

ФЛУКТУАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ЭНЕРГИИ СЦЕПЛЕНИЯ В КОНТАКТЕ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

Г. А. БАБУШКИН

(Свердловск)

В [1, 2] на основе идей и расчетов автора о необходимости учета обратных переходов в теории Эйринга [1] и о введении в рассмотрение вакансионной плоскости в контакте двух сред [2] был дан метод нахождения относительной прочности сцепления $\epsilon = \sigma/\sigma_0$ (σ_0 — максимально возможная прочность сцепления, σ — реально достигаемая за время t_0 эффективного взаимодействия в контакте в процессе напыления) двух сред в случае одинаковых материалов подложки и частицы. В [3] предложен метод расчета абсолютной величины прочности сцепления в частном случае одинаковых материалов подложки и частиц порошка. В связи с актуальностью создания высокой прочности сцепления покрытия с основой при плазменном напылении представляется научный и практический интерес построение теории сцепления двух различных по характеристикам сред.

В начальный момент времени образования контакта отсутствие связей между поверхностными атомами (комплексами) двух сред (частицы порошка и подложки) можно аппроксимировать существованием плоскости вакансий на границе раздела. Образование связей обусловлено миграцией вакансий из вакансионной плоскости и появлением на их месте атомов частицы или подложки.

Рассмотрим вакансионную плоскость в момент времени $t = 0$ как одно из микросостояний системы ν квазиравновесных вакансий, соответствующих температуре T_k контакта (влиянием объемных вакансий, имевшихся в начальный момент, будем пренебрегать). Считаем, что состояние с вакансионной плоскостью — большая флуктуация (больше средней), т. е. система существенно неравновесна. Неравновесные вакансии (вакансионная плоскость) будут стремиться к перераспределению в равновесное состояние. За эффективное время t_0 (когда T_k можно приближенно считать постоянной и относительно высокой) система перейдет из существенно неравновесного состояния в другое, менее неравновесное. Выделим некоторые малые объемы V_{\pm} , соответствующие равновесной концентрации вакансий при T_k и содержащие единичную контактную плоскость (здесь и далее индексами $+$ и $-$ будем характеризовать величины, относящиеся к частице и подложке). Считая, что эти объемы находятся в тепловом контакте с термостатом, можно применить распределение Гиббса [4] к системе N_{\pm} вакансий, заключенных в V_{\pm} .

Максимально возможную прочность связи σ_0 из термодинамических соображений примем равной разности свободной энергии $G^{(1)}(t=0)$ системы вакансий в состоянии с вакансионной плоскостью и свободной энергии $G^{(2)}$ всех вакансионных комплексов, заключенных в V_{+} и V_{-} , в состоянии полного равновесия ($t \geq \tau$, τ — время релаксации для установления полного равновесия):

$$(1) \quad \sigma_0 \approx G^{(1)} - G^{(2)}, \quad G^{(2)} = G_{+}^{(2)} + G_{-}^{(2)}.$$

Рассчитаем равновесную концентрацию $N_{nv_{\pm}}^e$ n -х вакансий, т. е. отношение равновесного числа $N_{n_{\pm}}$ комплексов, состоящих из n моновакансий, к числу узлов (атомных объемов) $N_{V_{\pm}}$ в выделенном V_{\pm} . Для этого запишем свободную энергию выделенного объема V_{\pm} с n -ми вакансиями одного типа:

$$(2) \quad G_{n_{\pm}}^{(2)} = G_{\pm}^{(0)} + N_{n_{\pm}} \Delta G_{nv_{\pm}}^f, \quad \Delta G_{nv_{\pm}}^f = n \Delta G_{v_{\pm}}^f + \delta G_{nv_{\pm}}^f,$$

где $\Delta G_{nv_{\pm}}^f$ — изменение свободной энергии, связанное с образованием одной n -й вакансии; $\delta G_{nv_{\pm}}^f$ — изменение свободной энергии при образовании n -го комплекса из n моновакансий, индекс 0 относится к бездефектному состоянию; $N_{n_{\pm}}$ — квазиравновесное число n -х вакансионных комплексов. Заметим, что $\Delta G_{nv_{\pm}}^f$ зависит не только от n , но и от конфигурации. Образование вакансий требует подвода энергии, но при этом повышается конфигурационная энтропия $S_{n_{\pm} \text{конф}}$. Поэтому при высоких температурах свободная энергия (например, термодинамический потенциал G по отношению к переменным p, T , где p — давление) может понижаться. Минимум свободной энергии соответствует равновесной концентрации вакансий. Минимизируя $\Delta G_{n_{\pm}}^{(2)} = G_{n_{\pm}}^{(2)} - \tilde{G}_{\pm}^{(0)}$ по $N_{n_{\pm}}$ при $N_{V_{\pm}} = \text{const}$, $T_k = \text{const}$, $\Delta G_{nv_{\pm}}^f = \text{const}$ с учетом $N_{n_{\pm}} \ll N_{V_{\pm}}$, $\ln k! \approx k \ln k - k$ при $k \gg 1$, для равновесной концентрации n -х комплексов дефектов

получим

$$(3) \quad N_{nv_{\pm}}^e = N_{n_{\pm}}/N_{V_{\pm}} \approx \exp(-\Delta S_{nv_{\pm}}^f/R) \exp(-\Delta G_{nv_{\pm}}^f/RT_K);$$

$$(4) \quad N_{n_{\pm}} = N_{nv_{\pm}}^e N_{V_{\pm}} \approx N_{V_{\pm}} \exp(-\Delta S_{nv_{\pm}}^f/R) \exp(-\Delta G_{nv_{\pm}}^f/RT_K).$$

Число $N_{n_{\pm}}$ (4) n -х комплексов и их равновесная концентрация $N_{nv_{\pm}}^e$ (3) выражены через неопределенную пока величину $N_{V_{\pm}}$. Заметим, что число вакансий v в вакансионной плоскости, заключенной в $V_+ + V_-$, приближенно равно полусумме поверхностных плотностей атомов (молекул) $((|N_+| + |N_-|)/2)$ и соответствует равновесному для температуры контакта T_K состоянию. Можно показать [5], что распределение концентрации вакансий в зависимости от расстояния до вакансионной плоскости подчиняется закону

$$(5) \quad c_{\pm}(x, t) = \frac{v}{(\sqrt{D_-} + \sqrt{D_+})\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{\pm}t}\right),$$

где D — коэффициент диффузии вакансий. Введем в рассмотрение число v_{\pm} моно-вакансий (в том числе и в комплексах) в V_{\pm} . Находя из (5) отношение потоков вакансий в V_+ и V_- и учитывая, что $v = v_+ + v_-$, из соотношения $v_+/v_- \approx \sqrt{D_+}/\sqrt{D_-}$ получаем

$$(6) \quad v_{\pm} \approx v \sqrt{D_{\pm}} / (\sqrt{D_+} + \sqrt{D_-}), \quad V_{\pm} \approx v_{\pm} / N_{\pm}^e.$$

Нормируя на условие $\sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}} = v_{\pm}$, получим

$$(7) \quad N_{n_+} \approx v_{+} Q_{+}^{-1} \exp(-\Delta S_{nv_{+}}^f/R) \exp(-\Delta G_{nv_{+}}^f/RT_K);$$

$$(8) \quad N_{V_{\pm}} \approx v_{\pm} Q_{\pm}^{-1};$$

$$(9) \quad Q_{\pm} = \sum_{m=1}^{v_{\pm}} m \exp(-\Delta S_{mv_{\pm}}^f/R) \exp(-\Delta G_{mv_{\pm}}^f/RT_K).$$

Найдем свободную энергию тела после распределения вакансий по объему (т. е. при $t > \tau$). Учитывая, что $v_{\pm} \ll N_{V_{\pm}}$, $N_{n_{\pm}} \ll N_{V_{\pm}}$, будем считать равновесную систему вакансий смесью идеальных газов (моновакансионного, бивакансионного и вообще n -го вакансионного). Пользуясь выражением для свободной энергии слабых растворов [4], а также учитывая колебательную $G_{\text{кол}_{\pm}}$ часть свободной энергии (становится существенной при высоких температурах) системы двух и n -х вакансионных комплексов, получим

$$(10) \quad G_{\pm}^{(2)} \approx G_{\pm}^{(0)} + \sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}} RT_K \ln \left(\frac{N_{n_{\pm}}}{e} e^{\alpha_{n_{\pm}}/RT_K} \right) + \sum_{n=1}^{v_{\pm}} G_{n_{\text{кол}_{\pm}}}^{(2)}.$$

Выражение для $G_{n_{\text{кол}_{\pm}}}$ зависит от числа вакансий в комплексе и в соответствии с [4] определяется выражениями

$$(11) \quad G_{n_{\text{кол}_{\pm}}} = N_{n_{\pm}} RT_K \ln [1 - \exp(-\hbar \omega_{n_{\pm}}/RT_K)], \quad n = 2,$$

$$G_{n_{\text{кол}_{\pm}}} = N_{n_{\pm}} \hbar RT_K \sum_{\beta_{n_{\pm}}} \ln [1 - \exp(-\hbar \omega_{\beta_{n_{\pm}}}/RT_K)], \quad n \geq 3,$$

$$G_{\text{кол}_{\pm}}^{(2)} = \sum G_{n_{\text{кол}_{\pm}}}^{(2)},$$

причем для нелинейных комплексов $\beta_{n_{\pm}} = 3n - 6$, для линейных $\beta_{n_{\pm}} = 3n - 5$. В уравнениях (10), (11) $\alpha_{n_{\pm}} = \alpha_{n_{\pm}}(p, T_K, N_{V_{\pm}})$ — малое изменение, которое испытала бы свободная энергия при введении в V_+ одной n -й вакансии; $\omega_n, \omega_{\beta_n}$ — частота нормальных колебаний комплекса. Дифференцируя $G_{\pm}^{(2)}$ (10) по $N_{V_{\pm}}$ и $N_{n_{\pm}}$, найдем химические потенциалы n -х вакансионных газов и потенциал, отнесенный лишь к объему V_{\pm} без рассматриваемых нами v_+ вакансий в зависимости от $N_{n_{\pm}}$:

$$(12) \quad \mu_{\pm} = \mu_{\pm}^{(0)} - RT_K \sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}}/N_{V_{\pm}},$$

$$\mu_{n_{\pm}} = RT_K \ln(N_{n_{\pm}}/N_{V_{\pm}}) + RT_K \ln N_{V_{\pm}} + \alpha_{n_{\pm}}$$

(для простоты не записана колебательная часть). Свободная энергия запишется в виде

$$(13) \quad G^{(2)} = (N_{V_{\pm}} - v_{\pm}) \mu_{\pm} + \sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}} \mu_{n_{\pm}} + G_{\text{кол}\pm}^{(2)} = G_{\pm}^{(0)} + G_{\pm}^{(0)'} + \\ + RT_{\pm} \left[- (N_{V_{\pm}} - v_{\pm}) \sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}} / N_{V_{\pm}} + \sum_{n=1}^{v_{\pm}} N_{n_{\pm}} \left(\ln \frac{N_{n_{\pm}}}{N_{V_{\pm}}} + \frac{\alpha_{n_{\pm}}}{RT_{\pm}} \right) \right] + G_{\text{кол}\pm}^{(2)}, \\ G^{(0)'} = RT_{\pm} \ln N_{V_{\pm}} \sum N_{n_{\pm}} = \text{const.}$$

Найдя выражение для химических потенциалов μ_{\pm} , μ_{ν} при $t = 0$

$$(14) \quad \mu_{\pm} = \mu_{\pm}^{(0)} - \frac{RT_{\pm}}{N_{V_{\pm}}}, \quad \mu_{\nu} = \alpha_{\nu},$$

запишем далее свободную энергию $G^{(1)}$

$$(15) \quad G^{(1)} = G_{+}^{(0)} + G_{-}^{(0)} + \alpha_{\nu} + G^{(0)''} + G_{\text{кол}}^{(1)}, \quad G_{\pm}^{(0)''} = - (N_{V_{\pm}} - v_{\pm}) RT_{\pm} / N_{V_{\pm}} = \text{const}, \\ G_{\text{кол}}^{(1)} = RT_{\pm} \sum_{\beta_{\nu}}^{3\nu-5} \ln [1 - \exp(-\hbar \omega_{\beta_{\nu}} / RT_{\pm})].$$

Подставляя (13) и (15) в (1), для максимальной энергии сцепления получаем

$$(16) \quad \sigma_0 = \{ G_{+}^{(0)''} + G_{-}^{(0)''} - G_{+}^{(0)'} - G_{-}^{(0)'} \} + \left\{ \alpha_{\nu} - RT_{\pm} \left[\sum_{n=1}^{v_{+}} N_{n_{+}} \left(\ln \frac{N_{n_{+}}}{N_{V_{+}}} + \frac{\alpha_{n_{+}}}{RT_{\pm}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=1}^{v_{-}} N_{n_{-}} \left(\ln \frac{N_{n_{-}}}{N_{V_{-}}} + \frac{\alpha_{n_{-}}}{RT_{\pm}} \right) - (N_{V_{+}} - v_{+}) \sum_{n=1}^{v_{+}} \frac{N_{n_{+}}}{N_{V_{+}}} - (N_{V_{-}} - v_{-}) \sum_{n=1}^{v_{-}} \frac{N_{n_{-}}}{N_{V_{-}}} \right] \right\} + \\ + \{ G_{\text{кол}\pm}^{(1)} + G_{\text{кол}\pm}^{(1)} - G_{\text{кол}\pm}^{(2)} - G_{\text{кол}\pm}^{(2)} \},$$

где выражение в первой скобке — константа (например, при

$$T_{\pm}, p = \text{const}), \quad G_{\pm}^{(0)''}, \quad G_{\pm}^{(0)'}, \quad N_{n_{\pm}}, \quad N_{V_{\pm}}, \quad G_{\text{кол}\pm}^{(2)}, \quad G_{\text{кол}\pm}^{(1)}$$

определяются выражениями (15), (13), (7), (8), (11), (15), $\alpha_{n_{\pm}}$ можно принять равной энергии образования n -й вакансии, т. е. $\alpha_{n_{\pm}} = \Delta G_{n_{\pm}}^f / N_A$ (N_A — число Авогадро).

Найденное выражение (16) для максимальной прочности сцепления представляет общий физический интерес в проблеме энергии связи. Применим этот результат для нахождения прочности сцепления σ (через прочность сцепления σ_0), достигаемой при напылении порошкового покрытия на подложку.

Умножая относительную прочность сцепления ε (см., например, [1, 2]) диффузионно-кинетический механизм сцепления порошкового покрытия с подложкой для различных материалов подложки и частицы ввиду сложности будет рассмотрен автором позднее) на σ_0 , найдем реальную прочность

$$(17) \quad \sigma = \varepsilon \sigma_0.$$

Укажем еще один метод расчета реальной прочности сцепления σ без учета относительной прочности ε . Рассмотрим флуктуацию свободной энергии исследуемой нами вакансионной системы, пренебрегая флуктуациями чисел частиц $N_{n_{\pm}}$:

$$(18) \quad \Delta G(t) = G(t) - G(\tau) = G(t) - G^{(2)}, \\ G(t) = G_{+}(t) + G_{-}(t), \quad G^{(2)} = G_{+}^{(2)} + G_{-}^{(2)}.$$

Очевидно, $\langle \Delta G \rangle = 0$, $\langle (\Delta G)^2 \rangle \neq 0$. Пусть величина $\Delta G(t)$ в момент времени t имеет значение, большее по сравнению со средней флуктуацией, т. е. $\Delta G(t) > \langle (\Delta G)^2 \rangle^{1/2}$, тогда между $\Delta G(t)$ в различные моменты $t < \tau$ существует корреляция, т. е. значение $\Delta G(t)$ в момент времени t влияет на значение $\Delta G(t')$ в другой момент времени t' . Для характеристики временной корреляции введем среднее значение произведения $\langle \Delta G(t) \Delta G(t') \rangle$. Заметим, что состояние выделенного объема $V_{+} + V_{-}$ в момент $t = 0$ с вакансионной плоскостью можно считать состоянием неполного равновесия, при котором $\Delta G(0) \gg \langle (\Delta G(t))^2 \rangle^{1/2}$.

Ввиду большого времени релаксации рассматриваемый нами процесс образования сцепления за эффективное время t_0 ($t_0 \ll \tau$) будем считать квазистационарным, а флуктуацию энергии — квазистационарной. Время t_0 в этом случае имеет смысл вре-

мени релаксации для установления неполного равновесия. Скорость изменения $\Delta G(t)$ от t зависит от самой величины $\Delta G(t)$ [4]:

$$(19) \quad d\Delta G(t)/dt = -\lambda \Delta G(t)$$

в случае больших флуктуаций, но допускающих ограничение линейным членом в разложении $d\Delta G(t)/dt$ по степеням $\Delta G(t)$. В (19) λ — величина, обратная времени релаксации. Интегрируя (19), имеем

$$(20) \quad \langle \Delta G(t) \Delta G(t') \rangle = \langle (\Delta G(t))^2 \rangle \exp(-\lambda|t - t'|).$$

Воспользовавшись (20), энергию сцепления в момент времени t запишем в виде

$$(21) \quad \sigma = G(0) - G(\tau) - \Delta G(t) = G^{(1)} - G^{(2)} - \langle (\Delta G(t))^2 \rangle^{1/2}.$$

Так как релаксация является стохастическим процессом, то время t_0 образования сцепления можно разбить на s интервалов. Тогда $\Delta G(t_0)$ представится в виде

$$(22) \quad \langle (G(t_0))^2 \rangle = \langle (G(0))^2 \rangle \exp\left(-\frac{t_0}{s} \sum_{r=0}^{s-1} \lambda_r\right),$$

где $1/\lambda_r$ имеет смысл времени релаксации установления неполного равновесия в промежутке $t_{r+1} - t_r$. При $t_0 \ll \tau$ можно приближенно положить $\lambda_r = \lambda$, тогда (22) будет иметь вид

$$(23) \quad \langle (G(t_0))^2 \rangle \approx \langle (G(0))^2 \rangle e^{-t_0 \lambda} = (G^{(1)})^2 e^{-t_0 \lambda}.$$

Учитывая, что процесс перехода в равновесное состояние связан с миграцией вакансий, τ можно оценить из соотношения [6]

$$(24) \quad L \approx b\sqrt{D\tau},$$

где D — коэффициент диффузии вакансий (причем D равно меньшему из D_+ и D_-); L — характерный диффузионный путь; b — коэффициент порядка 1. Учитывая, что при $t = 0$ у вакансий находятся в вакансионной плоскости, заключенной в $V_+ + V_-$, из (24) и (7), (8) находим

$$(25) \quad \lambda \sim dv' b^2 D \left[\sum_{n=1}^{v'} n \exp\left[-(T_K \Delta S'_{nv\text{кон}} + \Delta G'_{nv})/RT_K\right] \right]^2, \quad d = 1 \text{ м}^{-2},$$

где штрих у v , S , G означает, что вместо v' , S' , G' надо брать v_+ , S_+ , G_+ , если $D = D_+$, и наоборот.

Подстановка (4), (16), (25), (23) в (21) приводит к выражению для энергии сцепления σ в контакте двух различных сред, в частности в контакте частиц порошкового покрытия и подложки и между частицами спеченного порошкового материала.

С большой степенью точности в развитой теории можно ограничиться моно- и бивакансиями и пренебречь (11). Получаются очень простые и удобные для приложенных выражения. Для оценок воспользуемся лишь моновакансионным приближением (распространение на случай моно- и бивакансий не представляет труда). В результате, учитывая (2), (6) и соотношения $v_{\pm} = N_{i_{\pm}} \ll N_{V_{\pm}}$, $N_{i_+} + N_{i_-} = v \approx 1/|a|^2$ (a — межатомное расстояние), а также замечая, что число разорванных связей в v вакансиях в 3 раза меньше, чем в v моновакансиях, и в металлах энтропийным множителем можно пренебречь, для максимально возможной энергии сцепления σ_0 получаем

$$\sigma_0 \approx \alpha_v - \alpha_{i_+} v_{i_+} - \alpha_{i_-} v_{i_-} \approx \delta H_{mv}^i / N_A + \delta H_{vv}^i / N_A \approx \frac{2}{3} \frac{\Delta H_{v_+}^i v_+}{N_A} + \frac{2}{3} \frac{\Delta H_{v_-}^i v_-}{N_A} = \frac{2}{3} \frac{1}{|a|^2} \frac{1}{N_A} \left(\frac{\sqrt{D_+}}{\sqrt{D_+} + \sqrt{D_-}} \Delta H_{v_+}^i + \frac{\sqrt{D_-}}{\sqrt{D_+} + \sqrt{D_-}} \Delta H_{v_-}^i \right).$$

Здесь ΔH_v^i и ΔH_v^m — соответственно энтальпия образования и перемещения вакансий, $\Delta H_v^m \sim \Delta H_v^i \sim \frac{E}{2}$ (E — энергия активации диффузии).

В качестве примера оценим максимально возможную энергию сцепления на границе Fe(+) и Cr(-) (например, при напылении Cr на Fe между частицами Fe и Cr в консолидированном порошковом материале, между фазами Fe и Cr в сплаве и т. д.). Учитывая, что $D = D_0 \exp(-\Delta H_v^m / RT_K)$ и полагая $D_{0+} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $D_{0-} = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$, $E_+ = 2,71 \cdot 10^5 \text{ кДж/кмоль}$, $E_- = 2,21 \cdot 10^5 \text{ кДж/кмоль}$ [6], $a \approx a_+ \approx a_- \sim 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ [7], $\Delta H_v^i / E \approx 0,65$ (для о. ц. к. решетки) [6], $T_K \approx 900 \text{ К}$ [8], находим $\sigma_0 \approx 3,13 \text{ Дж/м}^2$, что удовлетворительно согласуется со значением $4,34 \text{ Дж/м}^2$, полученным в [9] совершенно другим методом. Аналогично оценка энергии сцепления, достигаемой за время эффективного взаимодействия в контакте $t_0 \sim 10^{-5} \text{ с}$ [8] при плазменном напылении (по формуле (21)), дает значение $\sigma \sim 1,5 \text{ Дж/м}^2$, также приближенно согласующееся с прочностью сцепления, наблюдаемой на опыте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабушкин Г. А., Буланов В. Я. и др. Реакционный вклад в относительную прочность сцепления порошкового покрытия с подложкой. — ЖТФ, 1982, т. 52, вып. 1.
2. Бабушкин Г. А., Буланов В. Я., Соловьев Л. В. Диффузионно-кинетический механизм сцепления порошкового покрытия с подложкой. — ЖТФ, 1983, т. 53, вып. 3; Диффузионно-кинетический механизм сцепления порошкового покрытия с подложкой (общие и предельные соотношения). — В кн.: Теоретические исследования и практическое применение плазменных износостойких покрытий. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
3. Бабушкин Г. А. Флуктуационный метод расчета абсолютной величины энергии сцепления двух сред. — Материалы Всесоюз. научн. конф. «Исследование и разработка теоретических проблем в области порошковой металлургии и защитных покрытий». Минск, 1984.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
5. Бабушкин Г. А. Диффузия из тонкого слоя в два полубесконечных образца с разными характеристиками. — ИФЖ, 1984, т. 47, № 2.
6. Бокштейн Б. С. Диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1978.
7. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972.
8. Кудинов В. В. Плазменные покрытия. М.: Наука, 1977.
9. Губанов А. И. Теория стыковки двух кристаллов в композите. — Механика композит. материалов, 1979, вып. 4.

Поступила 19/XII 1983 г.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТОНКИХ ТЕЛ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

М. В. КАВЛАКАН

(Новосибирск)

В работе рассматривается решение смешанной статической задачи для бесконечных струны, мембраны и пластины, частично опертых на упругое основание. Смешанный характер задачи состоит в том, что на одной части тела нагрузка задана, а на другой — равна реакции упругого основания, неизвестной до решения задачи. Эта реакция пропорциональна нормальному перемещению тела (гипотеза Вилклера — Фусса).

Ниже используется метод, с помощью которого в [1] решена упругая задача о полупространстве, частично опирающемся на упругое основание.

Считаем, что внешняя нагрузка приложена в ограниченной области V ; область, лежащую на упругом основании, обозначим P .

1. **Струна на упругом основании.** Пусть струна расположена вдоль оси Ox , область V занимает отрезок $|x| < a$, область P расположена вдоль полупрямых $|x| > a$. Смещения w струны удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(1.1) \quad d^2w/dx^2 = p(x), \quad x \in V;$$

$$(1.2) \quad d^2w/dx^2 = \lambda w(x), \quad x \in P,$$

где $p(x)$ — заданная суммарная функция нагрузки в области V ; $\lambda > 0$ — жесткость упругого основания (коэффициент постели). К уравнениям (1.1), (1.2) необходимо добавить условие на бесконечности $w(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ и условия сопряжения решений в точках $x = \pm a$

$$(1.3) \quad w_+(\pm a) = w_-(\pm a), \quad (dw/dx)_+(\pm a) = (dw/dx)_-(\pm a),$$

где индексы $+$ и $-$ обозначают предельные значения при стремлении к точке $x = \pm a$ из областей P и V соответственно.

Сведем задачу (1.1)–(1.3) к интегральному уравнению с помощью специально выбранного фундаментального решения. Фундаментальное решение с неизвестной пока плотностью распределения $\beta(\xi)$ ищется как решение уравнения

$$(1.4) \quad d^2w/dx^2 = \lambda w(x) + \beta(\xi)\delta(x - \xi), \quad -\infty < x < \infty, \\ w(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty,$$

где $\delta(x - \xi)$ — дельта-функция Дирака. Физический смысл задачи (1.4) состоит в том, что ищется прогиб бесконечной струны, лежащей на упругом основании и нагруженной в точке $x = \xi$ сосредоточенной силой $\beta(\xi)$. Решение задачи (1.4) легко получить с помощью преобразования Фурье

$$(1.5) \quad w(x) = -\frac{\beta(\xi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iq(x-\xi)} dq}{\lambda + q^2} = -\frac{\beta(\xi) e^{-\sqrt{\lambda}|x-\xi|}}{2\sqrt{\lambda}} = -\frac{\beta(\xi) G(x-\xi)}{\lambda}.$$