

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ  
В МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ В КАНАЛАХ**

**Ф. А. Слободкина**

(Москва)

Устойчивость скачка уплотнения при течении совершенного газа в канале в одномерном приближении рассматривалась в работе [1] при различных предположениях: возмущения не отражаются от выходного сечения канала, скачок слабой интенсивности и т. п. Результаты исследования оказались совпадающими для двух конкретных видов граничных условий в выходном сечении канала, из чего был сделан вывод о нечувствительности скачка к граничному условию на выходе.

В работе [2] численно изучался вопрос об устойчивости скачка уплотнения при течении электропроводного газа в плоском канале постоянного сечения в присутствии магнитного поля (напряженность электрического поля принималась равной нулю). Было установлено, что на устойчивость скачка уплотнения существенно влияет вид закона проводимости среды. Там же дано условие, определяющее предельный режим между устойчивым и неустойчивым режимами, при течении с ударной волной. При решении предполагалось, что в выходном сечении канала задано давление.

В данной работе демонстрируется влияние вида граничного условия в выходном сечении канала на устойчивость скачка уплотнения в газо- и магнитогазодинамическом течении при малых магнитных числах Рейнольдса. Получены критерии устойчивости для скачков, расположенных вблизи выхода из канала при конкретном условии на выходе. Исследуется влияние электромагнитных эффектов (закона проводимости, коэффициента электрической нагрузки) на устойчивость скачка.

1. Рассмотрим в квазиодномерном приближении нестационарное течение совершенного вязкого нетеплопроводного газа электропроводности  $\sigma = \sigma(p, \rho)$  в плоском канале произвольного сечения  $y(x)$  в присутствии электромагнитного поля. Направление скорости течения совпадает с направлением оси  $x$ . Верхняя и нижняя стенки канала — проводники, обладающие разностью потенциалов  $2\phi$ , внешнее магнитное поле напряженности  $B(x)$  направлено перпендикулярно плоскости, в которой лежит ось  $x$  и образующие стенок канала.

Предполагая магнитные числа Рейнольдса малыми, выпишем уравнения неразрывности, движения и энергии

$$y \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u y) = 0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma B \left( u B - \frac{\Phi}{y} \right) \quad (1.1)$$

$$y \frac{\partial p}{\partial t} + u y \frac{\partial p}{\partial x} + \kappa p \frac{\partial}{\partial x} (u y) = (\kappa - 1) \sigma y \left( u B - \frac{\Phi}{y} \right)^2$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость,  $p$  — давление газа,  $\kappa$  — отношение теплоемкостей. В (1.1) использовано уравнение состояния для совершенного газа.

Пусть система (1.1) имеет некоторое стационарное решение  $\rho = R(x)$ ,  $u = U(x)$ , и  $p = P(x)$ , содержащее ударную волну (в данном случае прямой скачок уплотнения). Связь величин перед и за скачком задается соотно-

шениями

$$\begin{aligned} \rho^- (\delta - u^-) &= \rho^+ (\delta - u^+) \\ \rho^- u^- (\delta - u^-) - p^- &= \rho^+ u^+ (\delta - u^+) - p^+ \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p^-}{\rho^-} + \frac{(\delta - u^-)^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p^+}{\rho^+} + \frac{(\delta - u^+)^2}{2}$$

Индексы плюс и минус относятся к параметрам за и перед скачком соответственно,  $\delta$  — скорость скачка.

Будем считать сверхзвуковое течение до ударной волны невозмущенным, с заданными параметрами  $U_a, R_a, P_a$  на входе в канал ( $x = x_a$ ). На выходе из канала при  $x = x_b$  должно быть задано граничное условие, которое запишем в виде

$$\psi \left( u, p, \rho, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots \right) = 0 \quad (x = x_b) \quad (1.3)$$

Здесь  $\psi$  — известная функция своих аргументов. Условие (1.3) определяет положение  $x = x_c$  ударной волны в канале. В частности, это условие может выражать требование равенства давлений в выходном сечении канала и в среде, куда происходит истечение

$$p_b = p_\infty$$

При истечении со скоростью звука условие (1.3) имеет вид

$$\rho_b u_b^2 / \kappa p_b = 1$$

Предположим, что дозвуковая часть стационарного решения между ударной волной и выходным сечением канала возмущена. Обозначим нестационарные добавки скорости, плотности и давления соответственно через  $u^*(x, t), \rho^*(x, t), p^*(x, t)$ . Считая величины со звездочками малыми, а также предполагая в соответствии с [3], что их рост во времени определяется множителем  $\exp \lambda t$ , будем искать решение линеаризованной по  $u^*, \rho^*, p^*$  системы (1.1) в виде

$$\rho^*(x, t) = \rho(x) e^{\lambda t}, \quad u^*(x, t) = u(x) e^{\lambda t}, \quad p^*(x, t) = p(x) e^{\lambda t}$$

Здесь для скорости, плотности и давления сохранены обозначения как и в (1.1), так как система (1.1) в дальнейшем использоваться не будет.

Для определения величин  $\rho(x), u(x), p(x)$  получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра  $\lambda$  и координаты  $x$  (через стационарное решение  $U(x), R(x), P(x)$ )

$$\begin{aligned} [(Uy)' / y + \lambda] \rho + U \rho' + u(Ry)' / y + Ru' &= 0 \\ UU' + B \alpha \sigma_p \rho + (RU' + \sigma B^2 + \lambda) u + RUu' + B \alpha \sigma_p p + p' &= 0 \\ -(\kappa - 1) \alpha^2 \sigma_p \rho + [P' + \kappa P y' / y - 2(\kappa - 1) \sigma B \alpha] u + \kappa P u' + \\ + [\kappa (Uy)' / y - (\kappa - 1) \alpha^2 \sigma_p + \lambda] p + U p' &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\alpha = UB - \phi / y$ ,  $\sigma_p, \sigma_p$  — соответствующие частные производные. Штрихом обозначена производная по  $x$ .

Граничные условия для системы (1.4) получим линеаризацией соотношений на скачке (1.2) и условия (1.3)

$$\begin{aligned} \rho_2 U_2 + R_2 u_2 - D(R_2 - R_1) &= 0 \\ \rho_2 U_2^2 + 2R_2 U_2 u_2 + p_2 &= \xi R_2 U_2 (U_2 - U_1) y' / y + \xi B (\sigma_2 \alpha_2 - \sigma_1 \alpha_1) \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p_2}{R_2} - \frac{P_2}{R_2^2} \rho_2 \right) + U_2 u_2 - D(U_2 - U_1) &= \xi \frac{B}{R_2} \Phi (\sigma_2 \alpha_2 - \sigma_1 \alpha_1) \\ a^*(\lambda) \rho_b + b^*(\lambda) u_b + c^*(\lambda) p_b &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a^*(\lambda) \rho_b + b^*(\lambda) u_b + c^*(\lambda) p_b = 0 \quad (1.6)$$

Здесь  $\Phi = \varphi / yBU_2$ ,  $\xi$  — параметр, пропорциональный смещению ударной волны,  $D$  — величина, определяемая равенством  $\delta = De^{\lambda t}$ ;  $a^*(\lambda) = \partial\Psi / \partial\rho$ ,  $b^*(\lambda) = \partial\Psi / \partial u$ ,  $c^*(\lambda) = \partial\Psi / \partial p$  при  $x = x_0$ ; индексы 1, 2 относятся к параметрам перед и за ударной волной. При получении соотношений (1.5) использованы уравнения для стационарного решения

$$\frac{U'}{U} = \frac{\kappa M^2 \sigma \alpha \beta}{RU^3(1-M^2)} - \frac{y'}{y(1-M^2)}, \quad \beta = UB - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \Phi / y$$

$$P' = -RUU' - \sigma B\alpha, \quad R'/R = -U'/U - y'/y, \quad M^2 = RU^2 / \kappa P$$

а также учитывалось то, что скачок подвижен.

Решение системы (1.4) линейно зависит от трех постоянных  $c^1$ ,  $c^2$ ,  $c^3$ , уравнения для которых получаются при подстановке найденного решения системы (1.4) в граничные условия (1.5) и (1.6), которые необходимо дополнить очевидным равенством

$$D(\lambda) = \xi \lambda \quad (1.7)$$

Уравнения для нахождения  $\xi$ ,  $c^1$ ,  $c^2$ ,  $c^3$ ,  $D$  представляют собой систему пяти линейных однородных алгебраических уравнений, обладающую нетривиальным решением лишь при тех значениях  $\lambda$ , которые обращают в нуль определитель этой системы. Корни определителя, имеющие положительные действительные части, дают решения неограниченно растущие во времени, что свидетельствует о неустойчивости соответствующего стационарного решения.

Для того чтобы решить вопрос об устойчивости ударной волны, достаточно найти из уравнений (1.5), (1.6) зависимость скорости ее смещения от  $\lambda$ , а величину  $\lambda$  найти из уравнения (1.7).

2. Предположим, что граничное условие (1.6) выполняется настолько близко к скачку, что решение не успевает существенно измениться на таком расстоянии. В этом случае можно достаточно просто продемонстрировать влияние различных граничных условий на устойчивость скачка.

Равенство (1.6) при таком предположении имеет вид

$$a^*(\lambda)\rho_2 + b^*(\lambda)u_2 + c^*(\lambda)p_2 = 0 \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$z = R_1 / R_2 = U_2 / U_1, \quad \Sigma = \sigma_1 / \sigma_2; \quad K = B(\sigma_2\alpha_2 - \sigma_1\alpha_1) / R_2 =$$

$$= \sigma_2 U_2 B^2 / R_2 [\Phi(\Sigma - 1) + 1 - \Sigma/z], \quad a(\lambda) = R_2 a^*(\lambda), \quad b(\lambda) = U_2 b^*(\lambda),$$

$$c(\lambda) = R_2 U_2^2 c^*(\lambda) \quad f = 1 + (\kappa - 1)M_2^2 / \kappa M_2^2, \quad M^2 = RU^2 / \kappa P$$

Считая решение между скачком и выходным сечением канала равным  $\rho(x) = \rho_2$ ,  $u(x) = u_2$ ,  $p(x) = p_2$ , найдем из (1.5) и (2.1) величину  $D(\lambda)$

$$D(\lambda) = \xi \left\{ \frac{\kappa}{\kappa - 1} U_2^2 \frac{(z-1)}{z} \frac{y'}{y} [a(\lambda) - b(\lambda) + fc(\lambda)] + \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} - \Phi \right) [a(\lambda) - b(\lambda) + c(\lambda) \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} f - \Phi \right)] \right\} : \left\{ \frac{2U_2(1-z)}{(\kappa - 1)z} \left[ \frac{a(\lambda)}{M_1^2} - b(\lambda) \frac{M_1^2 + 1}{2M_1^2} + c(\lambda) \right] \right\} \quad (2.2)$$

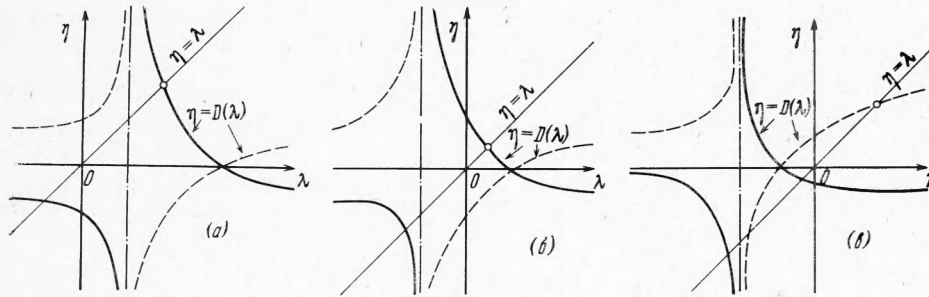
Подставляя (2.2) в (1.7), найдем значения  $\lambda$ .

Рассмотрим несколько различных случаев.

*Первый случай.* Предположим, что электромагнитное поле отсутствует, т. е. имеется чисто газодинамическое течение. Выражение (2.2) в этом случае имеет вид

$$D(\lambda) = -\kappa U_2 M_1^2 \frac{y'}{y} \frac{a(\lambda) - b(\lambda) + fc(\lambda)}{2a(\lambda) - (M_1^2 + 1)b(\lambda) + 2M_1^2 c(\lambda)} \xi \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что если  $a(\lambda)$  и  $c(\lambda)$  одного знака, а знак  $b(\lambda)$  противоположен знаку  $c(\lambda)$  при любых  $\lambda > 0$ , то газ на выходе из канала совершает положительную работу ( $u_2 p_2 > 0$ ), так как  $u_2 = -c / b p_2 - a / b r_2$  и возмущения  $u_2$  и  $p_2$  одного знака. В этом случае знак  $D(\lambda)$ , а следовательно, и знак  $\lambda$  в силу (1.7) определяется множителем  $y' / y$ . При  $y' > 0$ , т. е. в расширяющейся части канала, скачок устойчив, при  $y' < 0$  в сужающейся части канала скачок неустойчив. Этот результат справедлив и в том случае, если на выходе фиксируется только давление ( $c(\lambda) \neq 0$ ), плотность ( $a(\lambda) \neq 0$ ) или скорость ( $b(\lambda) \neq 0$ ). На этом основании в работе [1] сделан вывод о безразличии скачка к граничному условию справа.



Фиг. 1

Однако если условие (2.1) таково, что коэффициенты  $b(\lambda)$  и  $c(\lambda)$  одного знака (пусть  $a(\lambda) = 0$ ), т. е. положительная работа совершается над газом, то, как нетрудно видеть из (2.3), в зависимости от поведения отношения  $b(\lambda) / c(\lambda)$  могут представиться любые возможности. Пусть, например, величина  $b(\lambda) / c(\lambda)$  монотонно растет с ростом  $\lambda$ . Тогда, если при  $\lambda = 0$  числитель и знаменатель  $D(\lambda)$  положительны (фиг. 1, а) или числитель положителен, а знаменатель отрицателен (фиг. 1, б), то в расширяющемся канале ( $y' > 0$ ) скачок неустойчив, а при  $y' < 0$  устойчив. Если же при  $\lambda = 0$  числитель и знаменатель отрицательны, то скачок устойчив при  $y' > 0$  и неустойчив при  $y' < 0$  (фиг. 1, в).

На фиг. 1, а, б, в графически изображен результат подстановки (2.3) при  $a(\lambda) = 0$  и  $\text{sign } b(\lambda) = \text{sign } c(\lambda)$  в уравнение (1.7). Сплошными линиями дано  $D(\lambda)$  при  $y' > 0$ , штриховыми —  $-D(\lambda)$  при  $y' < 0$ . Пересечение кривой  $\eta = D(\lambda)$  с прямой  $\eta = \xi\lambda$  при  $\lambda > 0$  (на фиг. 1 эти точки обведены кружком) дает представление о том, при каких условиях скачок неустойчив.

*Второй случай.* Пусть электромагнитное поле задано. Для того чтобы продемонстрировать влияние электромагнитных эффектов, будем считать, что на выходе задается давление. Тогда знаменатель в (2.2) положителен и равен  $2U_2^3 R_2 (1 - z) / (\kappa - 1) z$ . Знак величины  $D(\lambda)$  и, соответственно,  $\lambda$  определяется знаком числителя  $D(\lambda)$ . Для устойчивости течения с ударной волной должно выполняться условие

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{(z - 1)}{z} U_2^2 f \frac{y'}{y} + K \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} f - \Phi \right) < 0 \quad (2.4)$$

Для течения с постоянной электропроводностью ( $\sigma = \text{const}$ ) величина  $K = \sigma B^2 U_2 R_2^{-1} (1 - 1/z) < 0$  и условие устойчивости приобретает простой вид

$$\Phi < [1 + 1/(\kappa - 1) M_2^2] \left( 1 + \frac{y' R_2 U_2}{y \sigma B^2} \right) \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, в частности, что при  $\sigma = \text{const}$  в режиме генерирования электроэнергии ( $\Phi > 1$ ) в прямом или расширяющемся канале ударная волна устойчива. Член с  $y'/y$  в правой части неравенства (2.5) показывает, что с расширением канала ( $y' > 0$ ) диапазон  $\Phi$ , при которых скачок устойчив, увеличивается, а с сужением канала уменьшается. С ростом параметра магнитогазодинамического взаимодействия ( $N = \sigma B^2 y / R_2 U_2$ ) член, содержащий  $y'/y$ , уменьшается по сравнению с единицей и при больших значениях  $N$  этим членом можно пренебречь.

Для случая  $\sigma \neq \text{const}$  могут представиться две возможности:  $\sigma_1 / \sigma_2 < 1$ , т. е. электропроводность за ударной волной возрастает;  $\sigma_1 / \sigma_2 > 1$ , т. е. электропроводность за ударной волной падает.

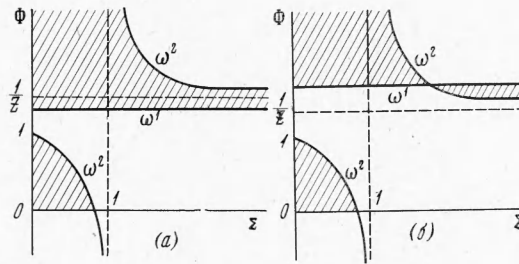
Условие устойчивости скачка при  $\sigma \neq \text{const}$  принимает вид

$$\omega^2 < \Phi < \omega^1 \quad \text{при } \Sigma < 1$$

$$\Phi < \min(\omega^1, \omega^2), \Phi > \max(\omega^1, \omega^2) \quad \text{при } \Sigma > 1 \quad (2.6)$$

$$\omega^{1,2} = \left\{ (1 - \Sigma) \left( 1 + \frac{1}{\kappa - 1} M_2^2 \right) + 1 - \Sigma/z \pm \left\{ \left[ (1 - \Sigma) \left( 1 + \frac{1}{\kappa - 1} \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times M_2^2 \right) - (1 - \Sigma/z)^2 + 4(1 - \Sigma)(1 - z) \left( 1 + \frac{1}{\kappa - 1} M_2^2 \right) \frac{y' R_2 U_2}{y \sigma_2 B^2 z} \right]^{1/2} \right\} \times [2(1 - \Sigma)]^{-1}$$

В прямом канале или при больших значениях параметра  $N$ , когда членом с  $y'$  можно пренебречь, условие (2.6) принимает более простой вид. В этом случае  $\omega^1 = 1 + 1/(\kappa - 1) M_2^2$ ,  $\omega^2 = (1 - \Sigma/z)(1 - \Sigma)^{-1}$ . Схематически области неустойчивости для различных значений  $\Sigma$  при  $y' = 0$  представлены на фиг. 2, а, б. Области неустойчивости заштрихованы. Сплошными линиями даны  $\Phi = \omega^1$ ,  $\Phi = \omega^2$ . Величина



Фиг. 2

$z = U_2 / U_1$  фиксирована. Из фиг. 2 видно, что скачки устойчивы для любых  $\Sigma$  при  $1 < \Phi < \omega^1$  (фиг. 2, а) или при  $1 < \Phi < 1/z$  (фиг. 2, б) в зависимости от взаимного расположения чисел  $\omega^1$  и  $1/z$ . При  $\Sigma \rightarrow 1$  область устойчивости по  $\Phi$ , как видно из фиг. 2, определяется по (2.5). При  $y' > 0$  область устойчивости по  $\Phi$  расширяется, а при  $y' < 0$  область устойчивости уменьшается.

Приведем некоторые численные примеры величин  $\omega^1, \omega^2$  для различных законов  $\sigma = \sigma(p, \rho)$ ,  $y' = 0$  и различных интенсивностей скачков.

$\kappa$	$M_1^2$	$\sigma_1/\sigma_2$	Критерий устойчивости по формуле (2.6)
Для $\sigma \sim P/R$			
1.2	1.5	0.92	$0 \leq \Phi < 8.396$
	10	0.508	$0 \leq \Phi < 30.76$
	100	0.092	$0.091 < \Phi < 55.64$
$5/3$	1.5	0.82	$0 \leq \Phi < 3.169$
	10	0.25	$0.3 < \Phi < 6.65$
	100	0.031	$0.9 < \Phi < 8.299$

Для $\sigma \sim (P/R)^2$			
1.2	1.5	0.86	$0 \leq \Phi < 8.396$
	100	0.0084	$0.92 < \Phi < 55.64$
5/3	1.5	0.67	$0.31 < \Phi < 3.169$
	10	0.063	$0.86 < \Phi < 6.65$
	100	0.00096	$0.99 < \Phi < 8.299$

Для $\sigma \sim P^{-1/2} \exp(P/R)$			
1.2	1.5	1.15	$\Phi > 8.396, \Phi < 4.31$
	5	1.45	$\Phi > 20.69, \Phi < 9.49$
	100	0.0005	$0.99 < \Phi < 55.64$
5/3	1.5	1.024	$\Phi > 15.21, \Phi < 3.169$
	10	0.17	$0.55 < \Phi < 6.65$
	100	0	$1 < \Phi < 8.299$

Из этих данных видно, что зависимость электропроводности от параметров течения существенно сказывается на устойчивости ударной волны. Так, при  $\sigma = \text{const}$  в режиме генерирования электроэнергии ударная волна устойчива при всех  $\Phi$ , обеспечивающих этот режим, а при  $\sigma \sim T^2$  она устойчива лишь в малом диапазоне изменения  $\Phi$ . Заметим, что это обстоятельство было отмечено и ранее в [4].

Покажем теперь, как влияет на устойчивость ударной волны в магнитогидродинамическом течении изменение граничных условий в выходном сечении канала. Пусть на выходе задано не давление, как предполагалось при получении критериев (2.5), (2.6), а скорость или плотность. В этом случае в формулах (2.5), (2.6), нужно заменить всюду член  $(1 + 1/(\kappa - 1)M_2^2)$  на  $\kappa/(\kappa - 1)$ .

Предположим теперь, что в граничное условие (2.1) не входит плотность, т. е.  $a(\lambda) = 0$ . Пусть для простоты  $\sigma = \text{const}$  и  $y' = 0$ . Тогда, если коэффициенты  $b(\lambda)$  и  $c(\lambda)$  противоположны по знаку, т. е. газ на выходе совершает положительную работу, то критерий устойчивости имеет вид

$$\Phi < \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{b(\lambda) - f c'(\lambda)}{b(\lambda) - c(\lambda)} \quad (2.7)$$

Из сравнения (2.7) и (2.5) видно, что здесь граница устойчивости по  $\Phi$  изменилась с изменением граничного условия, в то время как для газодинамического течения при  $u_2 p_2 \geq 0$  критерий сохранялся.

Если же коэффициенты  $b(\lambda)$  и  $c(\lambda)$  одного знака, то критерий устойчивости может весьма существенно меняться в зависимости от характера поведения величин  $b(\lambda)$  и  $c(\lambda)$ . Это исследование так же, как и для газодинамического течения, может быть проведено графически.

3. Предыдущее исследование справедливо для скачков, находящихся очень близко к выходному сечению. Для выяснения влияния течения за ударной волной на ее устойчивость представим решение уравнений (1.4) за скачком в виде ряда по  $\Delta x$  ( $\Delta x$  — координата, отсчитываемая от невозмущенного положения ударной волны). При исследовании ограничимся членами порядка  $\Delta x$ , которые дадут представление о характере этого влияния.

Запишем решение системы уравнений (1.4) в виде

$$u = u_2 + u_2' \Delta x, \quad \rho = \rho_2 + \rho_2' \Delta x, \quad p = p_2 + p_2' \Delta x$$

Ограничимся для простоты рассмотрением одного граничного условия на выходе  $p_b = 0$ . В принятом приближении имеем

$$p_b = p_2 + p_2' \Delta x = 0 \quad (3.1)$$

Выражение для величины  $D(\lambda)$  в этом случае имеет вид

$$D(\lambda) = \left\{ L^1 + \frac{\Delta x}{1 - M_2^2} \left[ L^2 \frac{y'}{y} + L^3 \frac{\lambda}{U_2} + L^4 \frac{\sigma_2 \alpha_2 \beta_2}{R_2 U_2^3} - \frac{\alpha_2 \gamma_2}{R_2 U_2^3} (R_2 \sigma_{p_2} L^5 + R_2 U_2^2 \sigma_{p_2} L^1) - \right. \right. \\ \left. \left. - L^5 \frac{\sigma_2 B \Gamma_2}{R_2 U_2^2} \right] \right\} \cdot \frac{2U_2(1-z)}{(\kappa-1)z} \left\{ 1 + \frac{\Delta x}{1 - M_2^2} \left[ G^1 \frac{y'}{y} + G^2 \frac{\lambda}{U_2} + G^3 \frac{\sigma_2 \alpha_2 \beta_2}{R_2 U_2^3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_2 \gamma_2}{R_2 U_2^3} \left( \frac{R_2 \sigma_{p_2}}{M_1^2} + R_2 U_2^2 \sigma_{p_2} \right) - G^4 \frac{\sigma_2 B \Gamma_2}{R_2 U_2^2} \right] \right\} \\ L^1 = \frac{(z-1)}{z} U_2^2 \left[ 1 + \frac{1}{(\kappa-1)M_2^2} \right] \frac{y'}{y} + \left[ 1 + \frac{1}{(\kappa-1)M_2^2} - \Phi \right] K \\ L^2 = - \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[ \frac{(\kappa-1)M_2^4 + M_2^2 + 1}{1 - M_2^2} \right] U_2^2 \frac{(z-1)y'}{z} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa M_2^4 + 1}{1 - M_2^2} K \left[ \frac{(\kappa-1)M_2^4 + M_2^2 + 1}{(\kappa M_2^4 + 1)(\kappa-1)/\kappa} - \Phi \right] \right\} \quad (3.2)$$

$$L^3 = \frac{(\kappa-1)M_2^2 + \kappa + 1}{(\kappa-1)} U_2^2 \frac{(z-1)y'}{z} + (1 + M_2^2) K \left[ \frac{(\kappa-1)M_2^2 + \kappa + 1}{(\kappa-1)(1 + M_2^2)} - \Phi \right]$$

$$L^4 = \frac{\kappa^2 M_2^2 (1 + \kappa M_2^2)}{(\kappa-1)(1 - M_2^2)} U_2^2 \frac{(z-1)y'}{z} + \frac{\kappa(\kappa+1)M_2^4}{(1 - M_2^2)} K \left[ \frac{1 + \kappa M_2^2}{(\kappa^2 - 1)M_2^2} - \Phi \right]$$

$$L^5 = \frac{\kappa}{\kappa-1} U_2^2 \frac{(z-1)y'}{z} + K \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} - \Phi \right)$$

$$\gamma_2 = U_2 B + (\kappa-1)M_2^2 \alpha_2, \quad \Gamma_2 = U_2 B + (2\kappa-1)M_2^2 \alpha_2$$

$$G^1 = \frac{\kappa M_2^4 + 1}{1 - M_2^2}, \quad G^2 = \frac{2M_1^2 M_2^2 + M_1^2 + 1}{2M_1^2}$$

$$G^3 = \frac{\kappa M_2^2}{2M_1^2 (1 - M_2^2)} [(2\kappa+1)M_1^2 M_2^2 + M_2^2 + M_1^2 - 1]$$

$$G^4 = \frac{M_1^2 + 1}{2M_1^2}$$

Рассмотрим и здесь несколько случаев.

*Первый случай.* Пусть электромагнитное поле отсутствует. Выражение для  $D(\lambda)$  приобретает вид

$$D(\lambda) = - U_2 \frac{1 + (\kappa-1)M_2^2}{2M_2^2} \frac{y'}{y} \frac{1 - \theta^1 \Delta x y' / y + \theta^2 \Delta x \lambda / U_2}{1 - \theta^3 \Delta x y' / y + \theta^4 \Delta x \lambda / U_2} \quad (3.3)$$

$$\theta^1 = \frac{\kappa M_2^2 [1 + M_2^2 + (\kappa-1)M_2^4]}{[1 + (\kappa-1)M_2^2] (1 - M_2^2)^2}, \quad \theta^2 = \frac{\kappa + 1 + (\kappa-1)M_2^2}{\kappa(1 - M_2^2)}$$

$$\theta^3 = \frac{1 + \kappa M_2^4}{(1 - M_2^2)^2}, \quad \theta^4 = \frac{(M_1^2 + 1)(2M_1^2)^{-1} + M_2^2}{1 - M_2^2}$$

Все коэффициенты  $\theta^{1,2,3,4}$  в выражении (3.3) положительны. При  $\Delta x = 0$  получаем формулу (2.3) при  $a = b = 0$  и  $c \neq 0$ , исследованную в предыдущем пункте. При  $\Delta x \neq 0$  знаменатель выражения (3.3) содержит разность  $1 - \theta^3 \Delta x y' / y$ , которая при числах Маха близких к единице и  $y' > 0$ , может стать отрицательной ввиду того, что  $\theta^3 \sim (1 - M_2^2)^2$  неограниченно растет при  $M_2 \rightarrow 1$ , что повлечет за собой изменение знака  $D(\lambda)$ , так как  $\theta^1 < \theta^3$ , и, следовательно, знака  $\lambda$ . Таким образом, слабые ударные волны могут оказаться неустойчивыми в расширяющейся части канала при граничном условии (3.1). Следует заметить, что ввиду малости  $\Delta x$  член  $1 - \theta^3 \Delta x y' / y$  только указывает тенденцию поведения  $D(\lambda)$  при учете решения системы (1.4) с принятой точностью. Для уточнения необходимо учесть члены  $\sim (\Delta x)^2$  и т. д.

При  $y' < 0$  члены, содержащие  $y' / y$  в числителе и знаменателе выражения (3.3), положительны, и поэтому повлиять на знак  $\lambda$  не могут.

*Второй случай.* Предположим, что электромагнитное поле задано,  $y' = 0$  и  $\sigma = \text{const}$ . Тогда выражение для  $D(\lambda)$  можно записать в виде

$$D(\lambda) = -\frac{(\kappa - 1) U_2 N}{2} \frac{[\kappa / (\kappa - 1) f - \Phi] + \Delta x N (1 - M_2^2)^{-1} \chi^3(\Phi)}{1 + \Delta x N (1 - M_2^2)^{-1} \chi^2(\Phi)} \quad (3.4)$$

где  $N = \sigma B^2 / R_2 U_2$ , а  $\chi^2(\Phi)$  и  $\chi^3(\Phi)$  полиномы соответственно второй и третьей степени относительно  $\Phi$ , коэффициенты которых есть функции  $\kappa$ ,  $M_2^2$  и  $\lambda$  и могут быть получены из (3.2). Исследование показало, что при малых  $\lambda$  и больших значениях параметра  $N$  знаменатель выражения (3.4) может стать отрицательным, что приведет к смене знака  $D(\lambda)$  и  $\lambda$ .

Раньше всего, т. е. при наименьших значениях  $\Delta x$ , неустойчивые режимы возникают вблизи

$$\Phi = \Phi^* = \frac{(2\kappa - 1)[(\kappa + 1) M_1^2 M_2^2 + M_2^2 - 1]}{(\kappa - 1)[(2\kappa + 1) M_1^2 M_2^2 + M_2^2 + M_1^2 - 1]}$$

при выполненном условии  $\kappa / (\kappa - 1) f - \Phi > 0$ .

Приведем некоторые значения  $\Delta x N$ .

$\kappa$	$M_1^2$	$f x / (\kappa - 1)$	$\Phi^*$	$\Delta x N$
1.2	1.1	6.498	3.35	0.002
	1.5	8.39	2.89	0.046
$5/3$	1.1	2.65	1.77	0.002
	1.5	2.95	1.58	0.038
2.0	1.1	2.10	1.45	0.001
	1.5	2.43	1.32	0.026

При значениях  $\Delta x N$  больше приведенных область неустойчивости в окрестности  $\Phi^*$  увеличивается.

Заметим, что и здесь член, содержащий  $\Delta x$ , в знаменателе выражения (3.4) только указывает тенденцию поведения  $D(\lambda)$  при учете течения за скачком.

В заключение отметим, что интересно было бы исследовать, каков должен быть конкретный вид граничного условия, выставляемого в выходном сечении канала в том или ином течении, изучаемом в одномерном приближении.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за обсуждение работы.

Поступила 20 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fundamentals of gas dynamics. Princeton Univ. Press., 1959. (Рус. перев.: Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
2. Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Некоторые особенности сверхзвукового течения электропроводного газа в МГД-канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1959, т. 23, № 6.
4. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.