

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ПОЛЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И. В. Никитина, А. Г. Сазонтов

(Горький)

1. Как известно, знание спектральных характеристик пассивной примеси, находящейся в поле развитой турбулентности, необходимо при исследовании различных физических явлений, в частности для понимания процессов перемешивания [1]. Информация о статистических свойствах соответствующих скалярных полей (концентрации, температуры, влажности и т. п.) важна при анализе распространения и рассеяния звуковых, оптических и радиоволн в турбулентной среде [2].

В данной работе изучение спектральной структуры пассивной примеси проводится с помощью регулярной процедуры, основанной на диаграммной технике Уайльда [3]. В рамках улучшенного приближения прямых взаимодействий найдены спектры пассивной примеси в инерционно-конвективном интервале, полученные ранее из соображений размерности [4, 5] и полумпирических теорий, обзор которых содержится в [6, 7]. Определено направление перекачки пассивной примеси по спектру масштабов. Изучено асимптотическое поведение спектра в вязкодиффузионном интервале волновых чисел. Анализ спектральных характеристик в целях общности изложения проводится в пространстве произвольной размерности d .

2. Для описания пассивной примеси в поле однородной изотропной турбулентности рассмотрим уравнения Навье — Стокса, уравнение непрерывности и уравнение диффузии, которые в \mathbf{k} -представлении имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) v_{\mathbf{k}}^{\alpha} = -\frac{i}{2} P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma} \int v_{\mathbf{k}_1}^{*\beta} v_{\mathbf{k}_2}^{*\gamma} \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2,$$

$$k_{\alpha} v_{\mathbf{k}}^{\alpha} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi k^2\right) \vartheta_{\mathbf{k}} = -ik_{\alpha} \int v_{\mathbf{k}_1}^{*\alpha} \vartheta_{\mathbf{k}_2}^{*} \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2,$$

где $P_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta\gamma} = k_{\beta} \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\gamma} + k_{\gamma} \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$; $\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} / k^2$;

$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера; $v_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ и $\vartheta_{\mathbf{k}}$ — d -мерные преобразования Фурье поля скорости и концентрации пассивной примеси:

$$v_{\mathbf{k}}^{\alpha}(t) = \int \frac{d^{(d)}\mathbf{r}}{(2\pi)^d} v^{\alpha}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \vartheta_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{d^{(d)}\mathbf{r}}{(2\pi)^d} \vartheta(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}};$$

ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости; χ — коэффициент молекулярной диффузии (теплопроводности).

В дальнейшем для определенности будем считать, что $\vartheta(\mathbf{r}, t)$ — температура, переносимая жидкостью, но не оказывающая существенного влияния на динамику турбулентности.

Перейдем к статистическому описанию изотропных полей скорости и температуры. Для этого воспользуемся диаграммной техникой Уайльда [3], оперирующей для каждого нелинейного поля двумя характеристиками: парным коррелятором и функцией Грина. Введем графическое изображение этих величин в $\mathbf{k} - \omega$ -представлении (см. фигуру):

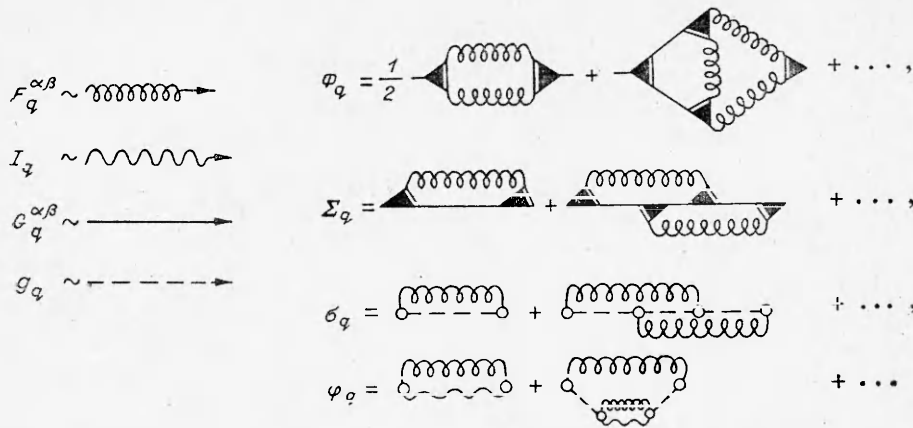
$$(2.1) \quad \langle v_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha} v_{\mathbf{k}'\omega'}^{*\beta} \rangle = F_q^{\alpha\beta} \delta^{(d+1)}(q - q'), \quad \langle \vartheta_{\mathbf{k}\omega} \vartheta_{\mathbf{k}'\omega'}^{*} \rangle = I_q \delta^{(d+1)}(q - q'),$$

$$\left\langle \frac{\delta v_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha}}{\delta f_{\mathbf{k}'\omega'}^{*\beta}} \right\rangle = G_q^{\alpha\beta} \delta^{(d+1)}(q - q'), \quad \left\langle \frac{\delta \vartheta_{\mathbf{k}\omega}}{\delta f_{\mathbf{k}'\omega'}^{*(\vartheta)}} \right\rangle = g_q \delta^{(d+1)}(q - q'),$$

$$q = (\mathbf{k}, \omega), \quad \delta^{(d+1)}(q) \equiv \delta(\omega) \delta^{(d)}(\mathbf{k}).$$

В силу изотропности турбулентности спектральные тензоры $F_q^{\alpha\beta}$ и $G_q^{\alpha\beta}$ могут быть представлены в виде

$$F_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta} = F_{\mathbf{k}\omega} \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}, \quad G_{\mathbf{k}\omega}^{\alpha\beta} = G_{\mathbf{k}\omega} \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}.$$



Вспомогательные величины $G_{\mathbf{k}\omega}$ и $g_{\mathbf{k}\omega}$ описывают реакцию турбулентных полей скорости и температуры на внешние воздействия $f_{\mathbf{k}\omega}$ и $f_{\mathbf{k}\omega}^{(T)}$, вводимые в правые части уравнений Навье — Стокса и температуропроводности.

Спектральные характеристики (2.1) удовлетворяют уравнениям Дайсона

$$(2.2a) \quad F_{\mathbf{k}\omega} = |G_{\mathbf{k}\omega}|^2 \Phi_{\mathbf{k}\omega}, \quad G_{\mathbf{k}\omega} = (\omega + i\nu k^2 - \Sigma_{\mathbf{k}\omega})^{-1},$$

$$(2.2b) \quad I_{\mathbf{k}\omega} = |g_{\mathbf{k}\omega}|^2 \varphi_{\mathbf{k}\omega}, \quad g_{\mathbf{k}\omega} = (\omega + i\chi k^2 - \sigma_{\mathbf{k}\omega})^{-1}.$$

Первые диаграммы для Φ_q , Σ_q и φ_q , σ_q приведены на фигуре, где треугольником изображена вершина $\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma} \delta^{(d+1)}(q + q_1 + q_2) (\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma} = [\Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\alpha_1} \mathbf{k}_{\beta_1} + \Delta_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta_1} \mathbf{k}_{\alpha_1}] \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha_1\beta} \Delta_{\mathbf{k}_2}^{\beta_1\gamma})$, а кружком — величина $k_\alpha \delta^{(d+1)}(q + q_1 + q_2)$.

Анализ исходных диаграммных рядов (см. фигуру) наталкивается на известные трудности, связанные с расходимостями интегралов в области малых \mathbf{k} . Физически эти расходимости обусловлены эффектом переноса мелкомасштабных пульсаций энергосодержащими вихрями. В работе [8] была отсуммирована часть наиболее расходящихся диаграмм для гидродинамической турбулентности, описывающих переносные взаимодействия. При этом улучшенные уравнения в приближении прямых взаимодействий (которое соответствует учету диаграмм второго порядка по вершинам $\Gamma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{\alpha\beta\gamma}$) в трехмерном [9] и двумерном [10] случаях допускают точные решения в виде колмогоровских спектров. Приведем соответствующие значения индексов для парного коррелятора поля скорости, которые нам понадобятся при анализе спектров пульсаций температуры:

$$\tilde{F}_{\mathbf{k}\omega} = k^{-(\alpha+\beta)} f(\omega/k^\beta)$$

(причем функция \tilde{F}_q связана с исходной F_q посредством $F_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{F}_{\mathbf{k}\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}}$, где под $\langle \dots \rangle_{\mathbf{v}}$ понимается усреднение по случайному полю скорости в произвольной точке (\mathbf{r}, t) с помощью процедуры Уайльда).

В трехмерном случае ($d = 3$) $\alpha = 11/3$, $\beta = 2/3$; в двумерном ($d = 2$) — существуют два решения соответственно с $\alpha = 8/3$, $\beta = 2/3$ и $\alpha = 4$, $\beta = 0$, причем первое отвечает спектру с постоянным потоком энергии ϵ_0 , второе — спектру с постоянным потоком энтропии ϵ_2 .

С учетом эффекта переноса в диаграммах для σ_q и φ_q появляются определенные вычитания, при этом в рамках модели прямых взаимодействий соответствующие величины имеют вид

$$(2.3) \quad \tilde{\sigma}_q = \int k_\alpha k_{2\beta} \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{q_2} \tilde{F}_{q_1} [\delta^{(d+1)}(q + q_1 + q_2) - \delta^{(d+1)}(q + q_1)] dq_1 dq_2,$$

$$\tilde{\varphi}_q = \int k_\alpha k_\beta \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \tilde{I}_{q_2} \tilde{F}_{q_1} [\delta^{(d+1)}(q + q_1 + q_2) - \delta^{(d+1)}(q + q_1)] dq_1 dq_2,$$

$$g_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{g}_{\mathbf{k}\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}}, \quad I_{\mathbf{k}\omega} = \langle \tilde{I}_{\mathbf{k}\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}}.$$

Спектральные функции $\tilde{g}_{k\omega}$ и $\tilde{I}_{k\omega}$ в свою очередь также удовлетворяют уравнениям Дайсона:

$$(2.4) \quad \tilde{I}_{k\omega} = |\tilde{g}_{k\omega}|^2 \tilde{\varphi}_{k\omega}, \quad \tilde{g}_{k\omega} = (\omega + i\chi k^2 - \tilde{\sigma}_{k\omega})^{-1}.$$

3. Рассмотрим вначале статистические характеристики поля температуры в инерционно-конвективном интервале $\min(L, L_\theta) = L_0 \gg k^{-1} \gg \eta_0 = \max(\eta, \eta_\theta)$, где L, L_θ — характерные масштабы энергосодержащей части спектра поля скорости и температуры; $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, $\eta_\theta = (\chi^3/\varepsilon)^{1/4}$ — внутренние колмогоровские масштабы соответствующих полей*. Для возмущений с масштабами из этого интервала можно пренебречь внутренним трением и молекулярной теплопроводностью.

Прежде всего заметим, что система уравнений (2.4) допускает термодинамически равновесное решение $\tilde{I}_q = (T/\pi) \text{Im } \tilde{g}_q$, которое реализуется в исключительных ситуациях, когда можно пренебречь источниками и стоками турбулентности. Система (2.4) содержит также и неравновесные потоковые распределения, которые (при $\nu = \chi = 0$) будем искать в масштабно-инвариантном виде

$$(3.1) \quad \tilde{I}_q = k^{-(\alpha+\beta)} r(\omega/k^s), \quad \tilde{g}_q = k^{-\beta} h(\omega/k^s).$$

Решение с потоком (3.1), например, в океанологических условиях, согласно Филлипсу [1], отвечает следующей физической картине. Случайное вовлечение холодной воды снизу создает в верхнем слое океана источник флуктуаций температуры, при этом характерный начальный масштаб этих пульсаций соответствует масштабу вихрей жидкости, ответственных за вовлечение. Каскадный процесс дробления вихрей поля скорости на все меньшие и меньшие возмущения (при $d = 3$) будет приводить одновременно и к дроблению неоднородностей поля температуры до тех пор, пока в игру не вступит молекулярная теплопроводность, приводящая к выравниванию температуры в близких точках. Таким образом, в результате вовлечения и последующего каскадного процесса дробления из-за турбулентного перемешивания возникает поток меры температурных неоднородностей по спектру масштабов.

Выражение для индекса s может быть получено непосредственно из уравнений Дайсона (2.4)

$$(3.2) \quad s = 2 + d - (\alpha + \beta).$$

Для нахождения индекса p стандартным образом [11] образуем комбинацию

$$(3.3) \quad \tilde{I}_q = \text{Im} (\tilde{\varphi}_q \tilde{g}_q^* + \tilde{I}_q \tilde{\sigma}_q) = 0,$$

эквивалентную уравнению Дайсона для \tilde{I}_q .

Интегрируя (3.3) по ω и совершая далее конформное преобразование [9]

$$k = k''(k/k''), \quad k_1 = k'(k/k''), \quad k_2 = k(k/k''), \\ \omega = \omega''(k/k'')^s, \quad \omega_1 = \omega'(k/k'')^s, \quad \omega_2 = \omega(k/k'')^s,$$

получим уравнение

$$(3.4) \quad 0 = \tilde{I}_k = \frac{\text{Im}}{2} \int d\omega dq_1 dq_2 \delta^{(d+1)}(q + q_1 + q_2) \times \\ \times (k_\beta \tilde{g}_q \tilde{I}_q^{-1} + k_{2\beta} \tilde{g}_{q_2} \tilde{I}_{q_2}^{-1}) [k_\alpha + (k/k_2)^x k_{2\alpha}] \Delta_{k_1}^{\alpha\beta} \tilde{F}_{q_1} \tilde{I}_q \tilde{I}_{q_2},$$

где $x = 2 + 2d - p - (\alpha + \beta)$.

Наряду с равновесным решением $\tilde{I}_q = (T/\pi) \text{Im } \tilde{g}_q$ из (3.4) видно, что имеется также и другое решение при $x = 0$, обращающее в нуль выраже-

* В двумерном случае роли η и η_θ играют масштабы $\eta_2 = (\nu/\varepsilon_2^{1/3})^{1/2}$ и $\eta_{2\theta} = (\chi/\varepsilon_2^{1/3})^{1/2}$.

ние в квадратных скобках в силу очевидного тождества

$$(\overline{k_\alpha} + k_{2\alpha}) \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = 0,$$

отражающего наличие интеграла движения $\int |\vartheta_{\mathbf{k}}|^2 d^{(d)}\mathbf{k}$ исходной системы уравнений. Таким образом, для индекса p получается соотношение

$$(3.5) \quad p = 2 + 2d - (\alpha + \beta).$$

Из (3.2), (3.5) для трехмерного случая с учетом колмогоровских значений α и β получаются также колмогоровские выражения для p и s : $p = 11/3$, $s = 2/3$.

Для $d = 2$ соответственно имеем два спектра с $p = 8/3$, $s = 2/3$ и $p = 2$, $s = 0$.

Простой анализ, аналогичный проведенным в [12, 10], показывает, что сходимость интегралов в (2.3), (3.3) на найденных распределениях выполняется на нижнем и на верхнем пределах, и, таким образом, полученные спектры являются локальными.

4. Рассмотрим направление потока температурных неоднородностей по спектру масштабов. Для этого запишем уравнение баланса для спектральной интенсивности температурных пульсаций

$$(4.1) \quad \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -2 \operatorname{Im} k_\alpha \int J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2,$$

где $J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha = \langle v_{\mathbf{k}_1}^\alpha \vartheta_{\mathbf{k}_2} \vartheta_{\mathbf{k}} \rangle$.

Оно имеет вид уравнения непрерывности, поэтому правая часть может быть представлена в виде дивергенции потока меры неоднородности поля температуры:

$$(4.2) \quad \varepsilon_T = -(1/2) S(d) \int_0^k k^{d-1} dk 2 \operatorname{Im} k_\alpha \times \\ \times \int J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2.$$

Здесь $S(d) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ — площадь единичной сферы в d -мерном пространстве, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Выразим тройной коррелятор $J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha$ в виде ряда по степеням \tilde{g}_q , \tilde{I}_q и \tilde{F}_q , при этом в приближении прямых взаимодействий для стационарного случая имеем *

$$(4.3) \quad J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^\alpha = \langle \int \tilde{J}_{qq_1q_2}^\alpha \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2) d\omega d\omega_1 d\omega_2 \rangle_{\mathbf{v}} = \\ = \int \tilde{J}_{qq_1q_2}^\alpha \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2) d\omega d\omega_1 d\omega_2,$$

где $\tilde{J}_{qq_1q_2}^\alpha = [k_\beta \tilde{g}_q \tilde{I}_{q_2} + k_{2\beta} \tilde{g}_{q_2} \tilde{I}_q] \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \tilde{F}_{q_1}$.

С учетом (4.3) выражение (4.2) можно переписать в виде

$$(4.4) \quad \varepsilon_T = S(d) \int_0^k \tilde{l}_{\mathbf{k}} k^{d-1} dk.$$

На степенных пространственных спектрах пульсаций температуры $I_{\mathbf{k}} = Ak^{-p}$ и поля скорости $F_{\mathbf{k}} = C_i k^{-\alpha} l_{\mathbf{k}}$ также принимает масштабно-инвариантный вид $\tilde{l}_{\mathbf{k}} \sim k^{x-d}$. В этом случае из (4.4) следует

$$(4.5) \quad \varepsilon_T = S(d) k^d l_{\mathbf{k}}/x.$$

* Дополнительное интегрирование по ω снимает усреднение по \mathbf{v} .

При этом $x = 0$ (4.5) содержит неопределенность $0/0$. Раскрытие неопределенности приводит к связи потока и производной по индексу * [10]

$$(4.6) \quad \varepsilon_T = S(d) k^d \frac{\partial \tilde{l}_k}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Для нахождения производной удобно воспользоваться факторизованным выражением для \tilde{l}_k в виде (3.4). Тогда из (4.6) получим

$$(4.7) \quad \varepsilon_T = (\pi/2) S(d) k^d \int d^{(d)} \mathbf{k}_1 d^{(d)} \mathbf{k}_2 \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \times \\ \times \Theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} (k_\alpha \ln k + k_{2\alpha} \ln k_2) (k_\beta I_{\mathbf{k}_2} + k_{2\beta} I_{\mathbf{k}}) F_{\mathbf{k}_1},$$

где $\Theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \int_0^\infty \frac{dt}{2\pi} h(k^s t) f(k^s t) r(k^s t)$ — положительно определенная функция [15].

Введя безразмерные переменные посредством $k_1 = ku$, $k_2 = kv$, окончательно перепишем (4.7) следующим образом:

$$(4.8) \quad \varepsilon_T = 2^{d-2} S(d) S(d-1) A C_i^{1/2} \int_{\Delta} \int \frac{du dv}{u^2} \Theta_{uv} v^{-p+1} u^{-\alpha+1} \times \\ \times (v^p - 1) \ln v \Delta_{uv}^{d-1},$$

где $\Delta_{uv} = (1/4) \sqrt{2(u^2 v^2 + u^2 + v^2) - 1 - u^4 - v^4}$ — площадь треугольника со сторонами u , v и 1 , т. е. величина существенно положительная.

Интегрирование в (4.8) проводится по области Δ , определяемой неравенствами: $|u - v| \leq 1 \leq u + v$. Направление потока ε_T дается знаком интеграла в правой части (4.8). При $\text{sign } \varepsilon_T > 0$ поток направлен в сторону больших волновых чисел, при обратном неравенстве — в область малых. Заметим, что константа C_i в колмогоровском спектре для поля скорости связана с потоком энергии (или энтрофии при $d = 2$) соотношением $C_i \sim \varepsilon_i^{2/3}$. С учетом этого получим

$$\text{sign } \varepsilon_T = \text{sign } \varepsilon_i \text{ sign } [(v^p - 1) \ln v] \equiv \text{sign } \varepsilon_i \text{ sign } p.$$

При $p = 0$ величина потока ε_T обращается в нуль. Это связано с тем, что такое значение p соответствует термодинамически равновесному решению.

Для неравновесных распределений $p > 0$ (как при $d = 3$, так и при $d = 2$) и поток температурных неоднородностей всегда имеет знак соответствующего потока поля скорости. Насколько нам известно, знак ε_T ранее не обсуждался в литературе.

5. Рассмотрим поведение спектра температурных пульсаций в области больших волновых чисел. В этом случае форма спектра $I_{\mathbf{k}}$ будет существенно зависеть от значения числа Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$. В дальнейшем ограничимся случаем $\text{Pr} \gg 1$, который типичен для большинства реальных жидкостей. При $\text{Pr} \gg 1$ существует вязкоконвективный интервал волновых чисел $\eta^{-1} \ll k \ll (\text{Pr})^{1/2} \eta^{-1} = (\varepsilon/\nu\chi^2)^{1/4}$, где молекулярная вязкость уже играет существенную роль, а влияние молекулярной диффузии (теплопроводности) пренебрежимо мало. В этом интервале спектр кинетической энергии экспоненциально убывает, а спектр температурных пульсаций при $d = 3$, согласно полуэмпирической теории Бэтчелора [16], изменяется по закону «минус первой степени»: $k^2 I_{\mathbf{k}} \sim k^{-1}$. Аналитически получение этого результата наталкивается на значительные трудности, поскольку в исходных диаграммных рядах уже отсутствует масштабная инвариантность (так как спектр кинетической энергии не является степенной функцией) и формально необходимо учитывать все слагаемые в уравнениях как для I_q , так и для g_q .

В вязкотеплопроводном интервале, т. е. при $k \gg (\varepsilon/\nu\chi^2)^{1/4}$, одновременно существенны молекулярная вязкость и теплопроводность, при этом

* Аналогичное соотношение имеется в теории слабой турбулентности [13, 14].

в этой области масштабов в задаче возникают существенные упрощения [17, 18]. Во-первых, переносные взаимодействия, которые затрудняют анализ в инерционно-конвективном интервале, здесь являются несущественными. Во-вторых, функция Грина для поля скорости совпадает со своим значением в покоящейся жидкости. Аналогично [17, 18] можно показать, что эти же выводы справедливы и для характеристик пассивной примеси. Таким образом, в вязкотеплопроводном интервале для спектра температурных пульсаций из (2.26) получим следующее уравнение в $\mathbf{k} - t$ -представлении:

$$(5.1) \quad I_{\mathbf{k}}(t-t') = \int d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2 \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) k_\alpha k_\beta \Delta_{\mathbf{k}_1}^{\alpha\beta} \times \\ \times \int_{-\infty}^t \frac{d\tau_1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{d\tau_2}{2\pi} g_{\mathbf{k}}^{(0)}(t-\tau_1) g_{\mathbf{k}}^{*(0)}(t'-\tau_2) I_{\mathbf{k}_2}(\tau_1-\tau_2) F_{\mathbf{k}_1}(\tau_1-\tau_2) + \dots$$

Выполнив интегрирование в (5.1) по времени (с учетом, что $g_{\mathbf{k}}^{(0)}(\tau) = 2\pi e^{-\chi k^2 \tau}$) и ограничившись для простоты лишь первым слагаемым в правой части, для одновременных спектральных функций $I_{\mathbf{k}} \equiv I_{\mathbf{k}}(0)$ найдем

$$(5.2) \quad I_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\chi^2 k^2} \int d^{(d)}\mathbf{k}_1 d^{(d)}\mathbf{k}_2 \delta^{(d)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \left[1 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} \right] I_{\mathbf{k}_2} F_{\mathbf{k}_1}.$$

Спектр кинетической энергии в интервале диссипации, как показано в [18], содержит экспоненциальный множитель $F_{\mathbf{k}} \sim e^{-k\eta}$, поэтому основной вклад в интеграл (5.2) даст область, где $k_1 \ll k$. Разложим подынтегральную функцию в (5.2) в ряд по k_1/k с точностью до членов второго порядка

$$I(|\mathbf{k} + \mathbf{k}_1|) \simeq I_k + \left(k_1 \cos \theta + (1/2) \frac{k_1^2}{k} \sin^2 \theta \right) \frac{dI_k}{dk} + (1/2) k_1^2 \cos^2 \theta \frac{d^2 I_k}{dk^2},$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_1 . Подставляя это выражение в (5.2) и интегрируя по θ с использованием, что $d^{(d)}\mathbf{k}_1 = S(d-1) k_1^{d-1} \sin^{d-2} \theta dk_1 d\theta$, имеем

$$(5.3) \quad I_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi} S(d-1) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{(\chi k)^2 \Gamma(d/2+1)} \int dk_1 k_1^{d-1} F_{k_1} \times \\ \times \left\{ I_k + (1/2) \frac{k_1^2}{k} \frac{d+1}{d+2} \frac{dI_k}{dk} + (1/2) \frac{k_1^2}{d+2} \frac{d^2 I_k}{dk^2} \right\}.$$

Удобно переписать уравнение (5.3) в виде

$$(5.4) \quad \frac{d^2 I_k}{dk^2} + \frac{d+1}{k} \frac{dI_k}{dk} + 2 \left[\frac{2E_0 \nu}{\varepsilon} (d+2) - k_2 \frac{\chi^2 \nu}{\varepsilon} d(d+2) \right] I_k = 0,$$

где $E_2 = \frac{2}{2} S(d) \int_0^\infty F_{k_1} k_1^{d-1} dk_1$ — полная кинетическая энергия единицы объема; $\varepsilon = (d-1) \nu S(d) \int_0^\infty F_{k_1} k_1^{d+1} dk_1$ — средняя скорость диссипации кинетической энергии.

Уравнение (5.4) при $k \rightarrow \infty$ имеет следующее асимптотическое решение:

$$I_k \approx B \exp \left[- (1/2) \sqrt{\frac{2\chi^2 \nu d (d+2)}{\varepsilon}} k^2 \right].$$

Значение параметра B может быть найдено из условия нормировки $(d-1) \chi S(d) \int_0^\infty I_k k^{d+1} dk = \varepsilon_T$. Такого вида экспоненциальный множи-

тель ранее был найден Бэтчелором [16] из полуэмпирических уравнений с точностью до константы $(1/2)\sqrt{2d(d+2)}$, которая входила в теорию неопределенным параметром. Аналитический подход в трехмерном случае дает значение этой константы $\sqrt{30}/2 \approx 2,74$, что неплохо согласуется с экспериментальным значением, приблизительно равным 2 [1].

В заключение подчеркнем, что все приведенные выше формулы относятся не только к температуре, но и к концентрации произвольной пассивной примеси, например, к влажности или концентрации CO_2 в атмосфере, к солености океана, к плотности электронов в ионосфере и т. п.

Поступила 16 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппе О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967.
3. Wyld H. W. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid.— *Ann. Phys.*, 1964, vol. 14, N 2.
4. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке.— *Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.*, 1949, т. 13, № 1.
5. Яглом А. М. О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке.— *ДАН СССР*, 1949, т. 69, № 6.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
7. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизмы и теория. М., 1963.
8. Львов В. С. К теории развитой гидродинамической турбулентности. Препринт № 53 ИАиЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1977.
9. Kuznetsov E. A., L'vov V. S. On the Kolmogorov turbulent spectrum in direct interaction model.— *Phys. Lett.*, 1977, vol. 64A, N 2.
10. Сазонтов А. Г. О спектрах двумерной турбулентности.— *ПМТФ*, 1981, № 2.
11. Захаров В. Е., Львов В. С. О статистическом описании нелинейных волновых полей.— *Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика*, 1975, т. 18, № 10.
12. Кузнецов Е. А., Носков Н. Н. О спектрах гиротропной турбулентности.— *ЖЭТФ*, 1978, т. 75, вып. 4.
13. Карась В. И., Моисеев С. С., Новиков В. Е. Неравновесные стационарные распределения частиц в твердотельной плазме.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, вып. 4.
14. Кац А. В. Направление перекачки энергии и числа квазичастиц по спектру в стационарных степенных решениях кинетических уравнений для волн.— *ЖЭТФ*, 1976, т. 71, вып. 6.
15. Kraichnan R. H. An almost Markovian Galilean-invariant turbulence model.— *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 47, N 3.
16. Batchelor G. K. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. P. I. General discussion in the case of small conductivity.— *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 5, N 1.
17. Кузьмин Г. А., Паташинский А. З. Коротковолновая асимптотика спектра турбулентности.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 76, вып. 6.
18. Кузьмин Г. А. Интервал диссипации энергии d -мерной турбулентности. Препринт 39—79 ИТФ СО АН СССР. Новосибирск, 1979.

УДК 532.546

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

И. А. Амирасланов, Г. П. Черепанов
(Кировабад)

1. Инвариантные Γ -интегралы в теории фильтрации. Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в однородной изотропной пористой среде описывается следующими уравнениями [1]:

$$(1.1) \quad \varphi_{,i} = 0, \quad v_i = \varphi_{,i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \varphi = -(k/\rho g)p - kx_3,$$

где v_i — составляющие скорости фильтрации; p — давление жидкости; k — коэффициент фильтрации; ρg — удельный вес жидкости; φ — потенциал скорости; x_1, x_2, x_3 — декартовы прямоугольные координаты (ось x_3 направлена противоположно направлению силы тяжести).