

туру в уравнениях (1.1), (1.4) точно разделяются пространственные и временная переменные и определить нормальную форму колебаний [2]

не представляет труда: $w_{mn} = f_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a} \operatorname{cn} \left(\frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho} (1 + \gamma) t}, \sqrt{\frac{0,5\gamma}{1 + \gamma}} \right)$, $\gamma = 1,5(f_{mn}/h)^2$.

В связи с высказанными соображениями становится сомнительной попытка оценить точность динамических уравнений Бергера, основываясь на приближенном (найденном методом Бубнова — Галеркина) решении уравнений Фешля — Кармана [6]. Нельзя также признать обоснованным утверждение авторов [5] о том, что уравнения Бергера дают большую погрешность при изучении динамики систем, в том числе и центрально-симметричных форм колебаний квадратной пластины.

3. При исследовании потери устойчивости квадратной пластины по симметричной форме имеем такие результаты. Если в плоскости пластины действуют сжимающие усилия $N_1 = N_2 = -N$, то уравнения Бергера, дающие точное решение уравнений Фешля — Кармана, линеаризуются: $\nabla^2 \nabla^2 w + (12N/Bh^2) \nabla^2 w = 0$, $B = 2Eh/(1 - \nu^2)$. В случае, когда по контуру пластины приложена «мертвая» нагрузка (при $x_1 = 0$, a $u_1 = U$, $u_2 = w = w_{x_1} = 0$, при $x_2 = 0$, a $u_2 = U$, $u_1 = w = w_{x_2} = 0$), для получения точного решения надо использовать уравнения вида $\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{6}{h^2 a^2} \left[\int_0^a \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 + 8Ua \right] \nabla^2 w = 0$.

Отметим, что уравнения Бергера дают возможность при изучении центрально-симметричного напряженно-деформированного состояния и динамики квадратной пластины получить точные решения и в других практически важных случаях: пластина на упругом основании (сплошном или центрально-симметричном дискретном) центрально-симметричной переменной толщины, в частности, подкрепленной в двух главных направлениях регулярным симметричным силовым набором (если учитывается только изгибная жесткость ребер).

ЛИТЕРАТУРА

1. Berger H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech.— 1955.— V. 22, N 4.
2. Фын Уэй. Нормальные формы колебаний некоторых нелинейных непрерывных систем // Тр. Амер. с-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикладная механика.— 1964.— № 1.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.— М.: Наука, 1966.
4. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек // Некоторые прикладные задачи теории упругих пластин и оболочек.— М.: Изд-во МГУ, 1981.
5. Денисов В. Н., Жинжер Н. Н. Асимптотический метод в задаче о нелинейных колебаниях изотропной прямоугольной пластины // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 1.
6. Vendhan C. P. A study of Berger equations applied to non-linear vibrations of elastic plates // Intern. J. Mech. Sci.— 1975.— V. 17, N 7.

Поступила 22/XII 1986 г.

УДК 539.43:629.7.015

ВЛИЯНИЕ ПРИКЛЕПАННЫХ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ

В. И. Максименко
(Новосибирск)

При проектировании и расчете листовых элементов конструкций по принципу «безопасных повреждений» возникает необходимость оценить влияние подкрепляющего набора на коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещин. Обзор работ в этом направлении, главным образом для изотропной пластины с одной трещиной, можно найти, например, в [1, 2]. Исследования, посвященные развитию

трещин около отверстия в пластинах с точечно-присоединенными подкрепляющими элементами, практически отсутствуют.

Ниже на основе асимптотической бесструктурной теории точечных связей строятся общие представления решений этой задачи для анизотропной пластины с эллиптическим отверстием. Задача сводится к совместному решению системы сингулярных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на контурах трещин, и системы линейных алгебраических уравнений относительно усилий, передающихся через заклепки на пластину. Исследуется влияние анизотропии материала пластины, формы отверстия, жесткости и положения подкрепляющего набора, повреждения ребра на КИН в вершинах трещин. Соответствующие результаты для изотропных пластин получаются предельным переходом в параметрах анизотропии в численном решении.

1. Рассмотрим упругую анизотропную пластину постоянной толщины h , ослабленную эллиптическим отверстием Λ с полуосями a , b и системой гладких непересекающихся сквозных криволинейных разрезов (трещин) L_j ($j = \overline{1, k}$) (рис. 1). Пластина усилена m прямолинейными ребрами жесткости (стрингерами), присоединенными к пластине с помощью заклепок *. Если не оговорено особо, то все разрезы считаем внутренними.

Примем хорошо зарекомендовавшие себя в приложениях упрощающие допущения [1—3]: 1) в пластине реализуется плоское напряженное состояние; 2) подкрепляющая система ребер жесткости ферменного типа, ослабление их за счет постановки заклепок не рассматривается; 3) пластина и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепежа; 4) все заклепки одинаковые, радиус заклепки (площадки сцепления) r мал в сравнении с их шагом и другими характерными размерами; 5) при прохождении трещины через заклепочное отверстие не учитываем влияние этого отверстия и его заполнения заклепкой; 6) действие заклепки моделируем: в стрингере — действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной к точке, соответствующей центру заклепки, в пластине — согласно бесструктурной асимптотической теории точечных связей [3] действием сосредоточенной силы во внешней зоне и действием сосредоточенной силы с некоторым поправочным коэффициентом, зависящим от вида крепежа, в ближней зоне около заклепки. Эта зона имеет порядок характерного линейного размера площадки сцепления r ; 7) каждая заклепка представляет собой линейно-упругую пружину, соединяющую точки ее оси вращения, принадлежащие скрепляемым элементам. Жесткость пружины одинакова во всех направлениях и известна. Поправочный коэффициент и жесткость пружины могут быть найдены либо из решения внутренней задачи, либо экспериментально [3, 4].

Ограничимся рассмотрением случая, когда на упругую систему действует внешнее поле нагрузок в пластине, задаваемое усилиями

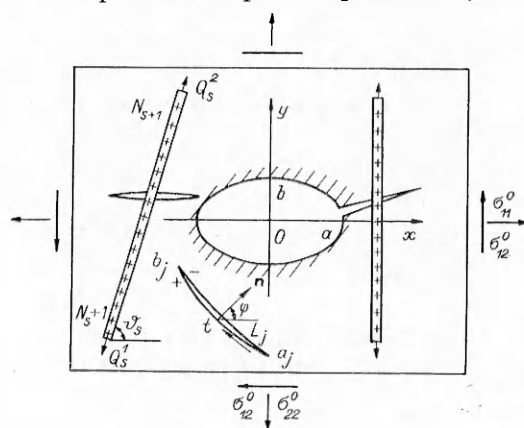


Рис. 1

на контуре отверстия и σ_{ij}^0 на бесконечности, а к концам s -го ребра приложены сосредоточенные силы $\bar{Q}_s^1 = Q_s^1 \exp[i(\vartheta_s + \pi)]$, $\bar{Q}_s^2 = Q_s^2 \exp(i\vartheta_s)$. Здесь ϑ_s — угол, образованный ребром s с осью x (см. рис. 1).

Обозначим общее число точек крепежа N , а их координаты и неизвестные усилия, передающиеся в них от ребер жесткости к пластине, — через

* Под заклепочным соединением будем понимать любую технологическую операцию или способ точечного прикрепления (сварка, склеивание, клепка, болтовое соединение и т. п.), когда размер площадки сцепления мал по сравнению с характерными размерами тела и шагом крепежа.

$\tau^k = x^k + iy^k$, $\bar{P}_k = P_k \exp(i\alpha_k)$ соответственно. Нумерацию выбираем так, что заклепки вдоль подкрепляющего элемента с номером s расположены в порядке возрастания номеров, начиная с N_{s+1} по $N_s + n_s$ (n_s — общее число заклепок на ребре s); $N_{s+1} = N_s + n_s$, $N_1 = 0$, $N_{m+1} = N$. Согласно допущению 2, имеем $\alpha_k = \vartheta_s$ ($N_s < k < N_{s+1}$, $s = 1, m$).

Напряжения и смещения в пластине можно выразить через две аналитические функции $\Phi_\nu(z_\nu)$ [5]:

$$(1.1) \quad (\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (\mu_\nu^2, -\mu_\nu, 1) \Phi_\nu(z_\nu) \right\},$$

$$(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu, q_\nu) \Phi_\nu(z_\nu) \right\},$$

$$z_\nu = x + \mu_\nu y, \quad p_\nu = a_{11}\mu_\nu^2 - a_{16}\mu_\nu + a_{12}, \quad q_\nu = a_{12}\mu_\nu + a_{22}i\mu_\nu^{-1} - a_{26},$$

где $\Phi_\nu(z_\nu)$ — первообразная для $\Phi_\nu(z_\nu)$; a_{ij} — коэффициенты деформации из закона Гука; μ_ν — корни характеристического уравнения.

С учетом упрощающих допущений и принципа суперпозиции ищем функции (1.1) в виде

$$(1.2) \quad \Phi_\nu(z_\nu) = \sum_{j=1}^3 \Phi_\nu^j(z_\nu).$$

Здесь $\Phi_\nu^1(z_\nu)$ — решение для неподкрепленной пластины с отверстием Λ без трещин, удовлетворяющее краевым условиям на контуре отверстия и на бесконечности, его можно определить с помощью известных методов [5].

Используя решение задачи о действии единичной сосредоточенной силы $\exp(i\varphi)$ в точке τ бесконечной анизотропной пластины со свободным от внешних усилий эллиптическим отверстием Λ [6]

$$(1.3) \quad \Psi_\nu(z_\nu, \tau, \varphi) = \frac{1}{\omega_\nu(\zeta_\nu)} \left\{ \frac{A_\nu(\varphi)}{\zeta_\nu - \eta_\nu} + \frac{l_\nu \overline{A_1(\varphi)}}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \eta_1 - 1)} + \frac{n_\nu \overline{A_2(\varphi)}}{\zeta_\nu(\zeta_\nu \eta_2 - 1)} \right\},$$

$$z_\nu = \omega_\nu(\zeta_\nu) = \frac{a - i\mu_\nu b}{2} \zeta_\nu + \frac{a + i\mu_\nu b}{2} \frac{1}{\zeta_\nu}, \quad |\zeta_\nu| > 1,$$

$$\zeta_\nu = \zeta_\nu(z_\nu) = \frac{z_\nu + \sqrt{z_\nu^2 - (a^2 + \mu_\nu^2 b^2)}}{a - i\mu_\nu b}, \quad \zeta_\nu(\infty) = \infty,$$

$$l_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar{\mu}_1}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \quad n_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar{\mu}_2}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}$$

и учитывая взаимодействие включений асимптотически с помощью принципа суперпозиции, положим (см. допущение 6)

$$(1.4) \quad \Phi_\nu^2(z_\nu) = \sum_{k=1}^N P_k \Psi_{\nu k}(z_\nu).$$

Будем считать, что $\Psi_{\nu k}(z_\nu) = \Psi_\nu(z_\nu, \tau^k, \alpha_k)$ всюду, за исключением ближайшей зоны у k -й заклепки [3].

В дальнейшем потребуется выражение смещений точки крепежа τ^k в пластине через потенциалы $\Phi_\nu(z_\nu)$. В этом случае под выражением $\Psi_{\nu k}(\tau^k)$ будем понимать среднее арифметическое значений функций $\Psi_{\nu k}(z_\nu)$ в точках z_ν^p , соответствующих точкам $z^p = \tau^k + \Delta r \exp[i(\alpha_k + \pi p)]$ ($p = 0, 1$) при аффинном отображении $z_\nu = \operatorname{Re}(z) + \mu_\nu \operatorname{Im}(z)$. Здесь $\Psi_{\nu k}(z_\nu)$ — первообразная функции $\Psi_{\nu k}(z_\nu)$; Δ — поправочный коэффициент (см. допущение 6), зависящий от материала заклепки и ее конструкции. Зависимость усилия в заклепке от Δ оказывается довольно слабой [3],

и поэтому ошибка в определении Δ несущественно влияет на окончательный результат.

Функции $\Phi_v^3(z_v)$ разыскиваем в форме обобщенных интегралов Коши, ядрами которых являются фундаментальные решения (1.3):

$$(1.5) \quad \Phi_v^3(z_v) = \frac{1}{\omega'_v(\zeta_v)} \int_L \left\{ \frac{\Omega_v^*(\tau)}{\zeta_v - \eta_v} + \frac{l_v \overline{\Omega_1^*(\tau)}}{\zeta_v(\zeta_v \eta_1 - 1)} + \frac{n_v \overline{\Omega_2^*(\tau)}}{\zeta_v(\zeta_v \eta_2 - 1)} \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \omega'_v(\zeta_v)} \int_L \left\{ \frac{\Omega_v(\tau) d\tau_v}{\eta_v - \zeta_v} + \frac{l_v \overline{\Omega_1(\tau) d\tau_1}}{\zeta_v(\zeta_v \eta_1 - 1)} + \frac{n_v \overline{\Omega_2(\tau) d\tau_2}}{\zeta_v(\zeta_v \eta_2 - 1)} \right\},$$

$$\Omega_v(t) = -2\pi i \Omega_v^*(t) / M_v(t), \quad M_v(t) = \mu_v \cos \psi - \sin \psi,$$

где $\Omega_v(t) = \{\Omega_{vj}(t) | t \in L_j; j = \overline{1, k}\}$ — неизвестные комплексные функции на L ; $d\tau_v = M_v(\tau) ds$ (ds — элемент длины дуги L); $\psi = \psi(t)$ — угол между нормалью n к L в точке t и осью x . Нормаль n направим вправо при положительном обходе L (см. рис. 1).

Так построенные функции $\Phi_v^j(z_v)$ ($j = 2, 3$) удовлетворяют условиям $X_n = Y_n = 0$ на Λ и затухают на бесконечности. Следовательно, выбор $\Phi_v(z_v)$ в виде (1.2) автоматически обеспечивает выполнение условий внешнего нагружения всюду, за исключением L .

2. Краевым условиям на свободных от внешних усилий разрезах L можно придать вид [7]

$$(2.1) \quad a(t) \Phi_1^\pm(t_1) + b(t) \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = 0,$$

$$a(t) = a_0 \frac{M_1(t)}{M_2(t)}, \quad b(t) = b_0 \frac{\overline{M_1(t)}}{M_2(t)}, \quad a_0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_2}, \quad b_0 = \frac{\overline{\mu_1 - \mu_2}}{\mu_2 - \mu_2}$$

(плюс (минус) относится к левому (правому) берегу L).

Подставляя предельные значения функций $\Phi_v(z_v)$ из (1.2), (1.4) в (2.1), получим $(\Omega(t) = \Omega_1(t))$

$$(2.2) \quad \int_L \frac{\Omega(\tau) d\tau_1}{\eta_1 - \zeta_1} + \int_L \{K_1(t, \tau) \Omega(\tau) + K_2(t, \tau) \overline{\Omega(\tau)}\} ds + \sum_{k=1}^n c_k(t) P_k = f(t),$$

$$K_1(t, \tau) ds = \frac{1}{2b(t)} \left\{ \frac{\overline{b(\tau) - b(t)}}{\eta_2 - \zeta_2} d \ln \frac{\eta_2 - \zeta_2}{\eta_1 - \zeta_1} + \frac{\overline{b(t)}}{b(t)} d \ln \frac{\eta_2 - \zeta_2}{\eta_1 - \zeta_1} - \frac{\overline{l_1 a(t) d\tau_1}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_1 - 1)} + \right.$$

$$+ \frac{\overline{n_1 a(\tau) a(t) d\tau_2}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_2 - 1)} - \frac{n_1 \overline{b(t) b(\tau) d\tau_2}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_2 - 1)} - \frac{\overline{l_2 d\tau_1}}{\omega'_2(\zeta_2) \zeta_2 (\zeta_2 \eta_1 - 1)} +$$

$$\left. + \frac{\overline{n_2 a(\tau) d\tau_2}}{\omega'_2(\zeta_2) \zeta_2 (\zeta_2 \eta_2 - 1)} \right\},$$

$$K_2(t, \tau) ds = \frac{1}{2b(t)} \left\{ \overline{a(t)} d \ln \frac{\eta_2 - \zeta_2}{\eta_1 - \zeta_1} + \frac{\overline{a(\tau) - a(t)}}{\eta_2 - \zeta_2} d \eta_2 + \frac{\overline{n_1 a(t) b(\tau) d\tau_2}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_2 - 1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overline{l_1 b(t) d\tau_1}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_1 - 1)} - \frac{n_1 \overline{b(t) a(\tau) d\tau_2}}{\omega'_1(\zeta_1) \zeta_1 (\zeta_1 \eta_2 - 1)} + \frac{\overline{n_2 b(\tau) d\tau_2}}{\omega'_2(\zeta_2) \zeta_2 (\zeta_2 \eta_2 - 1)} \right\},$$

$$c_k(t) = \frac{\pi i}{b(t)} \{ \overline{a(t)} \overline{\Psi_{1k}(t_1)} + \overline{b(t)} \Psi_{1k}(t_1) + \overline{\Psi_{2k}(t_2)} \},$$

$$f(t) = \frac{\pi i}{b(t)} \{ \overline{a(t)} \overline{\Phi_1^1(t_1)} + \overline{b(t)} \Phi_1^1(t_1) + \overline{\Phi_2^1(t_2)} \}.$$

Ядра $K_p(t, \tau)$ ($p = 1, 2$), согласно допущениям относительно L , непрерывны.

Уравнения (2.2) необходимо дополнить условиями однозначности смещений при обходе каждой трещины L_j :

$$(2.3) \quad \int_{L_j} \Omega(\tau) d\tau_1 = 0 \quad (j = \overline{1, k}).$$

Обозначим через $u(z, \vartheta)$ перемещение пластины в точке z по направлению вектора $\exp(i\vartheta)$. Тогда из условия совместности смещений ребра и пластины в точках крепежа $u(\tau^{j+1}, \vartheta_s) - u(\tau^j, \vartheta_s) = \frac{|\tau^{j+1} - \tau^j|}{E^s F^s} \left\{ Q_s^2 - \sum_{k=j+1}^{N_{s+1}} P_k \right\} - q(P_{j+1} - P_j)$, $j = \overline{N_s + 1, N_{s+1} - 1}$ ($s = \overline{1, m}$) и условий равновесия ребер жесткости находим недостающие N уравнений для определения усилий P_k :

$$(2.4) \quad \sum_{k=1}^N c_{jk} P_k + \operatorname{Re} \left\{ \int_L K_{1j}(\tau) \Omega(\tau) ds \right\} = f_j,$$

$$K_{1j}(\tau) ds = \frac{1}{\pi i} \left\{ \Delta_1(\vartheta_s) \ln \frac{\eta_1 - \zeta_1^{j+1}}{\eta_1 - \zeta_1^j} d\tau_1 - a(\tau) \Delta_2(\vartheta_s) \ln \frac{\eta_2 - \zeta_2^{j+1}}{\eta_2 - \zeta_2^j} d\tau_2 + \right.$$

$$+ \overline{b(\tau)} \sum_{v=1}^2 \Delta_v(\vartheta_s) n_v \ln \frac{(\zeta_v^{j+1} \overline{\eta_2} - 1) \zeta_v^j}{(\zeta_v^j \overline{\eta_2} - 1) \zeta_v^{j+1}} d\overline{\tau}_2 + \overline{b(\tau)} \Delta_2(\vartheta_s) \ln \frac{\eta_2 - \zeta_2^{j+1}}{\eta_2 - \zeta_2^j} d\overline{\tau}_2 +$$

$$+ \sum_{v=1}^2 \overline{\Delta_v(\vartheta_s)} \overline{b} \ln \frac{(\zeta_v^{j+1} \overline{\eta_1} - 1) \zeta_v^j}{(\zeta_v^j \overline{\eta_1} - 1) \zeta_v^{j+1}} d\tau_1 - a(\tau) \sum_{v=1}^2 \Delta_v(\vartheta_s) \overline{n}_v \ln \frac{(\zeta_v^{j+1} \overline{\eta_2} - 1) \zeta_v^j}{(\zeta_v^j \overline{\eta_2} - 1) \zeta_v^{j+1}} d\tau_2 \left. \right\},$$

$$c_{jk} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 \Delta_v(\vartheta_s) [\psi_{vk}(\tau_v^{j+1}) - \psi_{vk}(\tau_v^j)] \right\} + q(\delta_{j+1,k} - \delta_{jk}) +$$

$$+ \frac{|\tau^{j+1} - \tau^j|}{E^s F^s} H(k - j), \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$f_j = \frac{|\tau^{j+1} - \tau^j|}{E^s F^s} Q_s^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{v=1}^2 \Delta_v(\vartheta_s) [\varphi_v^1(\tau_v^{j+1}) - \varphi_v^1(\tau_v^j)] \right\},$$

$$j = \overline{N_s + 1, N_{s+1} - 1} \quad (s = \overline{1, m});$$

$$(2.5) \quad \sum_{j=N_s+1}^{N_{s+1}} P_j = Q_s^2 - Q_s^1 \quad (s = \overline{1, m}).$$

Здесь E^s, F^s — модуль Юнга и площадь поперечного сечения s -го ребра; δ_{jk} — символ Кронекера; q — податливость имитирующих заклепки пружин. На основе экспериментальных данных простые формулы для определения q даны, например, в [4].

Предельные случаи рассматриваемой задачи: а) подкрепленная полуплоскость ($x > 0$) с системой криволинейных разрезов ($b/a \rightarrow \infty$); б) подкрепленная бесконечная пластина с прямолинейным разрезом $\Lambda = \{|x| < a; y = 0\}$ и системой криволинейных разрезов L_j ($b/a = 0$).

3. Согласно допущениям относительно разрезов L_j ($j = \overline{1, k}$), (2.2) — сингулярное интегральное уравнение относительно $\Omega(t)$. Его индекс +1. Решение уравнения (2.2) при дополнительных ограничениях (2.3) в классе функций

$$(3.1) \quad \Omega(t) = \chi^j(\beta)(1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad t = \tau^j(\beta) \in L_j,$$

где $\chi^j(\beta)$ — ограниченные непрерывные по Гельдеру на $[-1, 1]$ функции, существует и единственно [8].

При помощи квадратурных формул Гаусса — Чебышева сводим решение уравнений (2.2) — (2.5) к решению системы линейных алгебраических

уравнений относительно P_k ($k = \overline{1, N}$) и приближенных значений искомым функций $\chi^j(\beta)$ ($j = \overline{1, k}$) в чебышевских узлах $\beta_i = \cos((2i - 1)\pi/(2M))$ ($i = \overline{1, M}$) (см., например, [9]).

Если система (2.2)–(2.5) решена и определены значения $\chi^j(+1)$, то с помощью асимптотических формул $\Phi_\nu(z_\nu) \approx \pm 2^{-3/2} \chi_\nu^j \{ \pm \tau_\nu^j(+1) / (z_\nu - c_\nu) \}^{1/2}$ ($\nu = 1, 2$), $\chi_1^j = \chi^j(\mp 1)$, $\chi_2^j = -a(c) \chi_1^j - b(c) \chi_1^j$, $\tau_\nu^j = \frac{d\tau_\nu^j}{d\bar{p}}$ находим распределение напряжений и КИН напряжений отрыва и сдвига $k_1(c) = \lim_{t \rightarrow c} \sigma_n \sqrt{2\pi r}$, $k_2(c) = \lim_{t \rightarrow c} \tau_n \sqrt{2\pi r}$ в вершинах $c = \tau^j(\mp 1)$ трещины L_j . Здесь t — точка, лежащая на продолжении трещины за конец c по касательной; $r = |t - c|$.

Если разрез L_p выходит, например, концом $a^p = \tau^p(-1)$ на контур отверстия Λ , то условие однозначности смещений (2.3) при $j = p$ следует отбросить, а соответствующий потенциал (1.5) уточнить. Уточнение, согласно [9], проведем с использованием условия ограниченности решения в точке a^p . В результате

$$\int_{L_p} \{ [P_\nu(z, \tau) - P_\nu(z, a^p)] \Omega_{1p}(\tau) d\tau_1 + [Q_\nu(z, \tau) - Q_\nu(z, a^p)] \overline{\Omega_{1p}(\tau)} d\bar{\tau}_1 \},$$

$$P_1(z, \tau) = \frac{1}{\eta_1 - \zeta_1} - \frac{1}{\zeta_1(1 - \zeta_1 \bar{\eta}_2)}, \quad Q_1(z, \tau) = \frac{a_0}{\zeta_2(1 - \zeta_2 \bar{\eta}_2)} - \frac{a_0}{\eta_2 - \zeta_2},$$

$$P_2(z, \tau) = \frac{l_1}{\zeta_1} \left(\frac{1}{1 - \zeta_1 \bar{\eta}_1} - \frac{1}{1 - \zeta_1 \bar{\eta}_2} \right), \quad Q_2(z, \tau) = \frac{1}{\zeta_2} \left(\frac{1}{1 - \zeta_2 \bar{\eta}_1} - \frac{n_2 \bar{a}_0}{1 - \zeta_2 \bar{\eta}_2} \right) - \frac{l_0}{\eta_2 - \zeta_2}.$$

Это приведет к соответствующим изменениям интегралов по L_p в (2.2), (2.4).

Численное решение возникающих уравнений на краевом разрезе L_p будем по-прежнему искать в классе функций (3.1). Для замкнутости получающейся системы алгебраических уравнений примем дополнительное условие $\chi^p(-1) = 0$, устраняющее заложенную особенность функции $\Omega(t)$ в точке a^p . Такой упрощенный способ дает вполне удовлетворительные результаты для внутренних вершин краевых трещин [9].

4. Ниже для равномерного растяжения усилиями $\sigma_y^0 = \sigma$ приводятся некоторые результаты расчетов КИН отрыва в вершинах трещин около эллиптического отверстия Λ в пластине из стеклоэпоксидного композита ($E_1 = 53,84$ ГПа, $E_2 = 17,95$ ГПа, $G_{12} = 8,63$ ГПа, $\nu_1 = 0,25$) и изотропного материала ($\nu = 0,33$), подкрепленной вдоль линий $x = x_k$ одинаковыми свободными от внешних усилий стрингерами. Точки крепежа расположены симметрично относительно оси x с постоянным шагом p . Ось x проходит посередине между заклепками, а число заклепок на каждом стрингере одинаково и равно $2n$. Податливость крепежа q полагалась равной нулю, $r/a = 0,025$, $p/a = 0,5$, а поправочный коэффициент $\Delta = 1$. Данные для изотропного материала получены путем предельного перехода в параметрах анизотропии в численном решении.

Пусть анизотропная пластина (главное направление анизотропии E_1 материала пластины образует с осью x угол $\varphi = 0$) содержит внутреннюю трещину $L = \{ \tau(\beta) = a + 2s + l(1 + \beta) \mid |\beta| < 1 \}$ и усилена одним стрингером, проходящим через середину перемычки ($x_1 = a + s$). На рис. 2 приводятся величины поправочного КИН отрыва в левой вершине трещины $k^* = k_1(-1)/(\sigma \sqrt{\pi l})$ в зависимости от n при $m = (a - b)/(a + b) = 0$ (круговое отверстие), $l/a = 1$ и различных значениях относительной жесткости ребра $U = E_1 a h / E^1 F^1 = 1; 0,5; 0,25; 0$ (кривые 1–4 соответственно). Сплошные (штриховые) линии относятся к $s/a = 0,1(0,5)$. При $n > 15$ значения k^* меняются незначительно, т. е. никакого улучшения не может быть достигнуто при увеличении числа точек крепежа. С ростом U и шага крепежа p эффективность подкрепления заметно уменьшается.

Пусть от контура отверстия Λ в анизотропной подкрепленной пластине исходят одна или две трещины $L_{1,2} = \{\tau^{1,2}(\beta) = \pm[a + l(1 + \beta)] \mid |\beta| < 1\}$.

Для двух трещин $L_{1,2}$ и двух подкрепляющих элементов ($x_{1,2} = \pm 2a$) на рис. 3, 4 представлена зависимость поправочного КИН отрыва в вершинах трещин $K = k_1(1)/k_1^*$ ($k_1^* = \sigma \sqrt{\pi(a + 2l)}$ — КИН отрыва в вершинах эквивалентной трещины $L^* = \{|x| < a + 2l; y = 0\}$ в ненадкрепленной пластине) от $\delta = 2l/a$ при $m = 0, U = 0,25; 0$ (кривые 1, 2) и $U = 0,25, m = 0; 1; -0,9$ (кривые 1—3) соответственно. Здесь и далее сплошные (штриховые) линии относятся к $\varphi = 0$ ($\pi/2$), $n = 9$. Для малых трещин ($\delta < 1$) K существенно зависит от степени анизотропии материала E_1/E_2 и формы отверстия. При $\delta > 2$ влияние формы отверстия на K слабое. С увеличением E_1/E_2 разница между значениями K при $\varphi = 0$ и $\pi/2$ растет. Даже для сильно вытянутых эллипсов с малым раскрытием значение k_1 отличается от КИН отрыва для эквивалентной трещины в пластине с тем же подкреплением. Следовательно, не всегда в расчетах подкрепленных пластин можно заменять рассматриваемые дефекты эквивалентными трещинами, как это делается на практике. Минимальное значение K достигается для трещин, заходящих за подкрепляющий элемент примерно на $0,25 a$.

На рис. 5 приведены значения $K = k_1(1)/k_1^*$ ($k_1^* = \sigma \sqrt{\pi(a + l)}$) для одной краевой трещины и трех подкрепляющих элементов ($x_{1,2} = \pm 1,4a, x_3 = 4,2a, U = 0,5$), 1 — стрингер с номером 1 разрушен посередине, 2 — неповрежденный стрингер. Значение

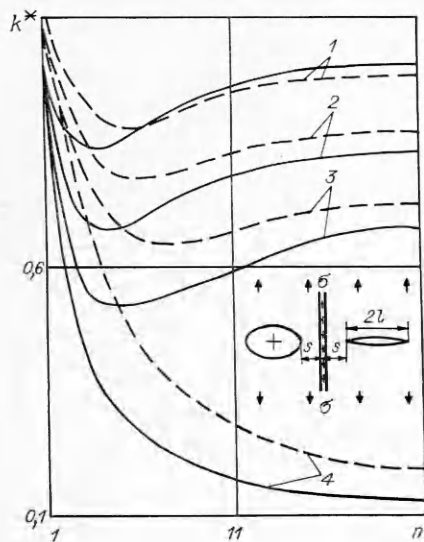


Рис. 2

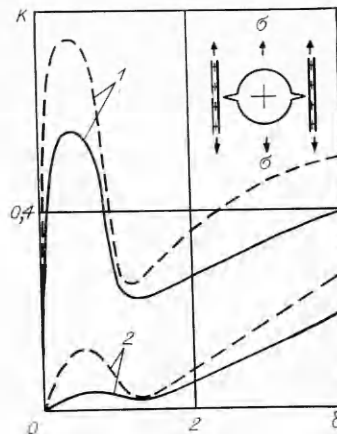


Рис. 3

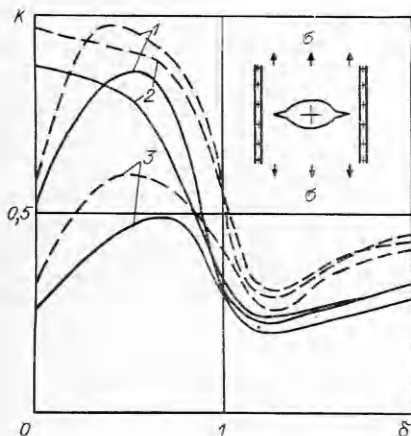


Рис. 4

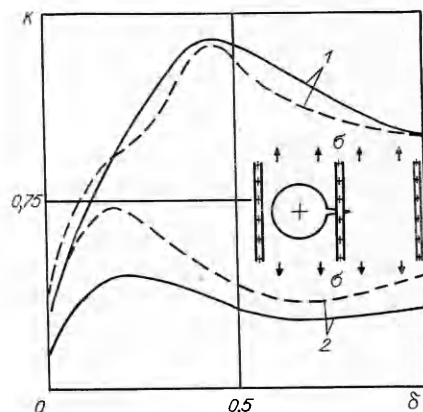


Рис. 5

δ	$M=8$	$M=16$	[10]	δ	$M=8$	$M=16$	[10]
0,01	3,288	3,292	3,291	0,4	1,883	1,885	1,884
0,04	3,092	3,096	3,095	1	1,305	1,306	1,306
0,06	2,976	2,979	2,978	4	1,030	1,031	1,030
0,1	2,769	2,772	2,771	10	0,779	0,780	—

$k_1(1)$ в случае поврежденного подкрепления значительно увеличивается и становится даже выше соответствующих значений k_1 для неподкрепленной пластины до тех пор, пока трещина не окажется в зоне влияния соседнего стрингера. Таким образом, повреждение подкрепления делает конструкцию более восприимчивой к разрушению.

Расчеты свидетельствуют об эффективности выбранных представлений и алгоритма расчета. Значения k_1 на рис. 2—5 совпадают между собой в первых трех значащих цифрах уже для $M \geq 16$. Например, в таблице даны для сравнения значения $k_1/(\sigma \sqrt{\pi l})$ в вершине краевой трещины L_1 , исходящей от контура кругового отверстия в неподкрепленной изотропной пластине (в расчетах полагалось $\mu_1 = 0,98i$, $\mu_2 = 1,02i$), при $M = 8,16$ и соответствующие значения из [10].

При $m = 1$ (отверстие вырождается в разрез) результаты расчетов для анизотропного материала совпадают с данными [11], а для изотропного хорошо согласуются с результатами расчета и эксперимента [4, 12]. Максимальная погрешность в определении k_1 относительно расчетных результатов [4], где использовалась структурная теория заклепки, составляет $\sim 2\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения.— М.: Наука, 1985.
2. Rich T. P., Ghassem M. M., Cartwright D. J. Fracture diagrams for cracked stiffened panels // Engng Fract. Mech.— 1985.— V. 21, N 5.
3. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов.— М.: Наука, 1983.
4. Swift T. The effects of fastener flexibility and stiffener geometry on the stress intensity in stiffened cracked sheets // Prospects of Fracture Mechanics. — Delft: Noordhoff International Publishing, 1974.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1957.
6. Грилицкий Д. В. Влияние точки приложения силы и момента на распределение напряжений в бесконечной анизотропной пластине с эллиптическим отверстием // ПМ.— 1956.— Т. 2, вып. 2.
7. Фильштинский Л. А. Краевые задачи для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. МТТ.— 1980.— № 6.
8. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматиздат, 1962.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1981.
10. Tweed J., Rooke D. P. The distribution of stress near the tip of radial crack at the edge of circular hole // Intern. J. Engng Sci.— 1973.— V. 11, N 11.
11. Максименко В. Н., Приказчик Л. И., Хан Ю. Н. Влияние приклепанных стрингеров на напряженное состояние в анизотропной пластинке с эллиптическим отверстием или трещиной // Прочность и колебания авиационных конструкций.— Казань: КАИ, 1984.
12. Vliger H. The residual strength characteristics of stiffened panels containing fatigue cracks // Engng Fract. Mech.— 1973.— V. 5, N 2.

Поступила 13/XI 1986 г.