

УДК 539.3

ОБ ОТСЛОЕНИИ ПОКРЫТИЯ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. О. Ватульян, К. Л. Морозов

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону, Россия

E-mails: vatulyan@math.rsu.ru, morozovkl1996@gmail.com

С использованием известных моделей исследован процесс отслоения от упругого основания предварительно сжатого покрытия, подробно изучено соответствующее трансцендентное уравнение, доказано существование решения в некотором диапазоне значений параметров, получены простые формулы для критического значения. С помощью процедуры линеаризации и метода Рунге изучено закритическое поведение покрытия. Предложен способ упрощения рассматриваемой задачи путем решения на участке отслоения задачи для балки с граничными условиями винклеровского типа, проведена оценка такого упрощения.

Ключевые слова: покрытие на упругом основании, отслоение, трансцендентное уравнение, закритическое поведение, метод Рунге.

DOI: 10.15372/PMTF20200112

Введение. Моделирование отслоения покрытия, лежащего на упругом основании, проводится при изучении процесса отслоения предварительно напряженных тонких пленок, широко используемых в современной микроэлектронике, при производстве интегральных схем, датчиков, сенсоров и т. д.

В результате воздействия продольных сжимающих сил в области, где уже произошло отслоение, наблюдается потеря устойчивости (выпучивание) покрытия, аналогичная эйлеровой упругой неустойчивости стержня. Исследованию потери устойчивости такой структуры посвящено большое количество работ, среди которых следует отметить работы [1–7], где этот процесс достаточно подробно изучен с использованием различных моделей.

В основополагающей работе [1] рассматривался случай жесткой подложки с прямолинейной поверхностью, найдены критическое значение напряжения, при котором происходит потеря устойчивости, и коэффициенты интенсивности напряжений на границе отслоившегося участка, представлявшегося в виде заземленной по краям пластины.

В работах [2, 3] изучалось влияние жесткости подложки на потерю устойчивости. В частности, в [2] исследовано влияние жесткости подложки на скорость выделения энергии при отслоении от нее пленки. В [3] модель построена аналогично тому, как это сделано в работе [2], а условие потери устойчивости, скорость высвобождения энергии и взаимодействие двух структур представляются в виде функций упругого рассогласования между пленкой и подложкой. Установлено, что чем более податлива подложка, тем при мень-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-11-00069).

© Ватульян А. О., Морозов К. Л., 2020

шей величине нагрузки отслаивается пленка и тем больше скорость высвобождения энергии. Эта скорость больше, когда модуль упругости подложки существенно меньше модуля упругости пленки.

В работе [4] с помощью метода конечных элементов исследовано поведение покрытия после его отслоения от подложки, выполненной из поликарбоната. Показано, что для подложек из мягких материалов потеря устойчивости происходит при меньших критических нагрузках, чем для подложек, изготовленных из жестких материалов. Также выявлена закономерность, позволившая установить связь между отклонением от положения равновесия пленки и напряжением для любой системы покрытие — подложка.

В случае хрупкого покрытия его деформирование приводит к образованию трещин. В работе [5] исследован механизм образования трещин для многослойных структур, что позволяет предсказать отслоение в технологически важных системах с покрытиями. В [5] также разработаны методы измерений таких характеристик, как вязкость отслаивания и напряжения в слоях. Исследовано отслоение алмазоподобных углеродных пленок от плоских стеклянных подложек и термобарьерного многослойного покрытия.

В работе [6] аналитическим путем определены коэффициенты упругости заделки. В более поздних работах рассматривалось отслоение покрытия от подложки при изменении температуры на границе покрытия [7], изучена модель поведения термобарьерных покрытий под действием температурных напряжений [8], а также их напряженно-деформированное состояние после отслоения [9]. В работе [10] исследованы более сложные для анализа системы, состоящие из упругих полос.

В настоящей работе исследование проводится с использованием результатов работы [11], в которой решена задача о потере устойчивости при осевом сжатии бесконечного покрытия, частично покоящегося на упругом основании. В предположении малости деформаций использовалось дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, сформулированы условия склейки решений, построено трансцендентное уравнение, связывающее жесткость основания и критическую силу. Численно найдено решение этого уравнения и определена соответствующая собственная форма выпучивания, в рамках линеаризованного подхода на основе метода конечных элементов изучено закритическое поведение покрытия.

В работе [12] с использованием результатов решения краевой задачи, полученных в [11], разработана более общая модель деформирования упругой полосы, численно изучено соответствующее трансцендентное уравнение.

В данной работе выполнено упрощение полученного в [11] трансцендентного уравнения, что позволило провести его достаточно полное исследование, математически строго доказать наличие корня в различных диапазонах параметров задачи, получить приближенные формулы для критической нагрузки при малых и больших значениях коэффициента податливости основания. Предложен способ определения коэффициентов упругости, проведено сравнение полученного решения с точным решением для бесконечного покрытия, определена область применимости такого подхода. На основе асимптотического подхода [13, 14] с использованием метода Ритца изучено закритическое поведение покрытия.

1. Постановка линейной задачи и ее исследование. Рассматривается упругое бесконечное покрытие, частично лежащее на упругом основании (будем считать, что отслоение произошло на участке $[-a, a]$). Для области, в которой покрытие покоилось на основании, имеет место уравнение равновесия [15, 16]

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + cW = -P \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad (1.1)$$

где W — прогиб покрытия; P — продольная сила; E — модуль Юнга; J — момент инерции поперечного сечения; c — коэффициент жесткости упругого основания.

В области, где произошло отслоение, основание не взаимодействует с подложкой, и уравнение равновесия имеет вид

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} = -P \frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (1.2)$$

В работе [11] в размерных переменных получено трансцендентное уравнение, связывающее критическую силу P и жесткость основания c . Если ввести безразмерную координату $x = a\xi$ и безразмерные параметры, характеризующие безразмерную силу, жесткость и прогиб соответственно: $k^2 = Pa^2/(EJ)$, $\eta^2 = ca^4/(EJ)$, $W_1 = Wa^{-1}$, то уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$W_1^{IV} + k^2 W_1'' + \eta^2 W_1 = 0; \quad (1.3)$$

$$W_1^{IV} + k^2 W_1'' = 0. \quad (1.4)$$

Далее будем рассматривать случай, когда выполнено условие

$$2\eta > k^2. \quad (1.5)$$

Тогда корни характеристического уравнения для (1.3) имеют следующую структуру:

$$\lambda_{11} = \alpha + i\beta, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{11}, \quad \lambda_{21} = -\bar{\lambda}_{11}, \quad \lambda_{22} = \bar{\lambda}_{11}. \quad (1.6)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{2\eta - k^2}/2$; $\beta = \sqrt{2\eta + k^2}/2$.

Построим решения уравнений (1.3), (1.4). Используя условия сопряжения в точках $\xi = \pm 1$, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, причем из условия существования нетривиального решения следует трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} k = k\sqrt{2\eta - k^2}/(k^2 - \eta). \quad (1.7)$$

Трансцендентное уравнение (1.7) связывает безразмерные параметры k и η . В работе [11] это уравнение исследовалось численно. Ниже проводится его аналитическое исследование.

Решения уравнения (1.7) существуют при выполнении условия (1.5). Разрешая уравнение (1.7) относительно η , получаем два решения:

$$\frac{\eta_1}{k^2} = \frac{1}{1 - \cos k}, \quad \frac{\eta_2}{k^2} = \frac{1}{1 + \cos k}.$$

Заметим, что решение $\eta_1(k)$ удовлетворяет исходному уравнению (1.7) при $k \in [\pi, 2\pi]$, а решение $\eta_2(k)$ — при $k \in [0, \pi]$. Оба решения можно записать в виде

$$k^2 = \eta(1 - \cos k); \quad (1.8)$$

$$k^2 = \eta(1 + \cos k). \quad (1.9)$$

Докажем, что при ограничении (1.5) уравнение (1.7) имеет единственное решение на отрезке $k \in [0, \pi]$. Для этого введем функцию

$$f(\eta, k) = k^2 - \eta(1 + \cos k). \quad (1.10)$$

Заметим, что при любом фиксированном значении η функция (1.10) одной переменной k имеет разные знаки на концах отрезка $[0, \pi]$ в силу соотношений $f(\eta, 0) = -2\eta < 0$, $f(\eta, \pi) = \pi^2 > 0$ и монотонно возрастает в силу того, что производная положительна: $f'_k(\eta, k) = 2k + \eta \sin k > 0$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi]$ существует единственное значение $k_*(\eta)$, являющееся корнем рассматриваемого уравнения. Для того чтобы уменьшить отрезок, на котором имеется корень, полагаем $f_0(\eta) = f(\eta, \pi/2) = \pi^2/4 - \eta$. Рассмотрим случаи $f(\eta, \pi/2) > 0$ и $f(\eta, \pi/2) < 0$.

1. В случае условно мягкого основания, который характеризуется небольшими значениями параметра η , выполнено условие $\pi^2/4 - \eta > 0$. Тогда $f(\eta, \pi/2) > 0$ и $k_*(\eta) \in [0, \pi/2]$. Соответствующее значение критической силы для этого случая равно $P_{кр} = EJk_*^2/a^2$ и меньше значения критической силы $P_1 = \pi^2 EJ/(4a)$ для шарнирно опертой балки длиной $2a$.

2. В случае условно жесткого основания $\pi^2/4 - \eta < 0$. Тогда $f(\eta, \pi/2) < 0$ и $k_* \in [\pi/2, \pi]$. Нетрудно показать, что соответствующее значение $P_{кр} = EJk_*^2/a^2$ находится между значениями критических сил P_1 для шарнирно опертой балки длиной $2a$ и $P_2 = \pi^2 EJ/a^2$ для жесткозащемленной балки длиной $2a$.

Аналогично докажем, что при ограничении (1.5) уравнение (1.7) имеет единственное решение на отрезке $k \in [\pi, 2\pi]$. Для этого введем функцию

$$g(\eta, k) = k^2 - \eta(1 - \cos k). \quad (1.11)$$

Функция (1.11) при $k \in [\pi, 2\pi]$ меняет знак при выполнении неравенства $g(\eta, \pi)g(\eta, 2\pi) < 0$, что верно при $\eta > \pi^2/2$, и монотонно возрастает в силу того, что производная положительна: $g'_k(\eta, k) = 2k - \eta \sin k > 0$. Следовательно, на отрезке $[\pi, 2\pi]$ также существует единственное значение $k_{**}(\eta)$, являющееся корнем рассматриваемого уравнения. Поскольку $k_{**}(\eta) > k_*(\eta)$ и представляет интерес наименьшее собственное значение, далее ограничимся исследованием этого значения.

Следует отметить, что для случая $k \in [0, \pi]$ при малых значениях η (случай 1) несложно получить приближенную формулу для определения критического значения k_* , которое также мало. Используя разложение в ряд Маклорена, справедливое при малых k , из уравнения (1.9) получаем

$$k^2 = 4\eta/(2 + \eta) = 2\eta - \eta^2 + O(\eta^3), \quad \eta \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

С помощью формулы (1.12) и соотношений для α, β в (1.6) построим следующие асимптотические представления для α, β при малых η , сохраняя два слагаемых в разложении по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2\eta - k^2}/2 = \eta\sqrt{1 - 0,5\eta}/2 + O(\eta^3) = 0,5\eta - 0,125\eta^2 + O(\eta^3), \\ \beta &= \sqrt{2\eta + k^2}/2 = \sqrt{\eta}\sqrt{1 + 0,25\eta} + O(\eta^{3/2}) = \sqrt{\eta} - 0,125\eta^{3/2} + O(\eta^{3/2}), \\ &\eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Также можно построить асимптотику критического значения на отрезке $[0, \pi]$ для условно жесткого покрытия, соответствующего большим значениям η . Нетрудно показать, что в этом случае асимптотическое значение k близко к π . Для уточнения корня положим $k = \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подставляя это представление в (1.9), получаем квадратное уравнение $\varepsilon^2(1 - 0,5\eta) - 2\pi\varepsilon + \pi^2 = 0$, из которого определяется положительная величина ε . Сохраняя главные слагаемые, можно получить следующее представление для критического значения при больших значениях η :

$$k = \pi(1 - \sqrt{2}\eta^{-1/2} + 2\eta^{-1} + O(\eta^{-3/2})). \quad (1.13)$$

Аналогично можно построить асимптотику ближайшего к 2π критического значения при больших значениях η :

$$k = 2\pi(1 - \sqrt{2}\eta^{-1/2} + 2\eta^{-1} + O(\eta^{-3/2})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. С использованием соотношений (1.8), (1.9) нетрудно показать, что при больших значениях η значения корней исходного уравнения (1.7) приближаются к значениям корней уравнений $\cos k = \pm 1$, $k = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$

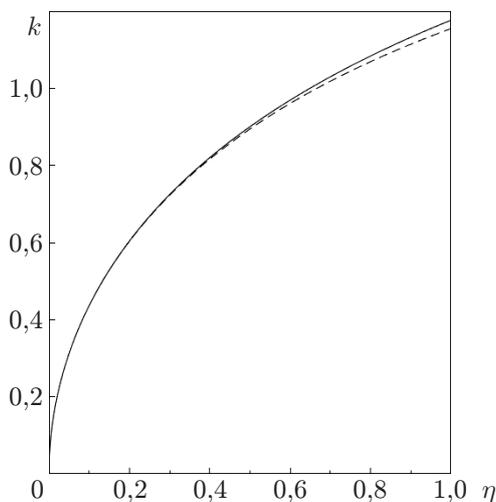


Рис. 1. Зависимости $k(\eta)$, полученные на основе точного решения (сплошная линия) и приближенного решения (штриховая линия)

Таблица 1

Значения асимптотического решения k_0
и точного решения k при различных значениях η

η	k	k_0
10	2,1424	2,3649
10^2	2,7502	2,7601
10^3	3,0070	3,0074
10^4	3,1867	3,0978
10^5	3,1557	3,1276

На рис. 1 представлены зависимости $k(\eta)$, полученные на основе точного решения (1.9) и приближенного решения (1.12) при малых значениях η .

Для оценки точности полученных формул в табл. 1 приведены результаты вычисления параметра k по точной формуле (1.9) и с помощью асимптотического разложения (1.13) при больших значениях параметра η .

На рис. 2 показаны нормированные собственные формы для двух рассмотренных выше случаев условно мягкого и условно жесткого оснований. Видно, что при малых η собственная форма прогиба осциллирует, причем число осцилляций уменьшается с увеличением η .

С использованием асимптотических формул (1.12), (1.13) для критического значения k при малых и больших значениях параметра η построим асимптотику собственных форм для значений параметра жесткости $\eta = 0,1; 10,0$ (рис. 3). На рис. 3,а разность точного и асимптотического решений при $\xi = 0$ равна нулю, при $\xi = 10^{-5}$ — 0,415, при $\xi = 15 \cdot 10^{-4}$ также равна нулю.

2. Построение упрощенной балочной модели. В случае отслоившегося покрытия возможно упрощение исходной задачи путем сведения ее к краевой задаче для уравнения (1.4) с модифицированными граничными условиями при $x = \pm a$. В работе [3] сформулировано условие упругой заделки, в работе [6] — граничное условие типа условия упругого шарнира. При этом помимо условия равенства нулю прогиба принималось условие, связывающее момент и угол поворота сечения. В данной работе граничные условия и коэффициенты, входящие в граничные условия, находятся с использованием вариационного принципа. Для построения такой схемы упростим функционал потенциальной

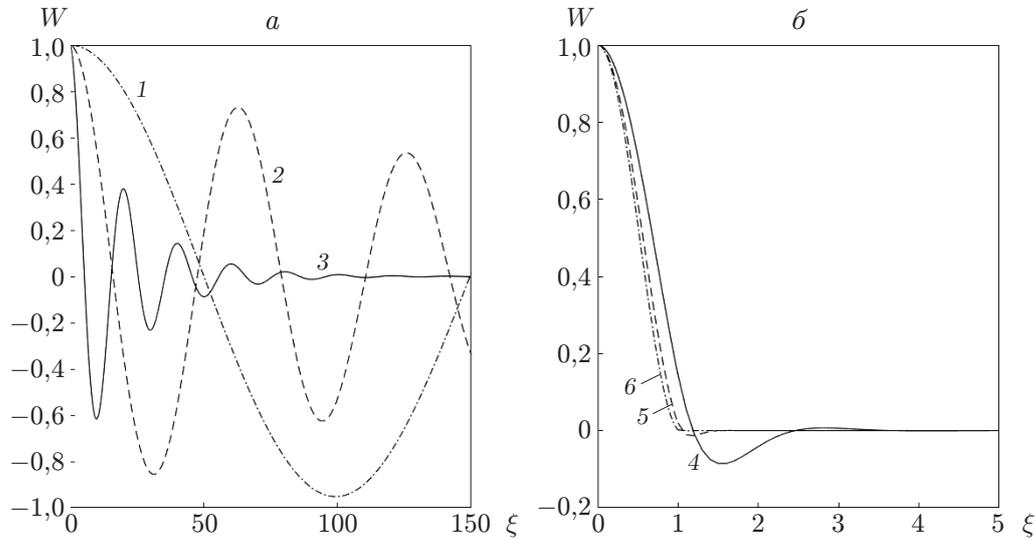


Рис. 2. Собственные формы для условно мягкого (а) и условно жесткого (б) оснований при различных значениях η :

1 — $\eta = 0,001$, 2 — $\eta = 0,01$, 3 — $\eta = 0,1$, 4 — $\eta = 10$, 5 — $\eta = 100$, 6 — $\eta = 1000$

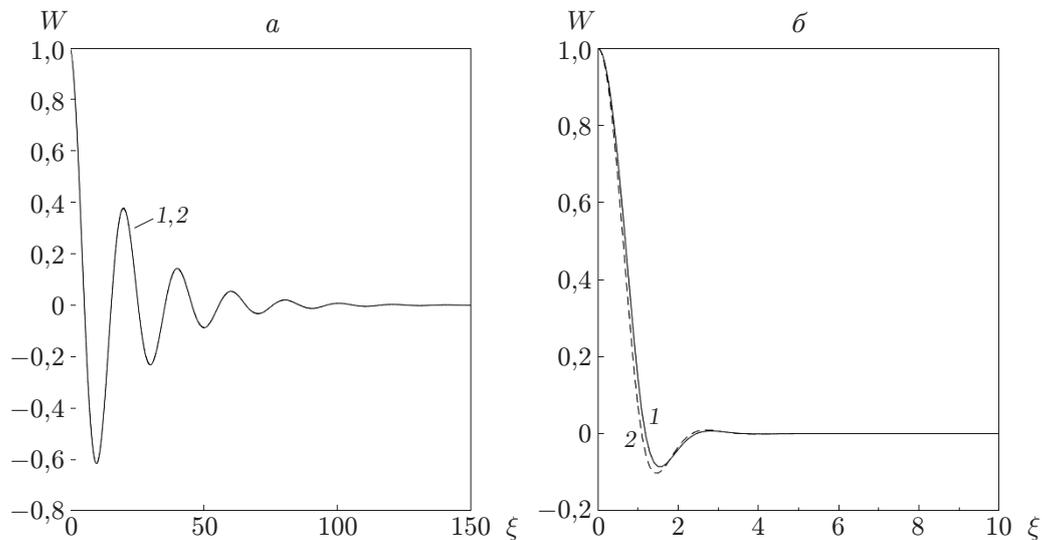


Рис. 3. Собственные формы (1) и их асимптотики (2) при различных значениях η :

а — $\eta = 0,1$, б — $\eta = 10$

энергии [13]:

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_{-\infty}^{\infty} W''^2 (1 + W'^2) dx - P \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} W'^2 + \frac{1}{8} W'^4 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} cW^2 dx. \quad (2.1)$$

Полагая, что функция W является четной вследствие симметрии задачи, сохраним в (2.1) квадратичные слагаемые, которые в безразмерных переменных, введенных в п. 1,

имеют вид

$$U_1 = \frac{1}{4} \int_0^1 G_1 d\xi + \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} G_2 d\xi = U_{10} + U_{11},$$

$$G_1 = W_1''^2 - k^2 W_1'^2, \quad G_2 = W_1''^2 - k^2 W_1'^2 + \eta^2 W_1^2. \quad (2.2)$$

Выполним оценку части потенциальной энергии U_{11} . На отрезке $[1, \infty)$ функцию W_1 , входящую в выражение для U_{11} , заменим на убывающую функцию вида $W_1 = (d_1 + (d_1\gamma + d_2)(\xi - 1)) e^{-\gamma(\xi-1)}$, где γ — пока произвольный положительный параметр (заметим, что $W_1(1) = d_1$, $W_1'(1) = d_2$). Тогда имеем представление U_{11} в виде квадратичной формы

$$U_{11} = a_{11}d_1^2 + a_{22}d_2^2 + a_{12}d_1d_2,$$

где коэффициенты формы a_{11} , a_{22} , a_{12} определяются с использованием выражения для G_2 в (2.2) при $\gamma = \alpha$ и имеют следующее представление:

$$a_{11} = \frac{1}{32} \frac{5k^4 - 12\eta k^2 + 84\eta^2}{(2\eta - k^2)^{1/2}}, \quad a_{22} = \frac{1}{8} \frac{9k^4 - 28\eta k^2 + 36\eta^2}{(2\eta - k^2)^{3/2}}, \quad a_{12} = \frac{1}{4} \frac{k^4 - 4\eta k^2 + 20\eta^2}{2\eta - k^2}.$$

Проварьируем функционал U_1 . Интегрируя представление вариации по частям и приравняв δU_1 к нулю, получаем

$$\begin{aligned} & -W_1''(0) \delta W_1'(0) + (W_1'''(0) + k^2 W_1'(0)) \delta W_1(0) + \\ & + (W_1''(1) + a_{22} W_1'(1) + 0,5 a_{12} W_1(1)) \delta W_1'(1) + \\ & + (-W_1'''(1) - k^2 W_1'(1) + a_{11} W_1(1) + 0,5 a_{12} W_1'(1)) \delta W_1(1) + \\ & + \int_0^1 \delta W_1 (W_1^{IV} + k^2 W_1'') dx = 0. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при независимых вариациях, находим

$$\begin{aligned} W_1^{IV} + k^2 W_1'' &= 0, \\ W_1''(1) + a_{22} W_1'(1) + 0,5 a_{12} W_1(1) &= 0, \\ -W_1'''(1) + a_{11} W_1(1) + (0,5 a_{12} - k^2) W_1'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Общим решением уравнения в (2.3) является выражение $W_1 = C_1 \cos(kx) + C_2$. В качестве параметра γ , определяющего скорость убывания экспоненты, содержащейся в точном решении, примем α из соотношения (1.7).

Из условия существования нетривиального решения задачи (2.3) следует трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} k = 4ka_{11}/(a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}). \quad (2.4)$$

В работе [6] на основе указанных выше граничных условий для упругого шарнира построено аналогичное трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi\sqrt{\gamma_0}) + d_0\beta_1\pi\sqrt{\gamma_0} = 0, \quad (2.5)$$

где γ_0 — коэффициент, связывающий величины критических напряжений в случае упругой и жесткой заделки: $\sigma_{\text{кр}}^{y,3} = \gamma_0 \sigma_{\text{кр}}^{ж,3}$; $\beta_1 = (h/a) \sqrt[3]{E^*/E_s}$; h — толщина покрытия; a — половина длины участка отслоения; $E^* = E/(1 - \nu^2)$, $E_s^* = E_s/(1 - \nu_s^2)$, E , E_s , ν , ν_s — модули

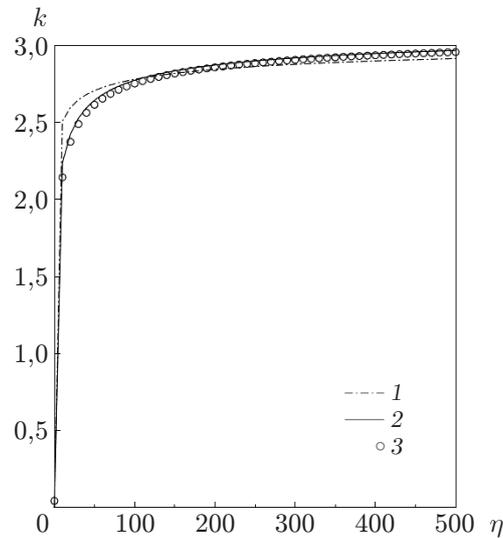


Рис. 4. Зависимости $k(\eta)$, полученные по формулам (2.4), (1.9), (2.5):
 1 — решение трансцендентного уравнения (2.5), 2 — решение трансцендентного уравнения (2.4), 3 — аналитическое решение (1.9)

упругости и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки соответственно; d_0 — коэффициент, для определения которого используется коэффициент пропорциональности между углом наклона в заделке и второй производной от смещения: $d = d_0 \sqrt[3]{E^*/E_s^*}$, причем согласно данным, представленным в [6], $d_0 \approx 0,636$. При проведении расчетов будем полагать, что $ha^{-1} = 10^{-1}$, а отношение $E^*E_s^{*-1}$ изменяется в диапазоне от 1 до 1000.

Ниже проводится сравнение критических значений k , полученных из уравнений (2.4) и (2.5). Фиксируя параметр η , находим значение k из (2.4) и сравниваем его со значениями k , полученными из (1.9) и (2.5) (рис. 4). Из рис. 4 следует, что результаты расчетов, полученные из решения (2.4), более близки к аналитическому решению при всех значениях параметра η , за исключением малых значений. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что коэффициенты упругой заделки можно определить с использованием вариационного способа.

Ниже исследуется закритическое поведение покрытия с использованием данных [13, 14].

3. Закритическое поведение покрытия. При исследовании закритического поведения покрытия используем подход, описанный в [13]. Запишем выражение для полной потенциальной энергии покрытия в безразмерном виде

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W'^2(1 + W'^2) dx - k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} W'^2 + \frac{1}{8} W'^4 \right) dx + \frac{1}{2} \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} W^2 dx, \quad (3.1)$$

где $k > k_*$.

Сначала используем метод Ритца для линейризации квадратичного функционала в (3.1). Будем искать решение в виде $W = \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k$.

Координатные функции выберем таким образом, чтобы они убывали на бесконечности. Проведем сравнение результатов, полученных с использованием различных координатных функций. Это позволяет выбрать функции, которые обеспечивают более быструю

Таблица 2

Собственные значения, полученные методом Ритца при различных значениях N , и точное значение k , полученное по формуле (1.10), при $\eta = 10^{-2}$

k	k_1	k_2	k_3	N
0,141	1,356	0,179	0,181	2
	0,929	0,153	0,143	5
	0,560	0,145	0,141	15

Таблица 3

Значения k_3 и точные значения k при фиксированном количестве координатных функций (3.4) при $N = 15$

η	k	k_3	Δ
10^{-3}	0,045	0,045	0
10^{-2}	0,141	0,141	0
10^{-1}	0,437	0,437	0
10	2,142	2,145	0,003
10^2	2,750	2,762	0,012
10^3	3,007	3,052	0,045

сходимось к точному значению k , полученному на основе уравнения (1.10):

$$\varphi_n = \xi^{2(n-1)} e^{-\xi^2}; \tag{3.2}$$

$$\varphi_n = \xi^{2(n-1)} e^{-\alpha\xi^2}; \tag{3.3}$$

$$\varphi_n = \xi^{2(n-1)} e^{-0,125\alpha\xi^2}. \tag{3.4}$$

Здесь $n = 1, 2, \dots, N$.

Результаты расчетов приведены в табл. 2, 3. Параметры k_1, k_2, k_3 получены с использованием координатных функций (3.2), (3.3), (3.4) соответственно. В табл. 2 приведены результаты расчетов при $\eta = 10^{-2}$. Из табл. 2 следует, что даже при $N = 5$ результаты различаются на величину порядка 1 %. В табл. 3 представлены результаты расчетов при $N = 15$ и различных значениях η . В последней графе указаны значения невязки Δ . Данные, приведенные в табл. 3, свидетельствуют о достаточно большой точности расчетов.

Для дальнейшего изучения закритического поведения покрытия выберем координатные функции (3.4). Найдя минимальные значения функционала (3.1) для различного числа координатных функций, получаем нелинейную систему N уравнений относительно $C_i, i = 1, \dots, N$ [17], с использованием которой определяем C_k и строим график решения W .

В случае $\eta = 10$ при $N = 2$ выражение для функционала (2.2) принимает вид

$$U = 0,747C_2^2 + 0,684C_1^2 + 0,692C_1^2C_2^2 - 0,183C_1C_2^3 - 0,932C_1^3C_2 + \dots + 0,025C_2^4 + 0,522C_1^4.$$

Увеличивая число координатных функций, построим прогиб на одном из симметричных участков. Начальное значение параметра k принимается в соответствии с работой [15], в которой установлено, что наибольшая амплитуда прогиба имеет место при $k/k_* = 1,75$.

На рис. 5 показаны формы прогибов при различном количестве координатных функций N .

На рис. 6 представлены амплитуды прогибов при $N = 9$ и различных значениях параметра η ($k/k_* = 1$), соответствующих условно мягкому и условно жесткому основаниям. Из рис. 6 следует, что с увеличением значения параметра жесткости основания выпучивание локализуется на участке $\xi \in [0; 1]$, причем чем больше жесткость основания, тем меньше амплитуда отслоения.

Заключение. Анализ результатов исследования отслоения покрытия от оснований с различной жесткостью позволил сделать вывод, что при больших параметрах жесткости отслоение локализовано на отрезке $\xi \in [-1; 1]$, причем чем меньше жесткость основания, тем больше амплитуда прогиба и размеры зоны, в которой происходит выпучивание. При больших значениях параметра жесткости основания отслоение от покрытия порядка 10^{-4} . Значительно более сложным представляется закритическое поведение покрытий, имеющих

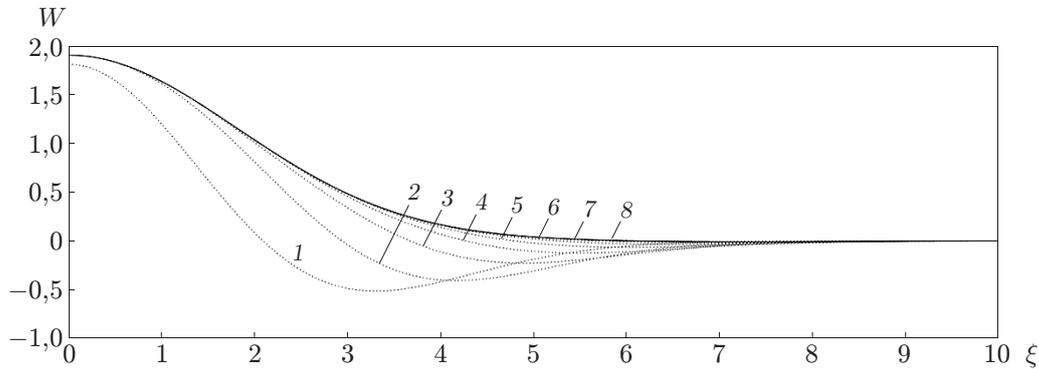


Рис. 5. Формы прогибов при $\eta = 10$ и различном количестве координатных функций N :

1 — $N = 2$, 2 — $N = 3$, 3 — $N = 4$, 4 — $N = 5$, 5 — $N = 6$, 6 — $N = 7$, 7 — $N = 8$, 8 — $N = 9$

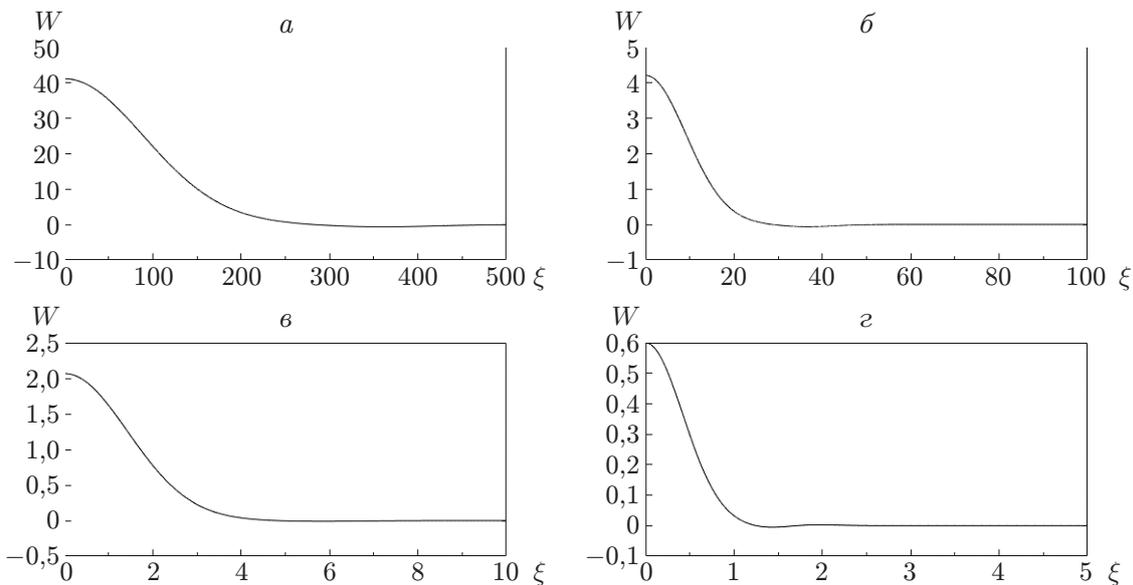


Рис. 6. Амплитуды прогибов при $N = 9$ и различных значениях параметра жесткости основания:

a — $\eta = 0,001$, $б$ — $\eta = 0,1$, $в$ — $\eta = 10$, $г$ — $\eta = 1000$

малую жесткость. При малом параметре жесткости форма прогиба при отслоении покрытия осциллирует и зона отслоения распространяется на достаточно большое расстояние от начала координат, причем с уменьшением параметра жесткости максимальная амплитуда прогиба покрытия увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hutchinson J. W., Suo Z.** Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1992. V. 29. P. 63–191.
2. **Cotterell B., Chen Z.** Buckling and cracking of thin films on compliant substrates under compression // Intern. J. Fracture. 2000. V. 104, N 2. P. 169–179.
3. **Yu H.-H., Hutchinson J. W.** Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Intern. J. Fracture. 2002. V. 113. P. 39–55.

4. **Parry G., Colin J., Coupeau C., et al.** Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations // *Acta Materialia*. 2005. V. 53. P. 441–447.
5. **Faulhaber S., Mercera C., Moon M.-W., et al.** Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. P. 1004–1028.
6. **Гольдштейн Р. В., Устинов К. Б., Ченцов А. В.** Оценка влияния податливости подложки на напряжения, вызывающие потерю устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычисл. механика сплош. сред.* 2011. Т. 4, № 3. С. 48–57.
7. **Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.** Отслоение покрытий под действием термоупругих напряжений (Балочное приближение) // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств.-науч. сер.* 2007. № 4. С. 66–83.
8. **Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матолыгина Н. Ю., Панин С. В.** Моделирование отслоения термобарьерных покрытий под действием температурных напряжений // *Изв. вузов. Физика*. 2011. Т. 54, № 10. С. 123–130.
9. **Люкшин П. А., Люкшин Б. А., Матолыгина Н. Ю., Панин С. В.** Напряженно-деформированное состояние термобарьерного покрытия на упругом основании после потери устойчивости покрытия // *Физ. мезомеханика*. 2017. № 4. С. 52–62.
10. **Устинов К. Б.** О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Ч. 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2015. № 4. С. 226–245.
11. **Кургузов В. Д.** Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // *Вычисл. механика сплош. сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 91–99.
12. **Ватульян А. О., Плотников Д. К., Коссович Е. Ю.** О некоторых особенностях индентирования трещиноватых слоистых структур // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2017. № 4. С. 94–100.
13. **Астапов Н. С., Корнев В. М.** Закрытическое поведение идеального стержня на упругом основании // *ПМТФ*. 1994. Т. 35, № 2. С. 130–142.
14. **Астапов Н. С., Демешкин А. Г., Корнев В. М.** Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // *ПМТФ*. 1994. Т. 35, № 5. С. 106–112.
15. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
16. **Тимошенко С. П.** О продольном изгибе стержней в упругой среде // *Изв. С.-Петербург. политехн. ин-та*. 1907. Т. 7, кн. 3. С. 95–113.
17. **Кеч В.** Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. М.: Мир, 1978.

*Поступила в редакцию 19/IV 2019 г.,
после доработки — 15/VII 2019 г.
Принята к публикации 29/VII 2019 г.*