

**КРИТЕРИЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МЕДЛЕННОГО  
ГОРЕНИЯ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ**

С. К. Асланов  
(Одесса)

Исследуя поведение фронта пламени по отношению к малым возмущениям, Л. Д. Ландау [1] пришел к выводу об абсолютной неустойчивости в предположении постоянства скорости нормального горения, т. е. при отсутствии влияния возмущений на внутреннюю газодинамическую структуру пламенной зоны. Прямо противоположный результат был получен [2, 3] при рассмотрении указанной задачи для режима индукции, когда первоначальная горючая смесь находится в условиях возможного протекания химической реакции, а, следовательно, пламя обладает слабой интенсивностью. Анализ устойчивости [4] выполнен при наличии стабилизирующего эффекта зависимости скорости горения от кривизны фронта пламени. В настоящей работе исследование устойчивости процесса медленного горения относительно малых возмущений производится с учетом влияния этих возмущений на внутреннюю газодинамическую структуру пламенной зоны, так что предыдущие исследования [1—3] выводятся из данного как предельные случаи. В результате удастся аналитически найти критерий, который разделяет устойчивый и неустойчивый режимы горения газовых смесей.

Рассмотрим стационарное плоское пламя, располагающееся перпендикулярно оси  $x$ , так что течение газа происходит в положительном направлении этой оси. Малая скорость медленного горения позволяет пользоваться моделью несжимаемой жидкости. Преобразования горючей смеси с давлением  $p_1$ , плотностью  $\rho_1$ , скоростью  $v_1$ , температурой  $T_1$  и температуропроводностью  $\chi_1$  в продукты сгорания с параметрами  $p_2$ ,  $\rho_2$ ,  $v_2$ ,  $T_2$ ,  $\chi_2$  осуществляются непрерывно внутри «зоны пламени», занимающей некоторую промежуточную область ширины  $L$ . Если считать, что химическая реакция заканчивается в момент  $t$  на оси  $y$ , то пламенная зона будет располагаться вверх по течению до  $x = -L$  (рис. 1). Зона пламени состоит из: 1) зоны прогрева и диффузии, где химическая реакция практически не идет, а температура исходной смеси возрастает за счет притока тепла от продуктов сгорания; 2) зоны химической реакции (заштрихована на рис. 1), где происходят энергичные химические превращения и очень быстро образуются продукты сгорания. В зоне прогрева смесь нагревается механизмом теплопроводности до температуры воспламенения  $T_b$ . Благодаря сильной зависимости скорости химической реакции от температуры, последняя протекает в

весьма узком интервале температур ( $T_b, T_2$ ), так что зона реакции составляет относительно небольшую часть  $l$  общей ширины пламени  $L$ .

Пусть под влиянием случайных причин, например, химической неоднородности положение, отвечающее окончанию реакции, отклонится для некоторого  $y$  от первоначального  $x=0$ . В результате этого зона

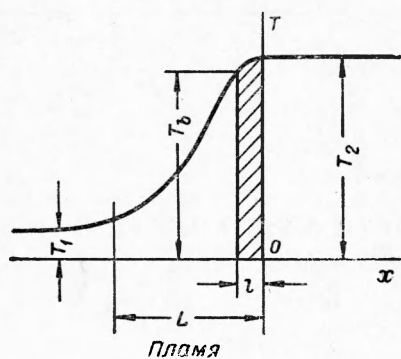


Рис. 1.

химической реакции изогнется и пошлет от себя в обе стороны гидродинамические возмущения, которые будут оказывать, в свою очередь, обратное воздействие на химическую кинетику. Следовательно, гидродинамические возмущения интерферируют с пламенем двояким образом. Во-первых, под их влиянием меняется структура зоны реакции, что сказывается в изменении времени химической реакции. Во-вторых, возмущения изменяют внутреннюю газодинамическую структуру зоны прогрева, вследствие чего происходит изменение характера рас-

пространения пламени как целого, т. е. его искривление и возможное изменение скорости нормального горения. Как показано в [2], изменением времени химической реакции за счет возмущений можно пренебречь в рамках несжимаемой жидкости. Значит, структура зоны реакции не зависит от возмущений. Последнее, вместе с указанной выше узостью этой зоны, позволяет вообще исключить ее из данного рассмотрения и представить пламя моделью тепловой волны в первоначальной смеси перед нагретой до температуры  $T_b \approx T_2$  плоскостью  $x=0$ . Распределение температур (рис. 1) в такой волне описывается решением задачи стационарной теплопроводности

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \exp\left(\frac{v_1}{x_1} x\right). \quad (1)$$

Под толщиной пламени понимают ширину  $(-L, 0)$  зоны эффективного изменения температуры, вычисляемую из соображений размерности

$$L = b \frac{x_1}{v_1}, \quad b = O(1). \quad (2)$$

Выше отмечалось, что малое случайное возмущение в процессах горения приводит к возмущению зоны пламени как целого, результатом чего является возникновение акустических возмущений в несгоревшем ( $x < 0$ ) и сгоревшем ( $x > 0$ ) газах и вихревого возмущения, переносимого только продуктами сгорания. Решения линеаризованных гидродинамических уравнений, удовлетворяющих естественному требованию ограниченности при  $|x| \rightarrow \infty$  для малых возмущений, обозначенных штрихами, можно записать по [1]

$$\begin{aligned} v'_{sx} &= A_s \psi_s + A_3 \psi_3 (s-1), \quad \psi_0 = \exp(ik y = i \omega t); \\ v'_{sy} &= (-1)^{s-1} i A_s \psi_s - i \frac{z}{\alpha} A_3 \psi_3 (s-1), \quad \psi_s = \psi_0 \exp[(-1)^{s-1} k x]; \\ \frac{p'_s}{\rho_s v_s} &= - \left[ 1 + (-1)^{s-1} \frac{z}{\alpha^{s-1}} \right] A_s \psi_s, \quad \psi_3 = \psi_0 \exp\left(\frac{i \omega}{v_2} x\right); \\ z &= - \frac{i \omega}{k v_1}; \quad \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} > 1 \end{aligned} \quad (3)$$

( $s=1,2$  — соответственно для исходной смеси и продуктов сгорания).

Для механического сопряжения возмущенных состояний по обе стороны от пламени можно пренебречь его внутренней структурой и принять классическую модель разрывного фронта, если заранее ввести предположение о малости ширины зоны горения  $L$  по сравнению с длиной волны  $\lambda$  возмущения пламени как целого. Такой подход, ограничивая исследование достаточно длинноволновыми возмущениями (например,  $\lambda/L > 10$ ), никак не уменьшает его ценности, поскольку эксперименты [5] дают в качестве критерия неустойчивости во много раз большее значение  $\lambda/L$ . Поэтому механические граничные условия (законы сохранения) для малых возмущений относительно пламени будут иметь следующий вид [3]: при  $x=0$

$$\begin{aligned} v'_{2x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \alpha \left( v'_{1x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), & \frac{p'_1}{\rho_1 v_1} + 2 v'_{1x} &= \frac{p'_2}{\rho_2 v_2} + 2 v'_{2x}, \\ v'_{1y} + v_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= v'_{2y} + v_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — малое смещение фронта пламени (зоны горения как целого), которое представляем в виде бегущей волны

$$\varepsilon(y, t) = A_4 \exp(ik y - i \omega t); \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (5)$$

Четвертое граничное условие для того, чтобы замкнуть систему (4), должно выражать, как говорилось выше, взаимодействие гидродинамических возмущений с процессами внутри зоны горения. С целью установления характера этого взаимодействия рассмотрим пламя в принятой модели тепловой волны, в которой происходит непрерывное изменение параметров. Для упрощения структуры зоны горения моделируем ее постоянным потоком с некоторыми средними значениями  $\rho_3, v_3, T_3$ , и из закона сохранения массы вытекает  $q = \frac{v_3}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{T_3}{T_1}$ . Осредняя температуру (4) по ширине зоны горения (2), получаем

$$q = 1 + \frac{\alpha - 1}{b} (1 - e^{-\alpha}), \quad 1 < q < \alpha.$$

Обычно принимают  $b=1$  [4], т. е.

$$q = \alpha - \frac{\alpha - 1}{e} > \frac{\alpha + 1}{2}. \quad (6)$$

Случай  $b \simeq 3/2$   $q = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$  аналогичен линейному профилю температур в пламени.

Под влиянием акустических возмущений  $v'_3, p'_3$ , посылаемых в зону пламени (прогрева) зоной химической реакции, изменяется внутренняя газодинамическая структура пламени. Поэтому можно считать, что указанное изменение структуры в конечном итоге приводит к изменению локальной скорости нормального горения. Следовательно, чтобы выяснить влияние гидродинамических возмущений на эту скорость, необходимо в отличие от механических граничных условий учесть процессы

внутри зоны пламени, ибо, как будет ясно из дальнейшего, существенным параметром в оценке влияния ее относительной толщины  $L/\lambda$  является уже гораздо бóльшая величина  $\xi = 2\pi \frac{L}{\lambda}$ . Исследуемое изменение скорости нормального горения есть приращение, которое получает локальная скорость перемещения пламени как единого целого (т. е. классического фронта) относительно возмущенного им газа в зависимости от газодинамической перестройки зоны горения. Поэтому линейризованную составляющую этого возмущения вдоль оси  $x$  можно записать в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - v'_{1x} \Big|_{x=0} \quad (7)$$

Приращение указанной величины происходит в результате накопления внутри зоны пламени местных приращений возмущения проекции относительной скорости газа на ось  $x$ . Следовательно, изменение нормальной скорости горения смеси в каждой точке фронта пламени можно представить как результат суммирования по толщине пламени элементарных приращений относительной скорости частицы газа вдоль ее траектории, проходящей через данную точку.

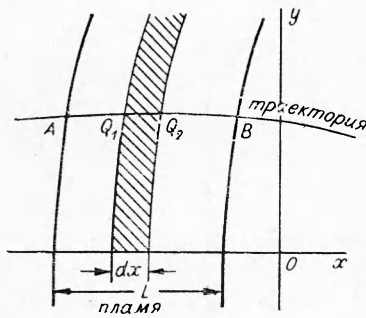


Рис. 2.

Выделим внутри возмущенной зоны пламени (рис. 2) элементарный слой нагретой смеси (заштрихован) толщиной  $dx$ . Тогда в некоторой точке  $Q_1$  составляющая скорости частицы газа по оси  $x$  относительно пламени как целого (фронта) запишется  $v_3 + v'_{3x} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ . При смещении частицы вдоль своей траектории на  $dx$  в точку  $Q_2$  эта составляющая получит с учетом (5)

приращение  $\frac{\partial v'_{3x}}{\partial x} dx$ . Интегрируя последнее по участку траектории  $AB$ , приходим к суммарному приращению относительной скорости внутри зоны горения, причем для линейного приближения интеграция производится по невозмущенной траектории  $x = v_3(t' - t)$ , т. е.

$$\int_{-L}^0 \frac{\partial v'_{3x}}{\partial x} dx = v_3 \int_{t-\tau}^t \frac{\partial v'_{3x}}{\partial x} \Big|_{x=v_3(t'-t)} dt'$$

где  $L = v_3\tau$ , а  $\tau$  — характерное время горения. Как было указано выше, найденное выражение представляет взятое с обратным знаком приращение составляющей относительной скорости горения (7), а значит,

$$v'_{1x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = v_3 \int_{t-\tau}^t \frac{\partial v'_{3x}}{\partial x} \Big|_{x=v_3(t'-t)} dt' \quad (8)$$

Возмущение скорости  $v'_{3x}$  внутри зоны пламени выражается через  $v'_{1x}$  для исходной смеси. В самом деле, вверх по течению от зоны химической

реакции в пламя распространяются акустические возмущения, которые в принятой для зоны горения модели постоянного потока  $(\rho_3, p_3, v_3)$  могут быть описаны решениями (3) аналогично  $v'_{1x}$ , т. е.  $v_{3x} = B \psi_1$ . На границе пламени  $x = -L$  акустическая волна  $v_{3x}$ , переходя в область с состоянием  $(p_1, \rho_1, v_1)$ , преломляется в волну  $v'_{1x}$ , и выполнение закона сохранения массы дает  $v_{3x} = q v'_{1x}$ . Граничное условие (8), отражающее взаимодействие возмущений с газодинамической структурой зоны горения, принимает окончательный вид

$$v'_{1x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = v_1 q^2 \int_{t-\tau}^t \frac{\partial v'_{1x}}{\partial x} \Big|_{x=v_1 q(t'-t)} dt' \quad (9)$$

Отсюда как предельный случай  $\tau = 0$  ( $L = 0$ ) вытекает условие Л. Д. Ландау [1]  $v'_{1x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ . В другом предельном случае  $\tau = \infty$  ( $L = \infty$ ), когда зона прогрева отождествляется со всей областью несгоревшего газа, среднее значение  $v_3 = v_1$ , и получаем

$$v'_{1x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = v_1 \int_{-\infty}^t \frac{\partial v'_{1x}}{\partial x} \Big|_{x=v_1(t'-t)} dt'$$

Последнее совпадает с результатом дифференцирования условия Р. М. Зайделя [2] для режима индукции:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^t v'_{1x} \Big|_{x=v_1(t'-t)} dt'$$

Удовлетворяя теперь условиям (4), (9) с помощью решений (3) и (4), приходим к характеристическому определению системы уравнений относительно  $A_1, A_2, A_3, A_4$  для нахождения собственного числа  $z$ :

$$(z - \alpha) \left[ \frac{\alpha + 1}{\alpha} z^2 + 2z + 1 - \alpha + \frac{q(\alpha - 1)}{\frac{z}{q} - 1} \varphi \left( \frac{z^2}{\alpha} + 2z + 1 \right) \right] = 0; \quad (10)$$

$$\varphi = 1 - \exp \left[ -\xi \left( \frac{z}{q} + 1 \right) \right], \quad \xi = 2\pi \frac{L}{\lambda}.$$

Корень  $z = \alpha$  не годится по физическим соображениям [3]. Исследуем формально математически поведение корней полученного уравнения в области  $0 \leq \xi \leq \infty$ . Поскольку оно допускает лишь регулярное в  $\xi = 0$  решение, то его можно искать для  $\xi \ll 1$  в виде разложения

$$z = z_0 + z_1 \xi, \quad z_0 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left( \pm \sqrt{\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}} - 1 \right), \quad (11)$$

$$z_1 = -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \alpha q \frac{z_0 + 1}{\frac{\alpha + 1}{q} z_0 + 1} < 0,$$

первый член которого естественно будет совпадать с решением Л. Д. Ландау [1], свидетельствующим о неустойчивости горения к чрезвычайно длинным волнам возмущений. Поправка  $z_1 < 0$  показывает, что уменьшение длины волны  $\lambda$  действует стабилизирующе. Другой предельный случай  $\xi \gg 1$  допускает две возможности. Когда  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{q} + 1\right) > 0$ , то  $\varphi = 1$  и (10) имеет вид

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0;$$

$$a_0 = \frac{\alpha + 1}{\alpha q}, \quad a_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \frac{2}{q} + q \frac{\alpha - 1}{\alpha},$$

$$a_2 = 2 + \left(2q - \frac{1}{q}\right)(\alpha - 1), \quad (12)$$

$$a_3 = (\alpha - 1)(q - 1).$$

Отправляясь от (6), не трудно установить выполнение условий теоремы Гурвица [6]

$$a_0, a_1, a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (13)$$

о корнях уравнения, из которой следует устойчивость всех корней (12) ( $\operatorname{Re} z < 0$ ). При этом можно убедиться, что хотя бы для одного корня выполняется исходное предположение  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{q} + 1\right) > 0$ . Производя замену  $u = \frac{z}{q} + 1$ , приведем для  $u$  к уравнению, аналогичному (12) с коэффициентами

$$b_0 = \frac{\alpha + 1}{\alpha} q^2, \quad b_1 = q \left\{ 2 + \frac{q^2}{\alpha} [q(\alpha - 1) - 2(\alpha + 1)] \right\},$$

$$b_2 = q^2 \left( 2\alpha + \frac{1}{\alpha} - 1 \right) - 2q - (\alpha - 1) \left( 1 + \frac{2q^2}{\alpha} \right),$$

$$b_3 = (\alpha - 1) q \left( 1 + \frac{q^2}{\alpha} - 2q \right) < (\alpha - 1) q (1 - q) < 0.$$

Отсюда следует невыполнение условий теоремы Гурвица (13). Когда  $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{q} + 1\right) < 0$ ,  $\varphi \rightarrow \infty$  и (10) превращается в  $\frac{z^2}{\alpha} + 2z + 1 = 0$  с устойчивым корнем  $z = -\alpha \left( 1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \right)$ , удовлетворяющим исходному предположению. Таким образом, при  $\xi \gg 1$  уравнение (10) имеет только устойчивые корни, а при  $\xi \ll 1$ , действительные корни обеспечивают неустойчивость. Выясним теперь, когда действительные корни могут переходить в комплексные. С этой целью ищем решение (10) в виде  $z = z_* + ci$ , где  $z_*$  — действительно, а  $c$  — мало. Тогда, линеаризуя (10) по  $c$ , имеем

$$z_*^2 \frac{\alpha + 1}{\alpha} + 2z_* + 1 - \alpha + \frac{(\alpha - 1)q}{z_* + 1} \varphi_* \left( \frac{z_*^2}{\alpha} + 2z_* + 1 \right) = 0,$$

$$\varphi z_* = 1 - \exp \left[ -\xi \left( \frac{z_*}{q} + 1 \right) \right]; \quad (14)$$

$$c \left\{ \left[ 3 \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{z_*^2}{q} + 2z_* \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} + \frac{2}{q} + \alpha - 1 \right) + 2 + (\alpha - 1) \left( 2q - \frac{1}{q} \right) \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ -\xi \left( \frac{z_*}{q} + 1 \right) \right] \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \xi z_*^2 + 2(\alpha - 1)(\xi - 1)z_* + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha - 1)(\xi - 2q) \right] \right\} = 0. \quad (15)$$

Причем, величина  $\xi$  должна обеспечивать для  $z_*$  по (14) действительные значения. Рассмотрим случай, когда  $\xi < 1$ . Исходя из (6), нетрудно установить, что для  $z_* \geq 0$  фигурная скобка в (15) определенно положительна, т. е.  $c = 0$ . Это означает, что действительные корни уравнения (10) могут перейти только в комплексные корни с отрицательной вещественной частью. Следовательно, неустойчивые корни  $z$  будут представляться исключительно действительными числами. Комплексные же корни, являясь всегда устойчивыми, не играют роли при нахождении критерия неустойчивости горения. Поэтому последний определяется просто условием  $z > 0$ , применение которого в (10) приводит к неравенству

$$2z \left\{ 1 + (\alpha - 1)q \left( 1 - e^{-\xi} - \frac{1}{2q^2} \right) \right\} + (\alpha - 1) \left[ q(1 - e^{-\xi}) - 1 \right] < 0.$$

Отсюда в силу  $q > \frac{1}{2}(\alpha - 1)$  и выражается в следующей окончательной форме критерий неустойчивости медленного горения:

$$\xi < \ln \frac{q}{q-1}, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{L} > \frac{2\pi}{\ln \frac{q}{q-1}}. \quad (16)$$

Последнее, например, для  $\alpha = 6$  дает величину  $\lambda/L > 25$ , хорошо согласующуюся со сделанной выше оговоркой относительно области применимости наших результатов ( $\lambda/L > 10$ ). Отсюда при  $10 < \lambda/L < 25$  должна обнаруживаться устойчивость горения. Конечно, следует ожидать, что учет диссипативных факторов расширит этот интервал. Стабилизирующее действие на горение должно оказывать по (11) и уменьшение интенсивности пламени  $\alpha$ , поскольку происходящее при этом увеличение ширины зоны пламени уменьшает относительную длину волны возмущения  $\lambda/L$ . Подобным же образом может влиять и состав смеси.

При нарушении устойчивости пламени наблюдаются, вероятно, максимально неустойчивые эффекты отвечающие максимуму  $(-i\omega)$ . Поэтому в качестве оценки величины ячеек, на которые распадается пламя при потере устойчивости, принимают [4] длину волны  $\lambda_*$ , определяемую из  $d(-i\omega)/dk = 0$ . Подстановка (11) дает  $\lambda_* = -4\pi L z_1 / z_0$ . В условиях опытов Маркштейна [4]  $v_1 = 0,1$  м/сек,  $\alpha = 5$ ,  $\chi_1 = 2 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек и  $\lambda_* = 2 \cdot 10^{-2}$  м хорошо согласуются с данными эксперимента.

Поступила в редакцию  
20/IV 1965

*ЛИТЕРАТУРА*

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц.* Механика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1953.
  2. *Р. М. Зайдель.* ПМТФ, 1962, 5.
  3. *С. К. Асланов.* ПМТФ, 1963, 4.
  4. *Д. Маркштейн.* Вопросы ракетной техники, 1951, 4.
  5. *Я. К. Трошин, К. И. Шелкин.* Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 9.
  6. *И. И. Бронштейн, К. А. Семендяев.* Справочник по высшей математике, ГИТТЛ, 1953.
-