12. **Вакс В. Г., Ларкин А. И., Пикин С. А.** О методе самосогласованного поля при описании фазовых переходов.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 2.
13. **Владимиров В. И., Орлов А. Н.** Энергия активации зарождения микротрещин в голове скопления дислокаций.— ФТТ, 1969, т. 11, вып. 2.
14. **Инденбом В. Л., Орлов А. Н.** Долговечность материала под нагрузкой и накопление повреждений.— ФММ, 1977, т. 43, вып. 3.
15. **Наймарк О. Б.** О термодинамике деформирования и разрушения твердых тел с микротрещинами. Препринт ИМСС УНЦ АН СССР. Свердловск, 1982.
16. **Бетехтин В. И., Владимиров В. И., Петров А. И., Садовников Б. В.** Обратимый характер начальной стадии разрушения в металлах.— В кн.: Металлофизика. Киев: Наук. думка, 1975, вып. 61.
17. **Николис Г., Пригожин И.** Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
18. **Инденбом В. Л., Орлов А. Н.** Термически активированные процессы в кристаллах. М.: Мир, 1973, вып. 2.
19. **Де Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
20. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
21. **Кузнецова Р. И., Жуков Н. Н.** Структурные изменения при сверхпластической деформации сплавов Al — Ge.— ФММ, 1979, т. 47, вып. 6.
22. **Кузнецова Р. И., Малярова Т. А. и др.** Сверхпластичность сплава АК4-1 в условиях ползучести.— ФММ, 1981, т. 52, вып. 2.
23. **Пресняков А. А., Аубакирова Ф. К.** Сверхпластичность металлических материалов. Алма-Ата: Наука, 1982.
24. **Пуарье Ж. П.** Высокотемпературная пластичность кристаллических тел. М.: Металлургия, 1982.
25. **Бочвар А. А.** Сверхпластичность мелкозернистых материалов.— В кн.: II Всесоюз. конф. «Сверхпластичность металлов». М.: МИСИС, 1981.

Поступила 14/IX 1984 г.

УДК 539.376

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ НЕОДНОРОДНО СТАРЕЮЩЕГО МАТЕРИАЛА В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. Д. ДРОЗДОВ

(Москва)

В работе получены условия устойчивости армированного стержня, изготовленного из неоднородно стареющего материала, при нелинейном законе ползучести.

Задача устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней в линейной постановке исследовалась в [1, 2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим изгиб прямолинейного стержня длины l, изготовленного из неоднородно стареющего вязкоупругого материала. Стержень имеет две оси симметрии. Изгиб происходит в плоскости, проходящей через продольную ось и ось симметрии. Введем ось Ox, направленную вдоль продольной оси стержня в недеформированном состоянии. Поперечное сечение стержня одинаково для всех точек x. Введем в сечении стержня оси x_1 и x_2. Ось x_1 лежит в плоскости изгиба стержня, ось x_2 направлена по нейтральной оси. Область на плоскости x_1x_2, занятую сечением стержня, обозначим через Ω. Площадь поперечного сечения стержня S, момент инерции сечения относительно нейтральной оси J:

$$\int\limits_{\Omega} ds = S, \quad \int\limits_{\Omega} x_1 ds = 0, \quad \int\limits_{\Omega} x_1^2 ds = J. \tag{1.1}$$

Здесь ds — элемент площади сечения.

Начало отсчета времени положим в момент зарождения материала в окрестности точки O. Возраст материала в окрестности точки x относительно материала в точке O обозначим через $\rho(x)$. Функция ρ кусочно-непрерывная и ограниченная.

В момент времени $t_0 \geqslant 0$ к стержню приложена сжимающая сила P и распределенная поперечная нагрузка интенсивности $q(x)$. При одноосном напряженном состоянии напряжение $\sigma(t, x)$ и деформация $e(t, x)$ в точке x в момент времени $t \geqslant t_0$ связаны соотношением [3]

$$E\varphi(e(t, x)) = (I + K)\sigma, \quad \sigma(t, x) = E(I - R)\varphi(e), \tag{1.2}$$

где E — постоянный модуль упругомгновенной деформации; I — единичный оператор; K, R — операторы ползучести и релаксации:

$$K\sigma = \int\limits_{t_0}^{t} k(t + \rho(x), \tau + \rho(x))\, \sigma(\tau, x)\, d\tau, \quad Re = \int\limits_{t_0}^{t} r(t + \rho(x), \tau + \rho(x))\, e(\tau, x)\, d\tau;$$

$k(t, \tau)$, $r(t, \tau)$ — ядра ползучести и релаксации; φ — заданная кусочно-непрерывная ограниченная функция. Эти величины определяются из опытов на простую ползучесть и релаксацию.

Отметим, что последние экспериментальные исследования [4, 5] свидетельствуют о том, что уравнение (1.2) можно единообразно применять как при монотонных, так и при немонотонных изменениях деформации во времени для некоторых полимеров. Установлено также, что уравнение состояния (1.2) хорошо описывает результаты экспериментов по ступенчатому и контрастному нагружению образцов из поливинилхлорида и полиметилметакрилата.

Пусть далее существует такая функция $r_1(t, \tau)$, что

$$|r_1| = \sup_t \int_{t_0}^{t} r_1(t, \tau)\, d\tau < 1, \quad t \geqslant t_0$$

и для всех $0 \leqslant x \leqslant l$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$

$$0 \leqslant r(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) \leqslant r_1(t, \tau);$$

функция $r_1(t, \tau)$ допускает представление

$$r_1(t, \tau) = \psi_1(t, \tau) + \psi_2(t, \tau)(t - \tau)^{-\varkappa},$$

где функции ψ_1, ψ_2 непрерывны по t, τ и $0 < \varkappa < 1$; существует такая функция $r_0(t, \tau)$, что $|r_0| < 1$ и при $t_1 \to \infty$ равномерно по $t \geqslant t_1$

$$\lim_{t_1} \int_{t_1}^{t} \sup_x |r(t + \rho(x), \tau + \rho(x)) - r_0(t, \tau)|\, d\tau = 0.$$

Обозначим через R_0 оператор релаксации с ядром r_0, K_0 — соответствующий ему оператор ползучести, а k_0 — ядро этого оператора. Считается, что $|k_0| < \infty$.

2. Уравнения для прогиба стержня. Обозначим $w_1(t, x, x_1)$, $w_2(t, x, x_1)$ продольное смещение и прогиб в точке стержня, находящейся на расстоянии x_1 от продольной оси. Согласно гипотезе плоских сечений,

$$w_1 = u(t, x) - x_1 y'(t, x),\ w_2 = y(t, x),\ y' = \partial y/\partial x, \tag{2.1}$$

где u, y — продольное смещение и прогиб в точке, расположенной на продольной оси стержня.

Из соотношений (2.1) следует, что при малых деформациях

$$e = u' - x_1 y''. \tag{2.2}$$

Обозначим через $M(t, x)$ изгибающий момент, $N(t, x)$ — нормальное усилие, а $Q(t, x)$ — перерезывающую силу:

$$M = -\int_\Omega \sigma x_1 ds,\ N = -\int_\Omega \sigma ds. \tag{2.3}$$

Подставляя в соотношения (2.3) выражения (1.2), (2.2), получим

$$M = -E(I - R)\int_\Omega \varphi(u' - x_1 y'') x_1 ds,\ N = -E(I - R)\int_\Omega \varphi(u' - x_1 y'')\, ds. \tag{2.4}$$

Считая, что процесс нагружения достаточно медленный, будем пренебрегать силами инерции. Кроме того, предположим, что прогиб стержня достаточно мал, так что величиной $(y')^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда уравнения равновесия элемента стержня имеют вид [6]

$$N' = 0,\ M' = Q,\ Q' = -Ny'' + q. \tag{2.5}$$

Обозначим через u_0, y_0 перемещения точек оси стержня, а M_0, N_0, Q_0 — изгибающий момент, продольную и перерезывающую силы при отсутствии поперечной нагрузки ($q = 0$).

Положим

$$y_0 = 0,\ M_0 = 0,\ N_0 = P,\ Q_0 = 0. \tag{2.6}$$

Продольное смещение u_0 определяется из соотношений (2.4), (2.6) с учетом равенств (1.1):

$$\varphi(u_0') = -(I + K)\, P/(ES). \tag{2.7}$$

Пусть интенсивность поперечной нагрузки q достаточно мала. Положим

$$u = u_0 + \Delta u,\ y = y_0 + \Delta y,\ M = M_0 + \Delta M,\ N = N_0 + \Delta N,\ Q = Q_0 + \Delta Q \tag{2.8}$$

и будем считать, что приращения перемещений, сил и момента, вызванные наличием поперечной нагрузки, также достаточно малы. Подставим выражения (2.8) в соотношения (2.4), (2.5). Учитывая равенства (1.1), (2.6) и пренебрегая произведениями величин с индексом Δ, имеем

(2.9) $$(\Delta N)' = 0,\ (\Delta M)' = \Delta Q,\ (\Delta Q)' = -P(\Delta y)'' + q;$$

(2.10) $$\Delta M = EJ\,(I - R)\,\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)'',\ \Delta N = -ES\,(I - R)\,\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta u)'.$$

Определение. Стержень называется устойчивым по Ляпунову на бесконечном интервале времени, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\sup_x |q(x)| < \delta$ следует оценка $\sup_{t,x} |\Delta y(t, x)| < \varepsilon$ $(0 \leqslant x \leqslant l,$ $t \geqslant t_0)$.

3. Вывод условий устойчивости. Поскольку для различных типов закрепления концов стержня вывод условий устойчивости аналогичен, ограничимся случаем стержня, концы которого жестко защемлены: $y(t, 0) = y(t, l) = y'(t, 0) = y'(t, l) = 0$. Из этого соотношения и равенств (2.6), (2.8) получим

(3.1) $$\Delta y(t, 0) = \Delta y(t, l) = \Delta y'(t, 0) = \Delta y'(t, l) = 0.$$

Согласно (2.9), (2.10), уравнение равновесия стержня можно записать в виде

(3.2) $$EJ\left[(I - R)\,\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\right]'' + P\,(\Delta y)'' = q.$$

Умножим это равенство на $\Delta y(t, x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (3.1), найдем

(3.3) $$\int_0^l (\Delta y)''\,\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\,dx = \int_0^l (\Delta y)''\,R\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\,dx + $$
$$+ \alpha \int_0^l ((\Delta y)')^2\,dx + \int_0^l q_1 \Delta y dx,\quad \alpha = P/(EJ),\quad q_1 = q/(EJ).$$

Оценим слагаемые, входящие в соотношение (3.3), считая, что для любого $x \in [0, l]$

$$0 < c_1 \leqslant \varphi'\left(u_0'\right) \leqslant c_2 < \infty.$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, имеем

(3.4) $$c_1 Y_2^2(t) \leqslant Y^2(t) = \int_0^l \varphi'\left(u_0'\right)[(\Delta y)'']^2\,dx \leqslant c_2 Y_2^2(t),$$

$$\left|\int_0^l (\Delta y)''\,R\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\,dx\right| \leqslant c_2 Y_2(t) \int_{t_0}^t r_1(t, \tau)\,Y_2(\tau)\,d\tau,\quad \left|\int_0^l q_1 \Delta y dx\right| \leqslant G Y_0(t),$$

где $$G^2 = \int_0^l q_1^2 dx;\quad Y_j^2 = \int_0^l \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j}\Delta y(t, x)\right]^2 dx \quad (j = 0, 1, 2).$$

Обозначим через U множество функций $v(x)$, имеющих интегрируемую с квадратом вторую производную и удовлетворяющих граничным условиям $v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0$. Положим

$$\lambda_0(t) = \inf_v \int_0^l \varphi'\left(u_0'\right)(v'')^2\,dx \left[\int_0^l v^2 dx\right]^{-1},$$

$$\lambda_1(t) = \inf_v \int_0^l \varphi'\left(u_0'\right)(v'')^2\,dx \left[\int_0^l (v')^2\,dx\right]^{-1}.$$

Очевидно, что $\lambda_0(t) \geqslant \lambda_0^0 > 0,\ \lambda_1(t) \geqslant \lambda_1^0 > 0$.

Введем обозначения:

$$\Lambda_0^{-1} = \sup_t \lambda_0^{-1}(t),\quad \Lambda_1^{-1} = \sup_t \lambda_1^{-1}(t),\quad t \geqslant t_0.$$

Для оценки величин $Y_0(t)$, $Y_1(t)$ воспользуемся неравенствами

(3.5) $$Y_0(t) \leqslant \Lambda_0^{-1/2} Y(t) \leqslant \left(c_2 \Lambda_0^{-1}\right)^{1/2} Y_2(t),\quad Y_1^2(t) \leqslant \Lambda_1^{-1} Y^2(t).$$

Учитывая (3.4), (3.5), из равенства (3.3) получим

$$\left(1 - \alpha \Lambda_1^{-1}\right) Y^2(t) \leqslant c_2 Y_2(t) \int_{t_0}^t r_1(t, \tau)\,Y_2(\tau)\,d\tau + G\left(c_2 \Lambda_0^{-1}\right)^{1/2} Y_2(t).$$

При $\alpha < \Lambda_1$ из этого соотношения и (3.4) найдем

$$c_1\left(1-\alpha\Lambda_1^{-1}\right)Y_2(t) \leqslant c_2\int\limits_{t_0}^{t} r_1(t,\tau)\,Y_2(\tau)\,d\tau + G\left(c_2\Lambda_0^{-1}\right)^{1/2}.$$

Согласно неравенству Грануолла — Беллмана, из этого соотношения следует оценка

$$Y_2(t) \leqslant Gf(t), \tag{3.6}$$

где f — монотонно возрастающая непрерывная функция.

Перепишем равенство (3.2) в виде

$$EJ\left[\left(I-R_0\right)\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\right]'' + P(\Delta y)'' = EJ\left[\left(R-R_0\right)\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\right]'' + q.$$

Поскольку оператор $I - R_0$ не зависит от координаты x, его можно вынести из-под знака производной. Применяя к полученному соотношению оператор $I + K_0$, имеем

$$\begin{gathered}\left[\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\right]'' + \alpha\left(I+K_0\right)(\Delta y)'' = \\ = \left(I+K_0\right)\left[\left(R-R_0\right)\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\right]'' + \left(I+K_0\right)q_1.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Умножим равенство (3.7) на $\Delta y(t,x)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (3.1), запишем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \varphi'\left(u_0'\right)[(\Delta y)'']^2\,dx = \alpha\int\limits_0^l (\Delta y)'\left(I+K_0\right)(\Delta y)'\,dx + \int\limits_0^l \Delta y\left(I+K_0\right)q_1 dx + \\ + \int\limits_0^l (\Delta y)''\left(I+K_0\right)\left(R-R_0\right)\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\,dx.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Оценим первые два слагаемых в правой части этого соотношения с помощью неравенства Коши — Буняковского и (3.5):

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_0^l (\Delta y)'\left(I+K_0\right)(\Delta y)'\,dx\right| \leqslant \left(1+|k_0|\right)\Lambda_1^{-1}Z^2(t), \\ \left|\int\limits_0^l \Delta y\left(I+K_0\right)q_1 dx\right| \leqslant G\left(1+|k_0|\right)\left(c_2\Lambda_0^{-1}\right)^{1/2}Z_2(t).\end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $\qquad Z_j(t) = \sup_\tau Y_j(\tau);\ Z(t) = \sup_\tau Y(\tau);\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t.$

Из свойств предельного оператора релаксации следует, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $T(\varepsilon_1) > t_0$, что при $t \geqslant T(\varepsilon_1)$

$$\int\limits_{T(\varepsilon_1)}^{t} \sup_x\left|r(t+\rho(x),\ \tau+\rho(x)) - r_0(t,\tau)\right|d\tau < \varepsilon_1.$$

Оценим третье слагаемое в правой части (3.8) при $t \geqslant T(\varepsilon_1)$, воспользовавшись этим соотношением и неравенством Коши — Буняковского:

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_0^l (\Delta y)''\left(I+K_0\right)\left(R-R_0\right)\varphi'\left(u_0'\right)(\Delta y)''\,dx\right| \leqslant c_2Z_2(t)\left[\left(1+|k_0|\right)\times\right. \\ \left.\times\left(|r_0|+|r_1|\right)Z_2\left(T(\varepsilon_1)\right) + \varepsilon_1Z_2(t)\left(1+|k_0|\right)\right].\end{gathered} \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.8) — (3.10) получим

$$\begin{gathered}\left[1-\alpha\left(1+|k_0|\right)\Lambda_1^{-1}\right]Z^2(t) \leqslant c_2\left(1+|k_0|\right)Z_2(t)\left[\left(|r_0|+|r_1|\right)Z_2\left(T(\varepsilon_1)\right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_1Z_2(t)\right] + G\left(1+|k_0|\right)\left(c_2\Lambda_0^{-1}\right)^{1/2}Z_2(t).\end{gathered}$$

Если

$$\alpha < \Lambda_1\left(1+|k_0|\right)^{-1}, \tag{3.11}$$

из этого неравенства и (3.4) следует оценка

$$\begin{gathered}\left\{c_1\left(1-\alpha\Lambda_1^{-1}\left(1+|k_0|\right)\right) - c_2\left(1+|k_0|\right)\varepsilon_1\right\}Z_2(t) \leqslant \\ \leqslant\left(1+|k_0|\right)\left[c_2\left(|r_0|+|r_1|\right)Z_2\left(T(\varepsilon_1)\right) + G\left(c_2\Lambda_0^{-1}\right)^{1/2}\right].\end{gathered} \tag{3.12}$$

Согласно (3.11), существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что выражение в фигурных скобках положительно. По найденному ε_1 выберем $T(\varepsilon_1)$. Тогда из неравенств (3.6), (3.12) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $t \geqslant t_0$

$$Z_2(t) < \varepsilon \tag{3.13}$$

при достаточно малом G. Согласно граничным условиям

$$|\Delta y(t, x)| = \left| \int_0^x (x - \xi)(\Delta y(t, \xi))'' \, d\xi \right| \leqslant (l/3)^{3/2} Z_2(t), \tag{3.14}$$

из неравенств (3.13), (3.14) следует

Теорема. Пусть $\alpha < \Lambda_1(1 + |k_0|)^{-1}$. Тогда стержень устойчив на бесконечном интервале времени.

4. Некоторые замечания и частные случаи.

1) Аналогично можно получить условия устойчивости и для других типов закрепления концов стержня: концы стержня шарнирно оперты; один конец жестко защемлен, а другой шарнирно оперт; один конец жестко защемлен, а другой свободен. Условие устойчивости стержня имеет вид $P < \Lambda_1 EJ(1 + |k_0|)^{-1}$. Величина Λ определяется из решения вариационной задачи на множестве функций U, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям.

2) Если функция φ линейная ($\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$), то полученные условия устойчивости совпадают с условиями, приведенными в [2].

3) Для ядра ползучести [7]

$$k(t, \tau) = -E \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\varphi_0(\tau)\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right]$$

предельное ядро ползучести имеет вид

$$k_0(t, \tau) = -E \frac{\partial}{\partial \tau}\left[C_0\left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right], \quad C_0 = \lim_\tau \varphi_0(\tau), \quad \tau \to \infty.$$

В этом случае $|k_0| = EC_0$ и условие устойчивости стержня принимает вид $P < \Lambda_1 EJ(1 + EC_0)^{-1}$.

4) Пусть стержень однородный ($\rho = 0$) и $\varphi(\varepsilon) = |\varepsilon|^\mu \operatorname{sign} \varepsilon$, $0 < \mu < 1$. Положим

$$\lambda = \inf_v \int_0^l (v'')^2 \, dx \left[\int_0^l (v')^2 \, dx\right]^{-1}, \quad v \in U.$$

Условие устойчивости стержня

$$P < E\left[\lambda\mu J(1 + |k_0|)^{-1}(1 + |k|)^{\frac{\mu-1}{\mu}} S^{\frac{1-\mu}{\mu}}\right]^\mu.$$

Для упругого стержня ($|k| = |k_0| = 0$) отсюда получим

$$P < E(\lambda\mu J)^\mu S^{1-\mu}.$$

Это условие совпадает с условием устойчивости упругого стержня, рассчитанным по методу касательно-модульной нагрузки [8].

5. Устойчивость армированного нелинейно-вязкоупругого стержня, подверженного старению. Пусть стержень изготовлен из нелинейного вязкоупругого материала и армирован упругим материалом. Арматура расположена симметрично относительно осей x_1 и x_2. Площадь поперечного сечения арматуры S_a, а момент инерции сечения армирующего материала J_a. При одноосном напряженном состоянии связь между напряжением и деформацией в арматуре описывается законом Гука $\sigma_a = E_a e_a$. Пусть основной материал стержня однородный ($\rho = 0$). Положим

$$\beta = E_a J_a/(EJ), \quad \Phi(u_0') = \varphi'(u_0') + \beta,$$

$$r^0(t, \tau) = \varphi'(u_0')\left[\Phi(u_0')\right]^{-1} r(t, \tau), \quad \Lambda^{-1} = \sup_t [\lambda^0(t)]^{-1},$$

$$\lambda^0(t) = \inf_v \int_0^l \Phi(u_0')(v'')^2 \, dx \left[\int_0^l (v')^2 \, dx\right]^{-1}.$$

Обозначим через k^0 предельное ядро ползучести, соответствующее ядру релаксации r^0. Условие устойчивости армированного стержня имеет вид $P < EJ\Lambda(1 + |k^0|)^{-1}$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе и ценные замечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
2. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.
3. **Работнов Ю. Н.** Некоторые вопросы теории ползучести.— Вестн. МГУ, 1948, № 10.
4. **Бугаков И. И., Чеповецкий М. А.** Сравнительное исследование нелинейных уравнений вязкоупругости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 1.
5. **Drescher A., Michalski B.** Reologiczne, mechaniczne i optyczne wlasnosci polimetakrytanu metylu warunkach ztozonej historii obciązenia.—Mech. teor. i stosow., 1971, v. 9, N 2.
6. **Ржаницын А. Р.** Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
7. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.

Поступила 24/V 1984 г.

УДК 539.3

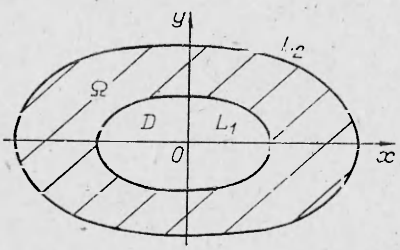
ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМАХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПРОДОЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Н. В. БАНИЧУК, |Л. М. КУРШИН|, Г. И. РАСТОРГУЕВ

(Москва, Новосибирск)

Определению оптимальных форм поперечных сечений изотропных призматических стержней посвящен ряд работ. В [1] сформулирована и в [2] доказана теорема: при заданной площади сечения максимальную жесткость кручения имеет стержень кругового сечения. Этот результат обобщен [3] на случай стержней с полостью: при известных значениях площади сечения и площади, охватываемой внутренним граничным контуром, наибольшую жесткость кручения имеет стержень с поперечным сечением в виде кругового кольца.

В [4, 5] получено условие оптимальности для задачи об определении формы поперечного сечения стержня из условия максимума крутильной жесткости при заданной площади сечения. Это позволило решить задачи о разыскании формы сечения стержня с полостью, имеющего наибольшую жесткость кручения при условии, что наряду с площадью сечения задан один из граничных контуров, отличный от окружности [4—7].



В [8, 9] найдены решения задач оптимизации одного из параметров призматического стержня: площади сечения, крутильной и изгибной жесткостей при ограничениях на два других. Задача об определении формы сечения стержня из условия максимума крутильной жесткости при заданных изгибных жесткостях исследовалась в [10, 11]. Показано, что оптимальными сечениями стержней в этих задачах являются круговые или эллиптические.

В данной работе обобщаются результаты [8, 10, 11] на случай стержней с двусвязным поперечным сечением.

1. Рассмотрим задачу об определении формы поперечного сечения изотропного призматического стержня, занимающего двусвязную область Ω (см. фигуру), из условия максимума крутильной жесткости при заданных осевых моментах инерции сечения (изгибных жесткостях)

$$\iint_{\Omega} y^2 dxdy = J_x, \quad \iint_{\Omega} x^2 dxdy = J_y \tag{1.1}$$

и фиксированной полощади F области D, охватываемой внутренним граничным контуром L_1:

$$\iint_{D} dxdy = F. \tag{1.2}$$

Введем функцию напряжений при кручении $\varphi(x, y)$ [12], удовлетворяющую уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2 = 0 \qquad (x, y) \in \Omega \tag{1.3}$$

и краевым условиям

$$\varphi = C(x, y) \in L_1, \ \varphi = 0 \qquad (x, y) \in L_2, \tag{1.4}$$