

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ, ПОДВЕРГНУТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

А. М. Липанов, С. А. Карсканов

Институт прикладной механики УрО РАН, 426067 Ижевск

E-mails: ipm@udman.ru, ser@udman.ru

Анализируются результаты параметрического исследования стационарных несимметричных потоков. Методом установления решаются трехмерные нестационарные уравнения гидромеханики для сжимаемой среды. Рассматривается диапазон значений характерного числа Рейнольдса $Re = 60 \div 350$. Показано, что при $Re = 90$ симметричный поток становится асимметричным. Для воздуха это значение можно считать пороговым. В рассмотренных примерах вследствие асимметричности струи в окрестности левой границы области интегрирования верхняя отрывная зона оказывается меньше нижней. Определена зависимость размеров отрывных зон от числа Рейнольдса.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики, число Рейнольдса, число Маха, число Прандтля, область интегрирования, отрывная зона.

Стационарные ламинарные потоки, в отличие от нестационарных ламинарных и турбулентных потоков, хорошо изучены и экспериментально, и теоретически [1]. Тем не менее подробных параметрических исследований, в частности для сжимаемых сред, не проводилось.

Вдали от левой границы канала (от входа в канал) сжимаемый симметричный ламинарный поток становится одномерным и для него выполняется равенство

$$\rho U = \text{const},$$

где ρ — функция скорости U газа. В результате для сжимаемого ламинарного потока не реализуется профиль Пуазейля [2]. Если значение характерного числа Рейнольдса Re больше некоторого значения Re_1 , то ламинарный поток становится асимметричным [3]. Рассматриваемый в работе диапазон значений числа Рейнольдса $Re = 60 \div 350$ характерен для различных технических устройств (водопроводные трубы, каналы газодинамической связи в летательных аппаратах и т. д.).

Для исследования ламинарных симметричных и несимметричных потоков сжимаемых сред будем рассматривать канал со скачком площади поперечного сечения на его входе (рис. 1). Канал представляет собой полость между двумя обтекаемыми поверхностями, не ограниченную в направлении координаты z .

Решается следующая система трехмерных нестационарных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0,$$

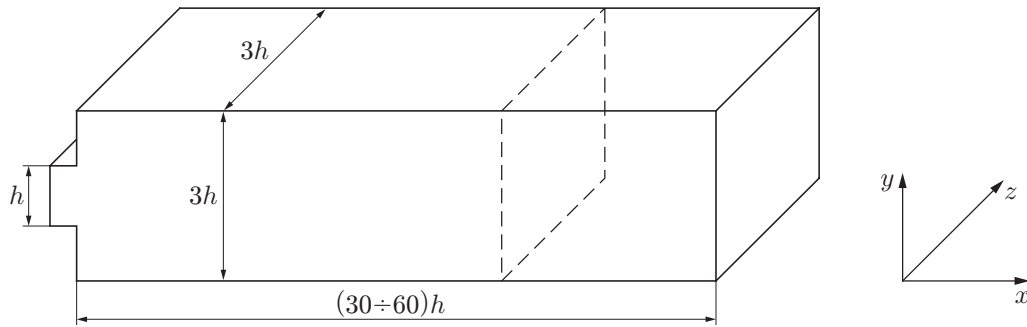


Рис. 1. Область интегрирования

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{k M^2} + \rho U^2 \right) + \frac{\partial \rho UV}{\partial y} + \frac{\partial \rho UW}{\partial z} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right\}, \\
 & \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho VU}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{k M^2} + \rho V^2 \right) + \frac{\partial \rho VW}{\partial z} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\}, \\
 & \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \rho WU}{\partial x} + \frac{\partial \rho WV}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{k M^2} + \rho W^2 \right) = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \right\}, \\
 & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{p}{k M^2} + \rho E \right) U \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{p}{k M^2} + \rho E \right) V \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{p}{k M^2} + \rho E \right) W \right] = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[V \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \right. \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[W \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[W \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - \\
 & \quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[V \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[V \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[W \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(W \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{(k-1) M^2 \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right\}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Уравнения (1) записаны в безразмерных переменных в ортогональной декартовой системе координат и имеют дивергентную форму. В результате под знаками частных производных по времени оказываются следующие параметры: плотность газа ρ ; компоненты вектора плотности тока ρU , ρV , ρW ; полная энергия единицы объема ρE . Переменные ρ , ρU , ρV , ρW , ρE являются неизвестными, определяемыми в результате решения уравнений (1). Остальные газодинамические параметры выражаются через эти пять переменных.

Для вычисления компонент U, V, W вектора скорости потока используем формулы

$$U = \frac{\rho U}{\rho}, \quad V = \frac{\rho V}{\rho}, \quad W = \frac{\rho W}{\rho}.$$

Давление определяется из выражения [3]

$$p = k(k-1)M^2 \left(\rho E - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho} \right),$$

а температура рассчитывается с использованием уравнения состояния Клапейрона — Менделеева

$$p = \rho RT$$

по формуле

$$T = k(k-1)M^2 \left(\frac{\rho E}{\rho} - \frac{(\rho U)^2 + (\rho V)^2 + (\rho W)^2}{2\rho^2} \right)$$

(E — удельная энергия газа).

Уравнения (1) содержат безразмерные комплексы

$$\text{Re} = \frac{\rho_* U_* h}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{C_p \mu}{\lambda}, \quad M = \frac{U_*}{c_*}, \quad c_* = \left(\frac{k p_*}{\rho_*} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{C_p}{C_v},$$

где U_* — максимальное значение продольной компоненты вектора скорости потока на входе в канал; p_*, ρ_* — давление и плотность газа, соответствующие значению U_* ; μ, λ — вязкость и теплопроводность, которые в данной работе принимались постоянными; C_p, C_v — изобарная и изохорная теплоемкости газа.

Величины U_*, p_*, ρ_*, h использовались в качестве масштабов для компонент вектора скорости движения, давления, плотности и линейных размеров соответственно. Безразмерное время рассчитывалось по формуле

$$t_* = h/U_*.$$

При решении уравнений (1) ставились следующие начальные условия:

$$U = V = W = 0, \quad p = p_H, \quad T = T_H.$$

Для компонент вектора скорости на входе в канал в качестве граничных задавались условия

$$V_0 = W_0 = 0; \tag{2}$$

$$U_0 = \varphi(y, \delta_U) + C_1(P_0 - \langle P \rangle)\varphi(y, \delta_S); \tag{3}$$

$$\varphi(y, \delta_\xi) = \begin{cases} 1 - (1 - y/\delta_\xi)^N, & 0 \leq y \leq \delta_\xi, \\ 1, & \delta_\xi < y \leq h - \delta_\xi, \\ 1 - ((y - h + \delta_\xi)/\delta_\xi)^N, & h - \delta_\xi < y \leq h, \end{cases} \quad \xi \rightarrow (U, S),$$

для энтропийной функции S_0 в ядре потока на входе в канал — условие

$$p_0 = S_0 \rho_0^k.$$

Здесь δ_U, δ_S — толщины динамического и теплового пограничных слоев; N — порядок аппроксимации выражения, используемого при вычислении частных производных от гидродинамических параметров по пространственным координатам; коэффициент C_1 определяется по формуле $C_1 = 1/(kM)$ [4]; $\langle P \rangle$ — среднее давление на входе в канал.

Разность $P_0 - \langle P \rangle$ в среднем по поперечному сечению канала на его входе равна нулю, но при любом значении y отлична от нуля. За счет этого условие (3) оказывается нестационарным и позволяет “выводить” за пределы области интегрирования возмущения, достигающие левой границы канала.

На выходе из канала задавалось условие

$$p = p_a + C_2 \sigma(t), \quad (4)$$

где p_a — безразмерное давление окружающей среды; C_2 — переменная величина, определяемая по формуле [4]

$$C_2 = \frac{kM}{2H + M\langle m \rangle(t)}; \quad (5)$$

$$\sigma(t) = m(L, t) - \langle m \rangle(t); \quad (6)$$

$$\langle m \rangle(t) = \frac{1}{L} \int_S m(x, t) dx, \quad m(x, t) = \iint_{S(x)} \rho U dy dz, \quad m(L, t) = \iint_{S(L)} \rho U dy dz,$$

L — длина канала; H — полувысота канала на его правой границе (в направлении координаты y); $S(x)$ — площадь поперечного сечения канала. Разность $m(L, t) - \langle m \rangle(t)$ в уравнении (6) является знакопеременной и позволяет выводить возмущения за пределы области интегрирования через правую границу канала. Остальные параметры (U, V, W, T) на выходе определяются экстраполяцией с заданной точностью из внутренних точек на границу вдоль оси x .

На обтекаемых поверхностях использовались условия прилипания

$$U = V = W = 0,$$

а также условие адиабатичности

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

поскольку рассматривались режимы течения, когда температура потока близка к температуре обтекаемой поверхности.

С целью выделения из бесконечно большой области интегрирования в направлении координаты z объема конечных размеров одна из плоскостей $z = \text{const}$ канала выбиралась в качестве плоскости симметрии $z = 0$. Затем на расстоянии от плоскости $z = 0$, равном $\pm H_z$, задавались условия периодичности

$$U_+ = U_-, \quad V_+ = V_-, \quad W_+ = W_-, \quad p_+ = p_-, \quad \rho_+ = \rho_-.$$

Расстояние H_z принималось равным 1,5. Это значение H_z считалось приемлемым в работе [5] и выбиралось в работе [3] при $M \leq 0,6$ и $Re \leq 10^4$.

Помимо перечисленных условий на входе в канал задавалось трехмерное возмущение. Для этого на первых ста шагах интегрирования по времени компоненты V_0 и W_0 вектора скорости рассчитывались по формулам

$$V_0 = W_0 = 0,1U_0, \quad (7)$$

поэтому в течение промежутка времени $t = 0 \div 0,2$ поток на входе был трехмерным, направленным влево и вверх. Начиная с момента $t = 0,2$ (100 шагов интегрирования по времени) условия (7) заменялись на условия (2). При $Re \leq 200$ длина канала $L = 30$, при $Re > 200$ $L = 60$.

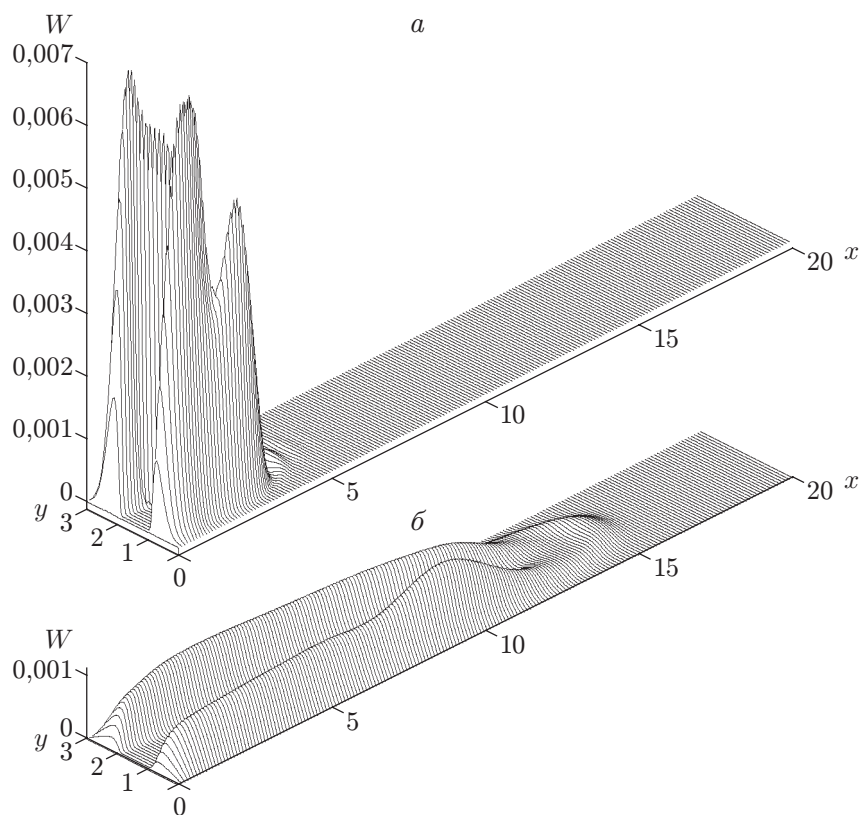


Рис. 2. Эволюция компоненты W вектора скорости потока во времени при $Re = 200$:
 а — $t = 5,6$; б — $t = 28$

Первые и вторые частные производные по пространственным переменным рассчитывались методом, предложенным в [6], с использованием рекомендаций из работы [3]. Интегрирование по времени выполнялось по явно-неявной схеме со вторым порядком точности.

Об эволюции внесенного в течение трехмерного возмущения можно судить по характеру изменения во времени и пространстве компоненты вектора скорости W (рис. 2). В данном случае $Re = 200$, когда течение асимметрично.

Как и в случае симметричного потока, наблюдаются два “возвышения”, начинающиеся в отрывных зонах, но в отличие от случая симметричного течения [2] их максимумы не совпадают. Распределение $W(x)$ немонотонное. При этом максимум зависимости $W(x)$ расположен ближе к входной части канала.

На рис. 2,а зависимость $W(x, y)$ при $z = 0$ показана для момента времени $t = 5,6$ после 2800 шагов интегрирования по времени, что соответствует стадии развития процесса, когда начинает выполняться равенство $\partial W / \partial x|_{x=0} = 0$. При этом возмущение смещается в глубь канала на расстояние $x \approx 5$. Со временем компонента W уменьшается. При $t = 28$ она уже на порядок меньше, чем при $t = 5,6$, и ее влиянием на гидродинамические параметры можно пренебречь. К этому времени возмущение распространяется на расстояние $x > 15$ при общей длине канала $L = 30$. Таким образом, не достигнув правой границы, внесенное в канал возмущение затухает. В этих условиях гидродинамические параметры изменяются нестационарно. Более того, заполнение канала осуществляется двумерным нестационарным потоком.

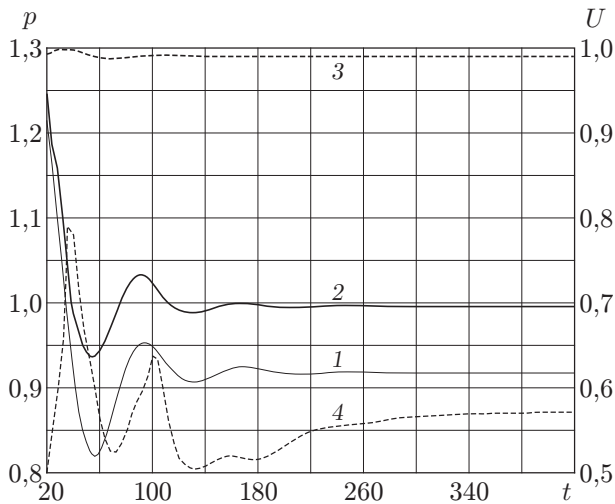


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость параметров потока от времени при $Re = 200$:

1, 2 — давление (1 — на входе в канал, 2 — в точке $(15; 1,5; 0)$); 3, 4 — продольная компонента скорости (3 — на входе в канал; 4 — в точке $(15; 1,5; 0)$)

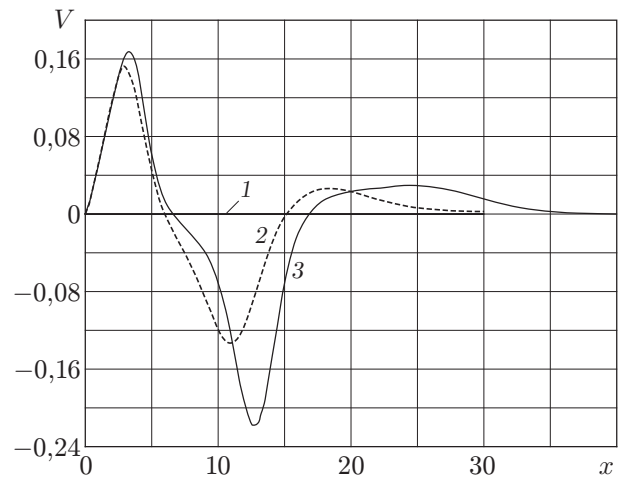


Рис. 4

Рис. 4. Изменение компоненты V вектора скорости потока по длине канала ($Y = 1,5, Z = 0$) при различных значениях числа Рейнольдса:

1 — $Re = 90$; 2 — $Re = 200$; 3 — $Re = 350$

При том же значении числа Рейнольдса $Re = 200$ давление p и продольная компонента U вектора скорости потока на левой границе изменяются во времени до момента $t = 280$ (рис. 3).

Вниз по потоку ряд параметров остаются нестационарными в течение более длительного промежутка времени. Так, при $x = 15$ продольная компонента U остается изменяющейся во времени почти в два раза дольше (кривая 4 на рис. 3), хотя давление становится стационарным почти в то же время, что и при $x = 0$ (кривая 2 на рис. 3).

Если характерное число Рейнольдса больше некоторого значения, двумерный стационарный поток становится асимметричным. На рис. 4 показано изменение вертикальной составляющей вектора скорости потока на оси канала ($Y = 1,5, Z = 0$). Асимметричность существенна в окрестности левой границы. Струя отклоняется от первоначального направления сначала вверх, затем вниз. После этого движение стремится к одномерному и при $Re = 350$ становится одномерным на расстоянии $x = 38$. В случае $Re = 200$ одномерный поток имеет место при $x \geq 30$.

С увеличением числа Рейнольдса максимальные значения напряжения трения ($\tau = \mu(\partial U/\partial y)|_{y=0,3}$) на нижней и верхней стенках канала увеличиваются (табл. 1). Максимальные градиенты вертикальной компоненты V вектора скорости потока на обтекаемых поверхностях также растут и находятся в окрестности точки присоединения потока.

Максимумы и минимумы (по модулю) вертикальной компоненты вектора скорости потока на оси канала в зависимости от Re приведены в табл. 2, откуда следует, что пороговое значение числа Рейнольдса $Re_1 = 90$. При $Re < Re_1$ поток симметричный, при $Re > Re_1$ абсолютные значения вертикальной компоненты V резко увеличиваются.

На рис. 5,а показаны линии тока струи при $Re = 200$. Вследствие асимметричности потока в окрестности левой границы верхняя отрывная зона значительно меньше нижней.

Таблица 1

Максимальные значения напряжения трения
и градиентов вертикальной компоненты вектора скорости на стенках канала

Re	$(\tau _{y=0})_{\max} \cdot 10^5$	$(\tau _{y=3})_{\max} \cdot 10^5$	$(\partial V/\partial y _{y=0})_{\max}$	$(\partial V/\partial y _{y=3})_{\max}$
150	1,176	2,080	0,011	0,020
200	1,722	3,274	0,019	0,035
300	2,966	4,216	0,046	0,064
350	3,380	4,570	0,061	0,078

Таблица 2

Максимумы и минимумы вертикальной составляющей
вектора скорости потока на оси симметрии канала

Re	V_{\max}	$ V_{\min} $	Re	V_{\max}	$ V_{\min} $
90	0,005	0,003	300	0,168	0,200
120	0,074	0,055	350	0,171	0,218
150	0,122	0,090	400	0,173	0,233
200	0,151	0,134			

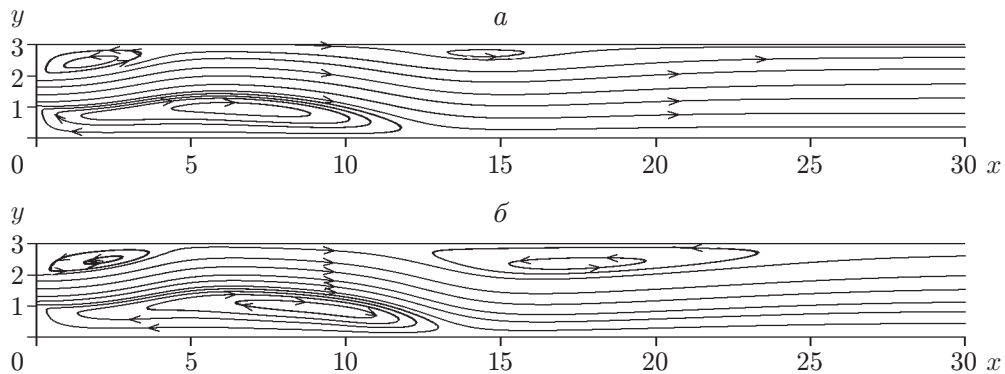


Рис. 5. Линии тока установившегося течения:
а — Re = 200; б — Re = 300

Обогнув нижнюю отрывную зону, поток отклоняется вниз, при этом сверху образуется еще одна отрывная зона на участке $13 \leq x \leq 17$.

Увеличение числа Рейнольдса оказывает существенное влияние на размеры третьей отрывной зоны. При $Re = 150$ эта зона отсутствует, при $Re = 200$ имеет размеры, указанные выше, а при $Re = 300$ (рис. 5,б) ее размеры практически такие же, как и у второй отрывной зоны.

При $Re = 200$ стационарные значения продольной и вертикальной компонент вектора скорости (табл. 3) существенно изменяются при $x < 30$, и только при $x > 30$ течение можно считать одномерным.

В зависимости от координаты x безразмерное давление p в окрестности левой границы растет и достигает максимума p_m в точке x_m , затем оно уменьшается до значения $p_L \approx 1$ на правой границе канала. При большей длине канала значение p_m увеличивается, а при увеличении числа Рейнольдса уменьшается. Некоторые результаты расчетов изменения давления приведены в табл. 4.

Таблица 3

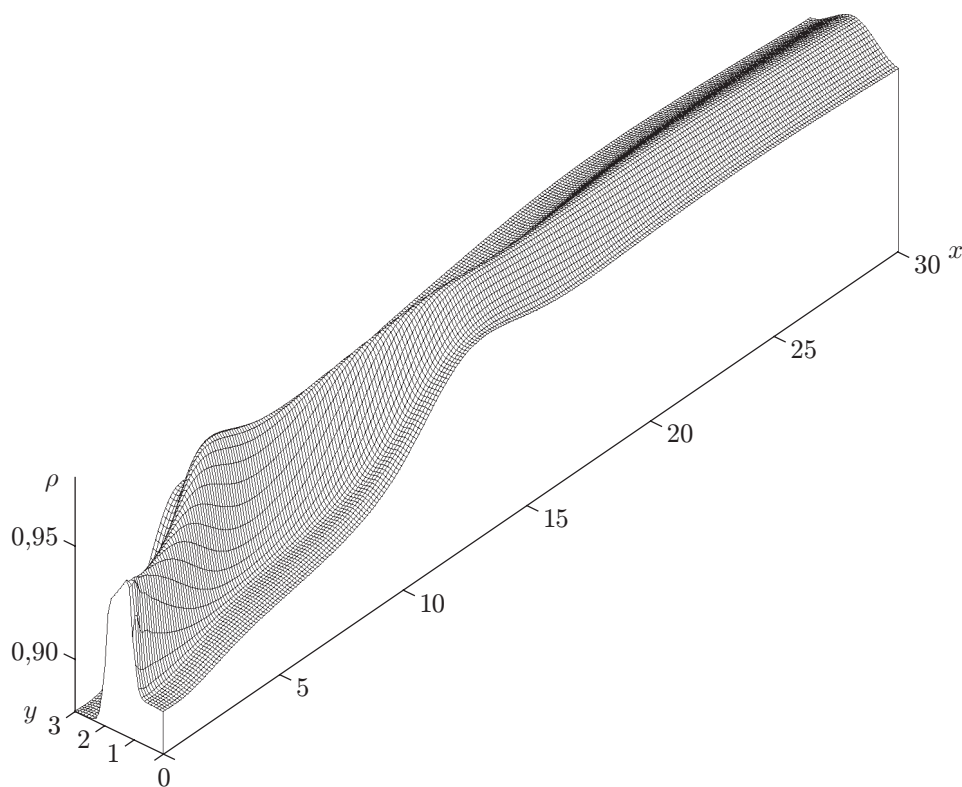
Изменение продольной и вертикальной компонент вектора скорости потока на оси канала при $Re = 200$

x	U	V	x	U	V
0	0,990	0	15	0,573	-0,003
3	0,906	0,015	18	0,564	0,026
6	0,510	-0,003	24	0,540	0,008
11	0,725	-0,134	30	0,513	0,001

Таблица 4

Максимальное давление, давление на входе в канал и на выходе из него

Re	L	p_m	p_0	p_L	x_m
150	30	1,017	0,926	1,002	16,37
200	30	1,003	0,917	1,001	22,50
300	60	1,019	0,937	1,004	33,75
350	60	1,014	0,933	1,004	40,00

Рис. 6. Поле плотности при $Re = 200$

На рис. 6 показано поле плотности в плоскости (x, y) . Его конфигурация соответствует одномерному потоку только при $x > 25$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.

2. **Липанов А. М., Карсканов С. А.** Установление и эволюция параметров симметричного ламинарного потока в плоском канале с внезапным расширением // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 35–42.
3. **Липанов А. М.** Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков / А. М. Липанов, Ю. Ф. Кисаров, И. Г. Ключников. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.
4. **Федорченко А. Т.** О проблеме вывода вихрей через проницаемую границу рассчитанной области нестационарного дозвукового потока // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 1. С. 114–129.
5. **Рождественский Б. Л., Симакин И. Н.** Моделирование турбулентных течений в плоском канале // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 1. С. 96–121.
6. **Zalesak S. T.** A physical interpretation of the Richtmyer two-step Lax — Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order // Advances in computer methods for partial differential equations V: Proc. of the 5th IMACS Intern. symp. on comput. methods for partial differential equations, Bethlehem (Pennsylvania, USA), June 19–21, 1984. New Brunswick: Rutgers Univ. Press, 1984. P. 491–496.

*Поступила в редакцию 5/XII 2006 г.,
в окончательном варианте — 31/V 2007 г.*
