ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЕЙ КРУГОВЫМ ПОТОКОМ

В. И. Микута, Б. Г. Новиков

(Новосибирск)

В данной работе рассматривается обтекание тел плоским потоком жидкости, равномерно вращающейся вокруг некоторой точки. Такой поток жидкости будем называть круговым равномерно-завихренным потоком. Рассмотрение таких течений связано с теоретическим исследованием обтекания тел в карусельном гидроканале — установке для получения потоков жидкости с большими скоростями. Описание установки и принцип ее действия имеются в работе [1].

1. Постановка задачи. Пусть плоский поток идеальной несжимаемой жидкости равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно некоторой точки $O_1(-a_2,\ a_1)$. Очевидно, что вихрь скорости в каждой точке такого потока есть величина постоянная и равная удвоенной угловой скорости, взятой с обратным знаком. Действительно, так как компоненты скорости в каждой точке рассматриваемого потока представляются в виде

$$v_x = \omega (y - a_1), \quad v_y = -\omega (x + a_2)$$

то

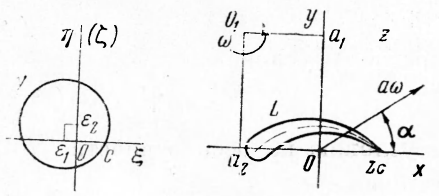
$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2\omega \tag{1.1}$$

Сделаем два предположения: если в рассматриваемый поток внести какое-либо тело, то:

1) это тело не изменит распределения вихря в потоке,

2) по мере удаления от тела на достаточно большом расстоянии от него линии тока будут сколь угодно мало отличаться от окружностей с центром в точке O_1.

Экспериментально показано, что первое предположение вполне приемлемо при изучении обтекания тел в карусельном гидроканале. Второе предположение вытекает из факта, что возмущения от тела затухают по мере удаления от него.



Фиг. 1

Плоский установившийся поток идеальной несжимаемой жидкости с постоянным распределением вихрей (1.1), обтекающий какое-либо препятствие и удовлетворяющий двум указанным выше условиям, назовем круговым равномерно-завихренным потоком. Точку $O_1(-a_2,\ a_1)$ назовем центром вращения потока.

Рассмотрим обтекание некоторого профиля L круговым равномерно-завихренным потоком (фиг. 1). Уравнения движения для рассматриваемого течения и уравнение неразрывности имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

Следовательно, для определения поля скоростей и поля давления искомого потока нужно решить систему уравнений (1.1) — (1.3), которая и является основной системой уравнений кругового равномерно-завихренного потока.

Введем функцию тока Ψ равенствами

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1.4}$$

так, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности (1.3). Вводя функцию Ψ в уравнения (1.1), (1.2), согласно равенствам (1.4), получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -2\omega \tag{1.5}$$

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right] + 2\omega\Psi + \text{const} \tag{1.6}$$

Следовательно, для решения поставленной задачи достаточно определить функцию тока Ψ из уравнения (1.5); после того как функция Ψ найдена, скорость и давление в каждой точке потока легко найти при помощи равенств (1.4), (1.6). Функция тока должна на контуре L принимать постоянное значение, т. е.

$$\Psi|_L = \text{const} \tag{1.7}$$

Из условия (1.2), налагаемого на искомый поток, следует, что при удалении от тела функция тока Ψ должна возрастать пропорционально квадрату расстояния точки от центра вращения O_1, т. е. на бесконечности функция тока Ψ имеет порядок

$$\Psi = -\frac{\omega}{2}\left[(x + a_2)^2 + (y - a_1)^2\right] + O(\ln|z|) \tag{1.8}$$

где через $O(\ln|z|)$ обозначены выражения, возрастающие при $|z| \to \infty$ не быстрее, чем $\ln|z|$.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче: определить функцию тока Ψ, удовлетворяющую уравнению Пуассона (1.5), краевому условию (1.7) и условию на бесконечности (1.8).

2. Решение задачи для произвольного профиля. Пусть ψ° — функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\triangle\psi^\circ = 0 \tag{2.1}$$

краевому условию

$$\psi^\circ = \omega(x^2 + y^2) + \text{const} \quad \text{на } L \tag{2.2}$$

и условию на бесконечности

$$\psi^\circ = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \tag{2.3}$$

и пусть ψ — функция тока обтекания профиля L потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $\omega\bar{a}$ на бесконечности, так что

$$\triangle\psi = 0, \qquad \psi = 0 \quad \text{на } L \tag{2.4}$$

Тогда функция

$$\Psi = -\omega(x^2 + y^2) + \psi^\circ + \psi \tag{2.5}$$

будет решением поставленной задачи (1.5), (1.7), (1.8).

Действительно, легко видеть, что в силу (2.1)—(2.5) она удовлетворяет уравнению (1.5) и краевому условию (1.7). Остается показать, что эта функция удовлетворяет условию (1.8). Известно, что комплексный потенциал скорости $w = \varphi + i\psi$ плоского потенциального потока несжимаемой жидкости, обтекающего какой-либо профиль L со скоростью $\omega\bar{a}$, на бесконечности имеет вид

$$w = \omega\bar{a}z + O(\ln z)$$

Отсюда

$$\psi = \omega(-a_2 x + a_1 y) + O(\ln|z|)$$

Подставляя это выражение, а также выражение (2.3) для функции ψ° в равенство (2.5), найдем, что

$$\Psi = -\omega(x^2 + y^2) + \omega(-a_2 x + a_1 y) + O(\ln|z|) =$$

$$= -\omega[(x + a_2)^2 + (y - a_1)^2] + O(\ln|z|)$$

т. е. найденная функция удовлетворяет условию (1.8), что и требовалось показать.

Таким образом, определение искомого потока сводится к отысканию двух функций: ψ и ψ°. Для определения первой из этих функций, ψ, имеются хорошо разработанные методы теории крыла; для некоторых из профилей функция ψ представляется в весьма простом виде. Следовательно, основная трудность при определении искомого потока состоит в отыскании функции ψ°.

Реакции потока на обтекаемый профиль определятся по формулам Блазиуса— Чаплыгина

$$\overline{R} = X - iY = \frac{i\rho}{2}\int_L \bar{v}^2\,dz, \quad L = \mathrm{Re}\left[-\frac{i\rho}{2}\int_L \bar{v}^2 z\,dz\right] \quad (v = v_x - iv_y) \qquad (2.6)$$

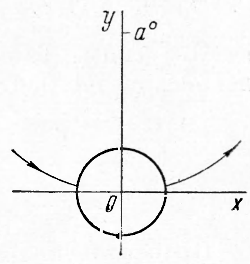
3. Обтекание кругового цилиндра. Выберем систему координат так, чтобы центр вращения потока был в точке (o, a), а центр обтекаемой окружности радиуса c — в начале координат. В этом случае $\psi^\circ \equiv 0$, а функция ψ имеет вид

$$\psi = a\omega y\left(1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{|z|}{c} \qquad (3.1)$$

где $\Gamma = \mathrm{const}$ — циркуляция скорости.

Подставляя ψ° и ψ в (2.5), получим общее решение задачи обтекания окружности радиуса c круговым потоком с центром вращения в точке (o, a) и угловой скоростью ω, (3.2)

$$\Psi = -\frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + a\omega y\left(1 - \frac{c^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{|z|}{c}$$



Фиг. 2

Подставляя (3.2) в (1.4), найдем комплексно-сопряженную скорость

$$\bar{v} = v_x - iv_y = -i\omega\bar{z} + a\omega - \frac{a\omega c^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z}$$

Теперь по формуле (2.6) определим реакции потока на обтекаемую окружность

$$\overline{R} = X - iY = i\rho a\omega\Gamma + 2\pi i\rho a c^3\omega^2$$

Если ввести обозначения $v_0 = a\omega$ и $\Gamma' = \mathrm{rot}\, v\cdot\pi c^2$, то получим

$$\overline{R} = i\rho v_0(\Gamma + \Gamma')$$

4. Обтекание профиля Жуковского. Следуя Жуковскому, выберем систему координат Oxy, как показано на фиг. 1. Для отыскания функции ψ° введем плоскость ζ, связанную с плоскостью z соотношением

$$z = f(\zeta) = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \tag{4.1}$$

Эта функция внешности профиля Жуковского L ставит в соответствие внешность окружности γ радиуса $r = \sqrt{(c-\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}$ с центром в точке $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Очевидно, что при преобразовании (4.1) задача (2.1)—(2.3) (определение функции $\psi^\circ(z)$) сводится к отысканию функции

$$\psi^\circ(\zeta) = \psi^\circ(f(\zeta))$$

— гармонической вне круга γ и удовлетворяющей краевому условию

$$\psi^\circ = 2\omega \frac{c^2\xi^2 + (\varepsilon_1\xi + \varepsilon_2\eta - \varepsilon_1 c)^2}{c^2 + 2(\varepsilon_1\xi + \varepsilon_2\eta - \varepsilon_1 c)} \quad \text{на } \gamma$$

и условию на бесконечности

$$\psi^\circ = O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) \quad \text{на } \infty$$

Легко убедиться, что этим условиям удовлетворяет функция

$$\psi^\circ = \operatorname{Im} w^\circ = \operatorname{Im}\left\{i\omega r^2\left[\frac{c}{\zeta(\zeta-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{\zeta-\varepsilon} - \frac{2c(\varepsilon_1^2 + i\varepsilon_2(c-\varepsilon_1))}{r^2(c-2\varepsilon_1)}\frac{1}{\zeta}\right]\right\}$$

Переходя теперь обратно к плоскости z при помощи преобразования $\zeta = \varphi(z)$, обратного преобразованию (4.1), получим

$$\psi^\circ z = \operatorname{Im} w^\circ(\varphi(z))$$

Функция тока $\psi(z)$ обтекания профиля Жуковского L потенциальным потоком со скоростью на бесконечности $\omega\bar{a}$ изучена; она имеет вид

$$\psi(z) = \operatorname{Im} w(\varphi(z)) = \operatorname{Im}\left\{\omega\,\bar{a}\left[\varphi(z) - \varepsilon + \frac{(c-\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}{\varphi(z)-\varepsilon}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(\varphi(z) - \varepsilon)\right\}$$

где $\Gamma = \text{const}$. Таким образом, на основании (2.5) общее решение поставленной задачи запишется

$$\Psi = -\frac{\omega}{2}z\bar{z} + \operatorname{Im} w_k(\varphi(z)) + \operatorname{Im}\left\{\left[\omega\bar{a}\varphi(z) - \varepsilon + {} \right.\right.$$
$$\left.\left. {} + \frac{(c-\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}{\varphi(z)-\varepsilon}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(\varphi(z)-\varepsilon)\right\} \tag{4.2}$$

Произвольная постоянная Γ выбирается из условия конечности скорости в задней кромке профиля и равна

$$\Gamma = -4\pi\omega\left[a_1\varepsilon_2 + a_2(c-\varepsilon_1) + c(c-\varepsilon_1) - \frac{(c-\varepsilon_1)|\varepsilon|^2}{c-2\varepsilon_1}\right]$$

Подставляя (4.2) в (1.4), найдем комплексно-сопряженную скорость

$$\bar{v} = v_x - iv_y = -i\omega\bar{z} + \bar{V} \qquad \left(\bar{V} = \frac{d(w_k(\varphi(z)) + w(\varphi(z))}{dz}\right) \tag{4.3}$$

Подставляя теперь (4.3) в (2.6), получим

$$\bar{R} = X - iY = \frac{i\rho}{2}\left[\int_L \bar{V}^2 dz - \omega^2\int_L \bar{z}^2 dz - 2i\omega\int_L \bar{z}\bar{V}\,dz\right]$$

Для интегралов, входящих в эту формулу, вычисления дают

$$\int_L \bar{V}^2 dz = 2\bar{a}\omega\Gamma, \qquad \int_L \bar{z}^2 dz = 4iS(x_c - iy_c) = 4iS\bar{z}_c$$

где x_c, y_c — координаты центра площади, S — площадь, ограниченная контуром L,

$$\int\limits_L z\bar{V}\,dz = \int\limits_\gamma \left(\bar{\zeta} + \frac{c^2}{\bar{\zeta}}\right)\frac{d(w_k+w)}{d\zeta}\left(1-\frac{c^2}{\zeta^2}\right)d\zeta =$$

$$= \omega\int\limits_\gamma \left[(\bar{\zeta}-\bar{\varepsilon}) + \bar{\varepsilon} + \frac{c^2}{\bar{\zeta}-\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}}\right]\left(1-\frac{c^2}{\zeta^2}\right)\frac{d(w_k+w)}{d\zeta}\,d\zeta$$

Умножив и разделив члены в квадратной скобке на $\zeta - \varepsilon$ и учитывая, что

$$(\zeta-\varepsilon)(\bar{\zeta}-\bar{\varepsilon}) = r^2 = \mathrm{const} \text{ на } \gamma$$

под интегралом получим аналитическую функцию и, воспользовавшись теоремой о вычетах, найдем

$$\int\limits_L \bar{z}\bar{V}\,dz = 2\pi i\omega\left[\frac{\Gamma\bar{\varepsilon}}{2\pi i\omega} + r^2(\bar{a}-i\bar{\varepsilon}) - c^2(a+i\varepsilon) + is\bar{z}_c + \frac{ic^4\bar{\varepsilon}}{r^2-|\varepsilon|^2}\right]$$

Окончательно (4.4)

$$\bar{R} = X - iY = i\rho\omega\Gamma(\bar{a}-i\bar{\varepsilon}) + 2\pi i\rho\omega^2\left\{r^2(\bar{a}-i\bar{\varepsilon}) - c^2(a+i\varepsilon) + \frac{ic^4\bar{\varepsilon}}{r^2-|\varepsilon|^2}\right\}$$

Можно убедиться, что, в отличие от потенциального обтекания профиля Жуковского, где угол атаки α всегда можно выбрать так, что подъемная сила обращается в нуль, в рассматриваемом случае реакция $\bar{R}$ всегда отлична от нуля. Это особенно отчетливо видно в частном случае, когда $\varepsilon = 0$, т. е. при обтекании пластинки круговым потоком. В этом случае, исходя из (4.4), можно записать

$$F_1 = 2\pi\rho\omega^2c^2\,|a|\sin 2\alpha$$

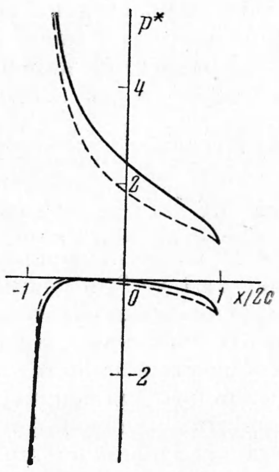
$$F_2 = 4\pi\rho\omega^2c\,|a|\,(c\cos^2\alpha + |a|\sin^2\alpha)$$

Здесь α — угол между осью x и направлением скорости невозмущенного потока $a\omega$ в начале координат, F_1 — проекция реакции на направление α, а F_2 — проекция реакции на направление $\alpha + {}^1/_2\,\pi$. Отсюда видно, что нельзя найти такой угол α, чтобы одновременно $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Определим скорость потока на пластинке

$$v_x = |a|\,\omega\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)+\sin\alpha}{\sin\theta} + 2\frac{c}{|a|}\sin\theta\right]$$

$$v_y = 0 \quad \left(\theta = \arccos\frac{x}{2c}\right) \qquad (4.5)$$



Фиг. 3

В выражении (4.5) первый член

$$|a|\,\omega\,\frac{\sin(\theta-\alpha)+\sin\alpha}{\sin\theta}$$

совпадает с выражением скорости на пластинке, обтекаемой потенциальным потоком со скоростью на бесконечности $\omega a = v_\infty$. На фиг. 3 для сравнения показано распределение давления $p^* = -p/({}^1/_2\,\rho\omega^2a^2)$ вдоль пластинки, обтекаемой круговым потоком (сплошными линиями) с угловой скоростью ω и потенциальным потоком со скоростью на бесконечности $v_\infty = \omega a$ для $\alpha = 30°$ и $c/|a| = 0.1$ (пунктирные линии).

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступила 15 VII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Войцеховский Б. В., Коваль А. А. Карусельный гидроканал. ПМТФ, 1960, № 2.