСЧЕТУ ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Исследованию горения газа в турбулентном пограничном слое посвящен ряд работ, относящихся в основном к течениям газа с малыми дозвуковыми скоростями [1—3].

Есть основание полагать, что реализация горения неперемешанных газов в высокоскоростных до- и сверхзвуковых потоках будет обладать преимуществами по сравнению с детонационным способом сжигания однородной смеси [4]. Ниже сделана попытка разработки приближенного газодинамического расчета горения неперемешанных газов в плоскопараллельном пограничном слое высокоскоростного потока методами теории турбулентных струйных течений сжимаемого газа.

Пусть в пространство, заполненное окислителем, вытекает равномерный турбулентный поток реагирующего газа (рис. 1). Будем считать заданными параметры $T_{+\infty}$, $T_{-\infty}$, $M_{+\infty}$, $C_{+\infty}$, $C_{-\infty}$, $p_{+\infty}$, $p_{-\infty}$ ($p_{+\infty} = p_{-\infty}$). При наличии постоянно действующей поджигающей точки O в пограничном слое

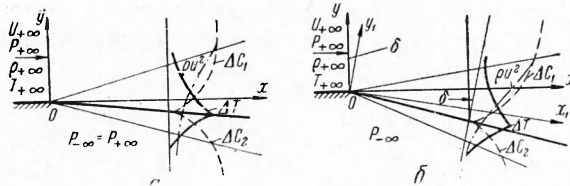


Рис. 1. Схема пограничного слоя при наличии фронта пламени:
а — $p_{+\infty} = p_{-\infty}$; б — $p_{+\infty} \neq p_{-\infty}$.

установится фронт пламени, положение которого характеризуется некоторой обобщенной координатой φ_r .

Будем полагать, что скорость реакции существенно превышает скорость диффузии. В этом случае зону реакции — фронт пламени — можно

представить в виде математической поверхности, на которой концентрации горючего и окислителя равны нулю, а диффузионные потоки реагентов находятся в стехиометрическом соотношении.

Для изобарического течения сжимаемого газа система уравнений турбулентного пограничного слоя может быть записана в виде [5, 6]:

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right); & U \frac{\partial \Delta C}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta C}{\partial y} &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(D_t \frac{\partial \Delta C}{\partial y} \right); & &
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$U \frac{\partial \Delta I}{\partial x} + V \frac{\partial \Delta I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a_z \frac{\partial \Delta I}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{p}{\rho} = RT,$$

где

$$U = \sqrt{\rho} u, \quad V = \sqrt{\rho} v, \quad \Delta I = \sqrt{\rho} \Delta i \approx \sqrt{\rho} C_p \Delta T, \quad \Delta C = \sqrt{\rho} \Delta C.$$

Так как фронт пламени представляет собой поверхность слабого разрыва, то решение системы (1) следует проводить отдельно для области горючего и окислителя с последующим стыкованием полученных решений на фронте пламени.

При горении углеводородных топлив, характеризующихся большими значениями стехиометрических отношений, наличие фронта пламени практически не оказывает влияния на характер изменения динамического напора в поперечных сечениях затопленного факела [7, 8]¹. Вследствие этого динамическая задача может быть решена для всей области течения, без дополнительных условий на фронте пламени.

С учетом изложенного краевые условия для рассматриваемой задачи можно записать в следующем виде:

для динамической задачи

$$x > 0, y \rightarrow +\infty, U \rightarrow U_{+\infty}; \quad y \rightarrow -\infty, U \rightarrow 0;$$

для тепловой и диффузионной задач:

область горючего + продуктов сгорания ($x > 0$)

$$\left. \begin{aligned} C_p \sqrt{\rho} (T^* - T_r^*) &\rightarrow C_p \sqrt{\rho_{+\infty}} (T_{+\infty}^* - T_r^*), \\ \sqrt{\rho} (C - C_r)_1 &\rightarrow \sqrt{\rho_{+\infty}} (C_{+\infty} - C_r)_1 \end{aligned} \right\} \text{при } y \rightarrow +\infty;$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\rho} C_p (T^* - T_r^*) &= 0, \\ \sqrt{\rho} (C - C_r)_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} y = y_r, \\ x = x_r; \end{cases}$$

область окислителя + продуктов сгорания ($x > 0$)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\rho} C_p (T^* - T_{-\infty}^*) &= \sqrt{\rho_r} C_p (T_r^* - T_{-\infty}^*), \\ \sqrt{\rho} (C - C_{-\infty})_3 &= \sqrt{\rho_r} (C_r - C_{-\infty})_3 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{cases} y = y_r, \\ x = x_r; \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\rho} C_p (T^* - T_{-\infty}^*) &\rightarrow 0, \\ \sqrt{\rho} (C - C_{-\infty})_3 &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \text{при } y \rightarrow -\infty.$$

Полагая

$$\frac{U}{U_{+\infty}} = F'(\varphi), \quad \frac{\sqrt{\rho} (T^* - T_r^*)}{\sqrt{\rho_{+\infty}} (T_{+\infty}^* - T_r^*)} = \theta_+(\varphi), \quad \frac{\sqrt{\rho} (C - C_r)_1}{\sqrt{\rho_{+\infty}} (C_{+\infty} - C_r)_1} = \pi_+(\varphi),$$

$$\frac{\sqrt{\rho} (C - C_{-\infty})_3}{\sqrt{\rho_r} (C_r - C_{-\infty})_3} = \pi_-(\varphi), \quad \frac{\sqrt{\rho} (T^* - T_{-\infty}^*)}{\sqrt{\rho_r} (T_r^* - T_{-\infty}^*)} = \theta_-(\varphi)$$

$$\left(\varphi = \varphi^0 + \varphi_0, \quad \varphi^0 = \frac{y}{ax}, \quad \varphi_0 = \text{const} \right)$$

¹) Указанное допущение справедливо лишь в том случае, когда фронт пламени находится в области малых абсолютных значений ρu^2 (большие значения стехиометрического комплекса $\beta_1 = \Omega \frac{C_{+\infty}}{C_{-\infty}}$).

и считая, что

$$\nu_t = k_u U_{+\infty} x, \quad a_t = k_r U_{+\infty} x, \quad D_t = k_c U_{+\infty} x,$$

получим из (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F'''(\varphi) + 2F(\varphi)F''(\varphi) &= 0, \\ \theta''(\varphi) + 2\sigma_r \theta'(\varphi)F(\varphi) &= 0, \\ \pi''(\varphi) + 2\sigma_c \pi'(\varphi)F(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

со следующими граничными условиями:

для динамической задачи

$$y \rightarrow +\infty, \quad F' \varphi \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow \infty, \quad F'(\varphi) \rightarrow 0;$$

для тепловой и диффузионной задач:

область горючего и продуктов сгорания

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow +\infty, \quad \theta_+(\varphi) &\rightarrow 1, \quad \pi_+(\varphi) \rightarrow 1; \\ \varphi = \varphi_r, \quad \theta_+(\varphi) &= 0, \quad \pi_+(\varphi) = 0; \end{aligned}$$

область окислителя + продуктов сгорания

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_r, \quad \theta_-(\varphi) &= 1, \quad \pi_-(\varphi) = 1; \\ \varphi \rightarrow -\infty, \quad \theta_-(\varphi) &\rightarrow 0, \quad \pi_-(\varphi) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что турбулентное число Льюиса равно единице ($\sigma_r = \sigma_c = \sigma$).

Следуя методу итерации Гертлера, запишем решение системы (2) в виде:

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= a_1 + b_1 \Phi(\varphi), \quad \theta(\varphi) = \pi(\varphi) = a_2 + b_2 \Phi(\varphi \sqrt{\sigma}), \\ \left(a_i, b_i - \text{const}; \quad \Phi(z) &= \frac{2}{V\pi} \int_0^z e^{-t^2} dt \right). \end{aligned}$$

Определяя a_i и b_i из граничных условий, найдем:

$$F'(\varphi) = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\varphi)], \quad (3)$$

$$\theta_+(\varphi) = 1 - \frac{1 - \Phi(\varphi \sqrt{\sigma})}{1 - \Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma})}, \quad \theta_-(\varphi) = \frac{1 + \Phi(\varphi \sqrt{\sigma})}{1 + \Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma})}.$$

Используя эти выражения, легко получить зависимости, описывающие распределение скорости, температуры торможения и концентрации в поперечных сечениях пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_{+\infty}} &= \frac{\chi_\infty}{2} [1 + \Phi(\varphi)] \quad \text{или} \quad \frac{M}{M_{+\infty}} = \frac{1}{2} [1 + \Phi(\varphi)] \\ \left(\chi_\infty &= \sqrt{\frac{\rho_{+\infty}}{\rho}} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

для области горючего + продуктов сгорания

$$\frac{T^* - T_r^*}{T_{+\infty}^* - T_r^*} = \chi_\infty \left[1 - \frac{1 - \Phi(\varphi \sqrt{\sigma})}{1 - \Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma})} \right], \quad (5)$$

$$\left(\frac{C - C_r}{C_{+\infty} - C_r} \right)_1 = \chi_\infty \left[1 - \frac{1 - \Phi(\varphi \sqrt{V\sigma})}{1 - \Phi(\varphi_r \sqrt{V\sigma})} \right], \quad (6)$$

$$\left(\frac{G - C_{+\infty}}{C_r - C_{+\infty}} \right)_3 = 1 - \chi_\infty \left[1 - \frac{1 - \Phi(\varphi \sqrt{V\sigma})}{1 - \Phi(\varphi_r \sqrt{V\sigma})} \right], \quad (7)$$

для области окислителя + продуктов сгорания

$$\frac{T^* - T_{+\infty}^*}{T_r^* - T_{-\infty}^*} = \chi_\infty \left[\frac{1 + \Phi(\varphi \sqrt{V\sigma})}{1 + \Phi(\varphi_r \sqrt{V\sigma})} \right], \quad (8)$$

$$\left(\frac{C - C_{-\infty}}{C_r - C_{-\infty}} \right)_3 = \chi_\infty \left[\frac{1 + \Phi(\varphi \sqrt{V\sigma})}{1 + \Phi(\varphi_r \sqrt{V\sigma})} \right], \quad (9)$$

$$\left(\frac{C - C_r}{C_{-\infty} - C_r} \right)_2 = 1 - \chi_\infty \left[\frac{1 + \Phi(\varphi \sqrt{V\sigma})}{1 + \Phi(\varphi_r \sqrt{V\sigma})} \right]. \quad (10)$$

Из выражений (5) — (10) видно, что для расчета профилей скорости, термодинамической температуры, температуры торможения и концентрации необходимо знать местоположение фронта пламени φ_r и изменение плотности в поперечных сечениях пограничного слоя. Представим уравнение (5) в следующем виде:

$$\frac{T\alpha - T_r\alpha_r}{T_{+\infty}\alpha_{+\infty} - T_r\alpha_r} = \theta_+(\varphi)\chi_\infty. \quad (11)$$

Здесь

$$\alpha_i = 1 + \frac{k-1}{2} M_i^2, \quad M^2 = M_{+\infty}^2 [F'(\varphi)]^2.$$

Деля числитель и знаменатель левой части уравнения (11) на $T_{+\infty}$ и используя уравнение состояния, приведем выражение (11) к виду:

$$\chi_\infty^2 - \theta(\varphi)\chi_\infty - \frac{\alpha_{+\infty} - \omega\alpha_r}{\alpha} - \omega\frac{\alpha_r}{\alpha} = 0,$$

здесь $\omega = \frac{\rho_{+\infty}}{\rho_r} = \frac{T_r}{T_{+\infty}}$.

Решая последнее уравнение относительно χ_∞ , получим

$$\chi_r = \frac{1}{2} \left\{ \theta_1(\varphi) \frac{\alpha_{+\infty} - \omega\alpha_r}{\alpha} + \left[\theta_1^2(\varphi) \left(\frac{\alpha_{+\infty} - \omega\alpha_r}{\alpha} \right)^2 + 4\omega\frac{\alpha_r}{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (12)$$

Аналогичным путем преобразуем уравнение (8):

$$\chi_r = \frac{1}{2} \left\{ \theta_1(\varphi) \frac{\alpha_{+\infty} - \omega\alpha_r}{\alpha} + \left[\theta_1^2(\varphi) \left(\frac{\alpha_{+\infty} - \omega\alpha_r}{\alpha} \right)^2 + 4\omega\frac{\alpha_r}{\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (13)$$

Для определения местоположения фронта пламени используем условие:

$$\left[- \frac{D_2 \left(\frac{dC}{d\varphi} \right)_2}{D_1 \left(\frac{dC}{d\varphi} \right)_1} \right]_{\varphi = \varphi_r} = \Omega. \quad (14)$$

Дифференцируя (6), (10), получим:

$$\left(\frac{dC}{d\varphi}\right)_1 \Big|_{\varphi=\varphi_r} = \sqrt{\omega} \theta'_+(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r} C_{+\infty}, \quad (15)$$

$$\left(\frac{dC}{d\varphi}\right)_2 \Big|_{\varphi=\varphi_r} = - \left[\frac{d}{d\varphi} (\chi_r) \Big|_{\varphi=\varphi_r} + \theta' - (\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r} \right] C_{-\infty}. \quad (16)$$

Здесь $C_r = 0$ в силу принятого ранее допущения о бесконечно большой скорости реакции.

Из выражения (13) найдем:

$$\frac{d}{d\varphi} (\chi_r) \Big|_{\varphi=\varphi_r} = \theta'_-(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r} \frac{\alpha_r \omega_1 - 1}{\alpha_r \omega_1 + 1} - \frac{\omega}{\alpha_r \omega_1 + 1} \frac{d\alpha}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_r}.$$

Подставляя последнее выражение в (16) и учитывая, что

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 2(\alpha_r - 1) \frac{F''(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r}}{F'(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r}},$$

получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{dC}{d\varphi}\right)_2 \Big|_{\varphi=\varphi_r} = & - \frac{2\omega}{\alpha_r \omega_1 + 1} \left[\theta'_-(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r} \alpha_r - \right. \\ & \left. - (\alpha - 1) \frac{F''(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r}}{F'(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_r}} \right] C_{-\infty}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда, используя (14), (15), (17), нетрудно получить уравнение, связывающее координату фронта пламени φ_r с заданными параметрами:

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_1}{(\alpha_r \omega_1 + 1) \sqrt{\omega}} [1 - \Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma})] \left\{ \frac{\alpha_r}{1 + \Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma})} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_r - 1}{1 + \Phi(\varphi_r)} e^{-\varphi_r^2(1-\sigma)} \right\} = \Omega \frac{C_{+\infty}}{C_{-\infty}}. \end{aligned} \quad (18)$$

При малых скоростях ($M \sim 0$, $\alpha_r \sim 1$) полученное уравнение существенно упрощается и выражение для определения местоположения фронта пламени примет вид

$$\Phi(\varphi_r \sqrt{\sigma}) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \left(\beta = \Omega \frac{C_{+\infty} \sqrt{\omega}}{C_{-\infty} (\omega_1 + 1)} \right). \quad (19)$$

Известно, что в свободных струйных течениях значение турбулентного числа Прандтля близко к единице ($\sigma \sim 0,75-0,8$) [9]. Поэтому для качественного анализа влияния сжимаемости на структуру турбулентного факела ограничимся рассмотрением частного случая $\sigma = 1$. При этом выражение (18) принимает вид

$$\frac{2\omega_1}{(\alpha_r \omega_1 + 1) \sqrt{\omega}} \frac{1 - \Phi(\varphi_r)}{1 + \Phi(\varphi_r)} = \Omega \frac{C_{+\infty}}{C_{-\infty}} = \beta_1, \quad (20)$$

где

$$\alpha_r = 1 + \frac{k-1}{8} M_{+\infty}^2 [1 + \Phi(\varphi_r)]^2.$$

Рассмотрим влияние числа $M_{+\infty}$ на аэродинамическую структуру факела.

На рис. 2 приведена зависимость $\bar{\varphi}_r = f(\beta_1)$, рассчитанная для различных значений числа $M_{+\infty}$. Из графика видно, что увеличение скорости набегающего потока приводит к смещению фронта пламени к «внешней» границе пограничного слоя. Аналогичное смещение фронта пламени наблюдается при горении обычных дозвуковых факелов в случае истечения холодного газа в горячую среду. Таким образом, увеличение числа $M_{+\infty}$ приводит к такому же результату, что и предварительное охлаждение газа [10].

На рис. 3 показаны профили термодинамической температуры, температуры торможения, скорости и числа M в пограничном слое при наличии фронта пламени. Из приведенного графика видно, что изменение числа $M_{+\infty}$ приводит к перестройке температурных и скоростных полей. Интересно отметить, что значительное изменение числа $M_{+\infty}$ не вызывает существенной перестройки профиля скорости.

Своеобразный характер изменения температуры торможения в пограничном слое является следствием того, что соотношение между химической энергией, выделяющейся в процессе горения, и кинетической энергией набегающего потока непрерывно уменьшается с увеличением числа $M_{+\infty}$.

Очевидно, что при достаточно больших числах $M_{+\infty}$ доля химической энергии становится малой по сравнению с энергией набегающего потока и, следовательно, процесс горения не будет оказывать заметного влияния на характер распределения температуры торможения (см. рис. 3).

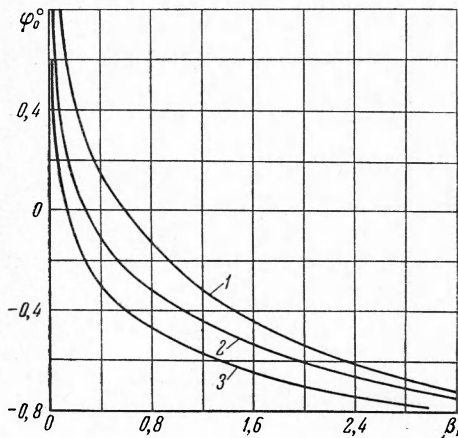


Рис. 2. Зависимость $\varphi_r = f(\beta_1)$; ($\omega = \omega_1 = 10$).
1 — $M_{+\infty} = 0$; 2 — $M_{+\infty} = 5,0$; 3 — $M_{+\infty} = 10$.

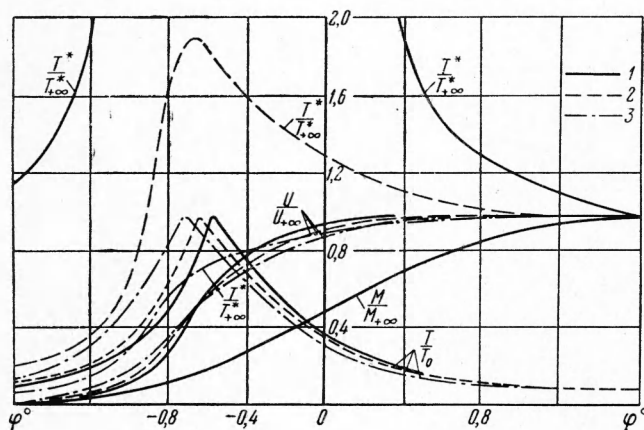


Рис. 3. Распределение скорости, числа M , термодинамической температуры и температуры торможения в поперечных сечениях пограничного слоя ($\beta_1 = 2,2$, $\omega = \omega_1 = 10$).
1 — $M_{+\infty} = 0$; 2 — $M_{+\infty} = 5$; 3 — $M_{+\infty} = 10$.

Приведенные выше расчеты могут быть обобщены и на случай истечения газа, когда $p_{+\infty} \neq p_{-\infty}$.

В зависимости от заданного отношения $p_{+\infty}/p_{-\infty}$ поток, обтекая точку O (см. рис. 1, б), повернется на некоторый угол δ . Вследствие этого пограничный слой также смещается на угол δ и решение задачи в новой системе координат (x_1, y_1) может быть проведено изложенным выше методом. Параметры газового потока после поворота могут быть определены известными газодинамическими методами [11].

Поступила в редакцию
2/XI 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Абрамович. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. В. Гаусорн, Д. Уиделл, Г. Хоттел. Смещение и горение в турбулентных газовых струях.—Сб. «Вопросы горения», ИЛ, 1953, т. 1.
3. Т. Варон. Chem. Engng. Progr., 1954, 50, 2.
4. Р. А. Лобби. Ракетная техника, 1962, 3.
5. Л. А. Вулис. Струйные задачи прикладной газодинамики.—Сб. «Исследование физических основ рабочего процесса топков и печей». Алма-Ата, Изд. АН Каз. ССР, 1957.
6. Л. А. Вулис. Ж. техн. физ., 1956, 26, 6.
7. В. Н. Тимофеев, Н. И. Сычев. Исследование процесса горения газового топлива.—Сб. науч.-иссл. работ Восточного науч.-иссл. ин-та металлург. теплотехники. Металлургиздат, 1940, № 5.
8. Ш. А. Ершин. Изв. АН Каз. ССР, сер. энергетическая, 1956, 11.
9. З. Б. Сакипов, Д. Ж. Темирбаев. Вестн. АН Каз. ССР, 1963, 2.
10. Л. А. Вулис, Т. К. Мироненко, Н. Н. Терехина. Приближенный расчет распределения скорости температуры в свободных турбулентных струях сжимаемого газа.—Сб. «Исследование физических основ рабочего процесса топков и печей». Алма-Ата, Изд. Каз. ССР, 1957.
11. Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. Гостехиздат, 1954.