

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ УПРУГИХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

А. Н. Андреев

Кемеровский государственный университет,
650043 Кемерово

В [1] разработан эффективный алгоритм численного решения линейных краевых задач устойчивости многослойных композитных оболочек вращения, объединяющий в себе метод Бубнова — Галеркина для систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода с обобщенной формой метода инвариантного погружения.

В настоящей работе этот алгоритм обобщен на класс задач о свободных колебаниях оболочек вращения и использован при численном определении собственных частот и форм колебаний слоистой композитной круговой конической усеченной жесткозашемленной оболочки. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета, найденных на основе классических и неклассических [2] дифференциальных уравнений динамики слоистых оболочек, что позволило выявить и оценить влияние поперечных сдвиговых деформаций на собственные частоты и формы колебаний. Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности алгоритма в задачах динамики оболочек.

1. Численное определение собственных частот и форм колебаний слоистых оболочек вращения. Рассмотрим задачу о свободных установившихся гармонических колебаниях тонкостенной упругой слоистой композитной оболочки вращения, структура армирования слоев которой не зависит от угловой координаты. Дифференциальные уравнения и краевые условия этой задачи получим (см. [3–7]) из соответствующих линеаризованных уравнений

$$(D + \Lambda \partial^2 / \partial t^2) U = F$$

и краевых условий

$$l_{\Gamma} U = P$$

динамики слоистых оболочек, принимая в них составляющие внешних поверхностных и контурных нагрузок равными нулю и выполняя преобразование (ω — частотный параметр)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2; \quad (1.1)$$

в результате возникает краевая задача на собственные значения

$$DU = \omega^2 \Lambda U, \quad l_{\Gamma} U = 0, \quad (1.2)$$

к интегрированию которой сводится определение спектра свободных колебаний тонкостенной слоистой системы. Здесь U — вектор характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки; D , Λ , l_{Γ} — линейные дифференциальные операторы с двумя независимыми переменными — угловой переменной φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) и меридиональной переменной x ($0 \leq x \leq 1$). Явный вид этих операторов приведен ниже для конкретного случая. Отделение в (1.2) угловой координаты φ , осуществляемое

(см. [3–7]) путем разложения решения в ряды Фурье по системе тригонометрических функций $1, \cos n\varphi, \sin n\varphi$ ($1 \leq n < \infty$), приводит к линейной краевой задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}'(x) = A_n(x) \mathbf{y}(x) + \omega^2 B_n(x) \mathbf{y}(x), \quad M\mathbf{y}(0) = 0, \quad N\mathbf{y}(1) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{y}(x)$ — $2s$ -мерный вектор кинематических и силовых характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки; $A_n(x), B_n(x)$ — непрерывные на отрезке $[0,1]$ $2s \times 2s$ матрицы, содержащие целочисленный параметр n окружного волнообразования; M, N — числовые $s \times 2s$ матрицы.

Вместе с (1.3) будем рассматривать краевую задачу

$$\mathbf{z}'(x) = A_n(x) \mathbf{z}(x) + \mathbf{f}(x), \quad M\mathbf{z}(0) = 0, \quad N\mathbf{z}(1) = 0 \quad (1.4)$$

для $2s$ -мерного вектора $\mathbf{z}(x)$. Пусть $G_n(x, p)$ — матрица Грина [8] этой краевой задачи. Известно [8], что для всякого непрерывного на отрезке $[0,1]$ вектора $\mathbf{f}(x)$ решение задачи (1.4) представимо в виде

$$\mathbf{z}(x) = \int_0^1 G_n(x, p) \mathbf{f}(p) dp, \quad (1.5)$$

а задача на собственные значения (1.3) равносильна задаче определения характеристических чисел и собственных векторов линейной однородной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\mathbf{y}(x) - \omega^2 \int_0^1 G_n(x, p) B_n(p) \mathbf{y}(p) dp = 0. \quad (1.6)$$

Решение задачи (1.6) будем строить в пространстве $L_2(0,1)$ квадратично-суммируемых $2s$ -мерных векторов методом Бубнова — Галеркина [9]. Согласно этому методу, выберем в пространстве $L_2(0,1)$ полную линейно независимую систему элементов $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{c_0}$. Векторы $\psi_k(x)$ можно выбрать непрерывными и ортонормированными. Приближенное решение $\mathbf{y}_L(x)$ системы интегральных уравнений (1.6) строим в виде

$$\mathbf{y}_L(x) = \sum_{k=1}^L c_k \psi_k(x). \quad (1.7)$$

Подставляя решение (1.7) в систему уравнений (1.6) и требуя ортогональности невязки к координатным векторам $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_L(x)$, приходим к алгебраической системе линейных однородных уравнений для определения коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_L :

$$c_i - \omega^2 \sum_{k=1}^L c_k \int_0^1 \left(\int_0^1 G_n(x, p) B_n(p) \psi_k(p) dp \right) \psi_i(x) dx = 0 \quad (1.8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, L).$$

Физический интерес представляют только нетривиальные решения системы (1.8). Определение таких решений — собственных векторов и соответствующих им собственных чисел матрицы коэффициентов этой системы — в общем случае требует обращения к численным методам. Вопросы численного решения алгебраической проблемы собственных значений к настоящему времени разработаны достаточно полно (см., например, [10]).

Если эта проблема решена и $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_L^{(n)}$ — собственные числа матрицы коэффициентов системы (1.8), то равенствами

$$\omega_1^{(n)} = \sqrt{1/\mu_1^{(n)}}, \omega_2^{(n)} = \sqrt{1/\mu_2^{(n)}}, \dots, \omega_L^{(n)} = \sqrt{1/\mu_L^{(n)}} \quad (1.9)$$

определяются приближенные значения низших собственных частот оболочки, соответствующие заданному значению параметра n . Достаточная точность представления этих величин в форме (1.9) обеспечивается сходимостью процесса Бубнова — Галеркина для интегральных уравнений Фредгольма второго рода (см. [9]) и должным выбором значения параметра L .

Объем вычислений можно существенно сократить, если принять во внимание то обстоятельство, что в задачах динамики оболочек многие столбцы матрицы $B_n(x)$ нулевые. Пусть K — множество номеров нулевых столбцов, а J — множество номеров ненулевых столбцов этой матрицы, так что $K \cup J = \{1, 2, \dots, 2s\}$, $K \cap J = \emptyset$. Из (1.8) видно, что при построении базисной системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ достаточно требовать ее полноты в классе $L_J \subset L_2(0, 1)$ $2s$ -мерных вектор-функций, K -координаты которых равны нулю. Такая базисная система достаточна для аппроксимации J -координат собственных векторов задачи (1.6) и корректного определения собственных частот. Если необходимо вычислить также и K -координаты собственных векторов, то систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует расширить до полной во всем пространстве $L_2(0, 1)$ и воспользоваться уравнениями (1.7), (1.8) при $\omega = \omega_1^{(n)}, \omega = \omega_2^{(n)}, \dots, \omega = \omega_L^{(n)}$.

Для вычисления матрицы коэффициентов линейной алгебраической системы (1.8) заметим, что на основании (1.4), (1.5) внутренние интегралы в (1.8) ($2s$ -мерные векторы $\mathbf{z}_1(x), \mathbf{z}_2(x), \dots, \mathbf{z}_L(x)$) являются решениями следующих краевых задач ($k = 1, 2, \dots, L$):

$$\mathbf{z}'_k(x) = A_n(x) \mathbf{z}_k(x) + B_n(x) \psi_k(x), \quad M \mathbf{z}_k(0) = 0, \quad N \mathbf{z}_k(1) = 0. \quad (1.10)$$

Объединим $2s$ -мерные векторы-столбцы $\mathbf{z}_1(x), \mathbf{z}_2(x), \dots, \mathbf{z}_L(x)$ и $B_n(x) \psi_1(x), B_n(x) \psi_2(x), \dots, B_n(x) \psi_L(x)$ в $2s \times L$ матрицы $Z(x)$ и $F_n(x)$:

$$Z(x) = \|\mathbf{z}_1(x), \mathbf{z}_2(x), \dots, \mathbf{z}_L(x)\|, \quad F_n(x) = B_n(x) \|\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_L(x)\|.$$

Теперь семейство краевых задач (1.10) можно сформулировать как краевую задачу

$$Z'(x) = A_n(x)Z(x) + F_n(x), \quad MZ(0) = O_{s \times L}, \quad NZ(1) = O_{s \times L} \quad (1.11)$$

для определения $2s \times L$ матрицы $Z(x)$. Если эта задача решена и матрица $Z(x)$ найдена, то по какой-либо квадратурной формуле численного интегрирования вычисляются внешние интегралы в системе (1.8), чем и завершается определение матрицы коэффициентов этой системы.

Укажем на две существенные особенности, которые необходимо принимать во внимание при выборе метода численного интегрирования краевой задачи (1.11) — матричную структуру ее решения и сильную неустойчивость, проявляемую неклассическими дифференциальными уравнениями теории слоистых оболочек (см. [11]). Эффективный метод численного интегрирования таких краевых задач — метод инвариантного погружения в его обобщенной форме (см. [1, 12]). Накопленный вычислительный опыт (см. [11–14]) позволяет рекомендовать эту модификацию метода погружения к широкому использованию в задачах прочности, устойчивости, динамики оболочек.

2. Дифференциальные уравнения свободных колебаний многослойной ортотропной конической оболочки. Рассмотрим ортотропную круговую коническую усеченную оболочку толщины h , собран-

ную из m композитных слоев волокнистой структуры. Пусть 2α — угол раствора конуса, $s = x^1$ — расстояние, отсчитываемое вдоль образующей конуса от его вершины ($0 < a \leq s \leq b$), $\varphi = x^2$ — угловая координата ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Параметры Ламе A_1, A_2 и радиусы кривизн R_1, R_2 координатных линий введенной ортогональной системы координат таковы:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = s \sin \alpha, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = s \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.1)$$

Ограничимся рассмотрением того случая, когда направления осей ортотропии совпадают с направлениями координатных осей, а структурные параметры армирования всех слоев оболочки не зависят от угловой координаты φ , но могут зависеть от меридиональной координаты s , что имеет место, например, при армировании конической оболочки вдоль образующей волокнами постоянного сечения. Считая оболочку достаточно тонкой, пренебрегаем во всех уравнениях величинами порядка h/R_2 по сравнению с единицей.

В основу анализа свободных колебаний оболочки положим неклассические уравнения [2], позволяющие учесть поперечные сдвиговые деформации. Переходя в тензорных уравнениях [2] от компонент тензоров к их физическим составляющим, а от ковариантных производных — к частным, выполняя преобразование (1.1) и принимая во внимание равенства (2.1), имеем замкнутую систему линейаризованных дифференциальных уравнений задачи о свободных колебаниях конической оболочки. Эта система включает в себя следующие группы зависимостей:

соотношения упругости (скобки у индексов физических составляющих опущены, $k = 1, 2, \dots, m$ — порядковый номер слоя)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)}, & \tau_{12}^{(k)} &= a_{33}^{(k)} \gamma_{12}^{(k)}, \\ \sigma_{22}^{(k)} &= a_{12}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)}, & \tau_{13}^{(k)} &= c_{11}^{(k)} \gamma_{13}^{(k)}, & \tau_{23}^{(k)} &= c_{22}^{(k)} \gamma_{23}^{(k)}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

закон распределения физических составляющих вектора перемещений по толщине пакета слоев

$$\begin{aligned} v_1^{(k)} &= u_1 - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_1, \\ v_2^{(k)} &= u_2 - \frac{z}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_{22}^{(k)} \pi_2, & v_3^{(k)} &= w, \\ \mu_{ii}^{(k)}(s, z) &= \frac{f(z) - f(h_{i-1})}{c_{ii}^{(k)}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{f(h_j) - f(h_{j-1})}{c_{ii}^{(j)}} \quad (i = 1, 2); \end{aligned} \quad (2.3)$$

соотношения деформации-перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= \frac{\partial u_1}{\partial s} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_1}{\partial s} + \frac{\partial \mu_{11}^{(k)}}{\partial s} \pi_1, \\ \varepsilon_{22}^{(k)} &= \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{z}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_2}{\partial \varphi} + \sin \alpha \left(u_1 - z \frac{\partial w}{\partial s} + \mu_{11}^{(k)} \pi_1 \right) \right] + \frac{w}{R_2}, \\ \gamma_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + \mu_{11}^{(k)} \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} - \sin \alpha \left(u_2 - \frac{z}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_{22}^{(k)} \pi_2 \right) \right] + \frac{\partial u_2}{\partial s} - z \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \mu_{22}^{(k)} \frac{\partial \pi_2}{\partial s} + \frac{\partial \mu_{22}^{(k)}}{\partial s} \pi_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{13}^{(k)} = \frac{f'(z)}{c_{11}^{(k)}} \pi_1, \quad \gamma_{23}^{(k)} = \frac{f'(z)}{c_{22}^{(k)}} \pi_2;$$

зависимости между обобщенными внутренними усилиями и моментами в поверхности оболочки и внутренними напряжениями в ее слоях

$$\|T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}\| = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \|1, z, \mu_{\beta\beta}^{(k)}\| dz, \quad (2.5)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\sigma_{1i}^{(k)} \frac{\partial \mu_{ii}^{(k)}}{\partial s} + \sigma_{2j}^{(k)} \frac{\sin \alpha}{A_2} (\mu_{11}^{(k)} - \mu_{22}^{(k)}) + \tau_{i3}^{(k)} \frac{f'(z)}{c_{ii}^{(k)}} \right] dz$$

$$(\alpha, \beta, i, j = 1, 2, \quad i \neq j);$$

представления интегральных характеристик даламберовых массовых сил

$$\|X_\beta, Y_\beta, Z_\beta, I\| = \sum_{k=1}^m \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \|v_\beta^{(k)}, z v_\beta^{(k)}, \mu_{\beta\beta}^{(k)} v_\beta^{(k)}, w\| dz \quad (2.6)$$

(ρ_k — плотность материала k -го слоя оболочки);

дифференциальные уравнения установившихся свободных колебаний, записанные в усилиях и моментах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{11}) - \sin \alpha \cdot T_{22} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \varphi} + \omega^2 A_2 X_1 &= 0, \\ \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + \sin \alpha \cdot T_{21} + \frac{\partial}{\partial s} (A_2 T_{12}) + \omega^2 A_2 X_2 &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} (A_2 M_{11}) - \sin \alpha \cdot \frac{\partial M_{22}}{\partial s} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \varphi^2} - \frac{A_2}{R_2} T_{22} + \\ + 2 \frac{\sin \alpha}{A_2} \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} + \omega^2 \left(A_2 I + \frac{\partial}{\partial s} (A_2 Y_1) + \frac{\partial Y_2}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} (A_2 S_{11}) - \sin \alpha \cdot S_{22} + \frac{\partial S_{21}}{\partial \varphi} - A_2 Q_1 + \omega^2 A_2 Z_1 &= 0, \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial \varphi} + \sin \alpha \cdot S_{21} + \frac{\partial}{\partial s} (A_2 S_{12}) - A_2 Q_2 + \omega^2 A_2 Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Функцию $f(z)$, определяющую закон распределения поперечных сдвиговых напряжений по толщине оболочки, примем в виде

$$f(z) = z^3 - 1,5 h z^2, \quad (2.8)$$

соответствующем квадратичной зависимости этих величин от нормальной координаты z (см. [2]).

Соотношения (2.1)–(2.8) — полная система неклассических дифференциальных уравнений задачи о собственных колебаниях конической оболочки. Порядок этой системы равен 12, что в корректно поставленной краевой задаче требует задания на границе области 6 краевых условий. Полная совокупность вариантов таких условий, отвечающих различным

способам закрепления и нагружения краев, приведена в [2]. В рассмотренном ниже случае замкнутой в окружном направлении оболочки с жестко-зашемленными краями $s = a$, $s = b$ эти условия требуют обращения в нуль обобщенных перемещений в точках граничного контура (см. [2]):

$$\text{при } s = a, b \quad w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_1 = u_2 = \pi_1 = \pi_2 = 0, \quad (2.9)$$

а также 2π -периодичности решения по угловой координате φ .

Уравнения (2.1)–(2.8) позволяют учесть ортотропию деформативных свойств, конечную сдвиговую жесткость всех или части слоев оболочки, переменность коэффициентов упругости и потому пригодны для анализа собственных колебаний широкого класса тонкостенных слоистых композитных конических оболочек. К достоинствам этих уравнений следует отнести и независимость их порядка и структуры от числа слоев оболочки и строения пакета слоев в целом, что упрощает постановку и исследование задачи о свободных колебаниях многослойной оболочки как линейной краевой задачи на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Укажем еще на предельный переход (см. [2])

$$c_{ii}^{(k)} \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

($k = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2$) от уравнений (2.1)–(2.8) к классическим уравнениям установившихся свободных колебаний конической оболочки. Этот предельный переход ниже используется для оценки влияния поперечных сдвиговых деформаций на собственные частоты.

Равенствами

$$x = s/b,$$

$$w = hy_1, \quad y_2 = y_1', \quad u_1 = by_3, \quad u_2 = by_4, \quad \pi_1 = E_1^c b y_5/h^3, \quad \pi_2 = E_1^c b y_6/h^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (A_2 M_{11}) - \sin \alpha \cdot M_{22} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + \omega^2 A_2 Y_1 = h^2 E_1^c y_7, \quad (2.11)$$

$$A_2 M_{11} = h^2 b E_1^c y_8, \quad A_2 T_{11} = hb E_1^c y_9, \quad A_2 T_{21} = hb E_1^c y_{10},$$

$$A_2 S_{11} = h^4 b y_{11}, \quad A_2 S_{12} = h^4 b y_{12},$$

в которых E_1^c — модуль Юнга связующего первого (внутреннего) слоя оболочки, введем безразмерную независимую переменную x и вектор $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{12}]^T$ безразмерных кинематических и силовых характеристик ее напряженно-деформированного состояния. В переменных (2.11) уравнения установившихся свободных колебаний (2.1)–(2.8) и краевые условия жесткого зашемления (2.9) можно представить в матричной форме

$$\mathcal{A}(x, D_\varphi) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \mathcal{B}(x, D_\varphi) \mathbf{y} + \omega^2 \mathcal{C}(x, D_\varphi) \mathbf{y}; \quad (2.12)$$

$$\|E_6, O_6\| \mathbf{y}(a/b, \varphi) = 0, \quad \|E_6, O_6\| \mathbf{y}(1, \varphi) = 0. \quad (2.13)$$

В (2.12) \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} — 12×12 матрицы, элементы которых — полиномы от дифференциального оператора D_φ ($D_\varphi = \partial/\partial\varphi$) с коэффициентами, зависящими от переменной x . Выражения для элементов матриц \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} здесь не приводятся ввиду из громоздкости. Укажем лишь нулевые и ненулевые столбцы матрицы \mathcal{C} , объединяя (см. п.1) номера первых в множество K , а номера вторых — в множество J :

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad K = \{1, 2, \dots, 12\} \setminus J. \quad (2.14)$$

Отметим, что вычеркиванием из 12×12 матриц A, B, C 5-, 6-, 11-, 12-й строк и таких же столбцов получаются соответствующие 8×8 матрицы коэффициентов классической системы дифференциальных уравнений свободных колебаний конической оболочки. Это сразу следует из предельного перехода (2.9), если принять во внимание, что при $c_{ii}^{(k)} \rightarrow \infty$ указанные строки и столбцы матриц A, B, C обращаются в нуль.

Решение задачи (2.12), (2.13) строим в виде ряда Фурье

$$y = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) \cos n\varphi + v_n(x) \sin n\varphi) \quad (2.15)$$

по системе тригонометрических функций с векторными коэффициентами $u_n(x), v_n(x)$. Ясно, что решение в форме (2.15) удовлетворяет условию 2π -периодичности по угловой координате φ , а при подчинении вектор-функций $u_n(x), v_n(x)$ — требованию

$$\|E_6, O_6\| u_n = \|E_6, O_6\| v_n = 0 \quad \text{при } x = a/b, 1 \quad (2.16)$$

и краевым условиям жесткого заземления (2.13). Подставляя это решение в (2.12), приравнявая к нулю общий член получающегося при этом ряда Фурье и принимая во внимание граничные условия (2.16), приходим к двум, не связанным между собой линейным краевым задачам вида (1.3) для коэффициентов разложения (2.15). Можно показать, что собственные значения этих краевых задач совпадают, а соответствующие им собственные векторы получаются один из другого при линейном ортогональном преобразовании вращения. Поэтому достаточно рассмотреть лишь одну из этих задач.

Итак, исследование свободных колебаний конической оболочки сведено к интегрированию линейной краевой задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение этой задачи получено по методу, разработанному в п. 1 при использовании ортонормированной координатной системы

$$\psi_{kj}(x) = \sqrt{\frac{2k-1}{1-a/b}} P_{k-1} \left(2 \frac{x-a/b}{1-a/b} - 1 \right) e_j, \quad (2.17)$$

$$k = 1, 2, \dots, L, \quad j \in J,$$

где $P_k(t)$ — ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ полиномы Лежандра; e_j — векторы стандартного ортонормированного базиса в \mathbf{R}^{12} . Из (2.14) видно, что координатная система (2.17) состоит из $6L$ векторов, что требует решения краевой задачи (1.11) для $12 \times 6L$ матрицы $Z(x)$ и решения алгебраической проблемы собственных значений для $6L \times 6L$ матрицы коэффициентов системы (1.8). Краевая задача (1.11) решена методом инвариантного погружения [1], а при численном решении проблемы собственных значений использован QR -алгоритм в сочетании с предварительным приведением матрицы к форме Хессенберга (см. [10]). Значение параметра L , достаточное для обеспечения высокой точности результата, определялось путем численного исследования скорости сходимости метода. Соответствующие числовые данные приведены ниже.

Расчеты выполнены на МВК Эльбрус-2.

3. Численные результаты. В табл. 1 представлены данные, позволяющие судить о скорости сходимости метода относительно параметра L , и соответствующие значения шести низших собственных частот $\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \dots, \omega_6^{(0)}$ осесимметричных форм колебаний, найденные на основе неклассических уравнений (2.1)–(2.8). Результаты получены для двухслойной ком-

позитной оболочки, внутренний слой которой армирован волокнами постоянного сечения в окружном направлении, внешний — в меридиональном, при геометрических

$$b = 1 \text{ м}, \alpha = \pi/10, a/b = 0,3, h/b = 0,01, h_1 - h_0 = h_2 - h_1 = 0,5h; \quad (3.1)$$

механических

$$E_1^c = E_2^c = 3000 \text{ МПа}, E_1^a = E_2^a = 250 \text{ ГПа}, \nu_1^c = \nu_2^c = \nu_1^a = \nu_2^a = 0,3, \quad (3.2)$$

$$\rho_1^c = \rho_2^c = 1250 \text{ кг/м}^3, \rho_1^a = \rho_2^a = 1710 \text{ кг/м}^3$$

и структурных

$$\omega_{z1} = \omega_{z2} = 0,5, \omega_1 = 0,5, \omega_2|_{x=a/b} = 0,9 \quad (3.3)$$

параметрах композитной слоистой оболочки. Здесь $h_k - h_{k-1}$, ω_k , ω_{zk} ($k = 1, 2$) — соответственно толщина k -го слоя, интенсивность армирования в его поверхности и по толщине (см. [15]); $E_k^{c(a)}$, $\nu_k^{c(a)}$, $\rho_k^{c(a)}$ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, плотность материала связующего (индекс c) и армирующих волокон (индекс a) k -го слоя. Значения механических параметров (3.2) отвечают (см. [16]) эпоксидному связующему и борным армирующим волокнам. Эффективные жесткости и податливости слоев определялись на основе уравнений модели армированного слоя, разработанной в [15].

Т а б л и ц а 1

L	$\omega_1^{(0)}$	$\omega_2^{(0)}$	$\omega_3^{(0)}$	$\omega_4^{(0)}$	$\omega_5^{(0)}$	$\omega_6^{(0)}$
	кГц					
6	1,202	2,327	2,781	3,510	3,708	4,392
8	1,202	2,327	2,781	3,465	3,693	4,114
10	1,202	2,327	2,781	3,465	3,669	4,055
12	1,202	2,327	2,781	3,465	3,668	4,034

Из табл. 1 видно, что в рассматриваемом процессе приближения к точным значениям собственных частот осуществляются сверху. Стабилизация процесса вычислений трех низших собственных частот достигается уже при $L = 6$, 4-й собственной

частоты — при $L = 8$, 5-й — при $L = 10$, 6-й — при $L = 12$. Аналогичные закономерности, как выявлено численным исследованием, справедливы и для неосесимметричных форм колебаний. Отметим, что в рассмотренном примере осесимметричные формы свободных колебаний, соответствующие собственным частотам $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$, $\omega_4^{(0)}$, являются крутильными, а формы, отвечающие частотам $\omega_3^{(0)}$, $\omega_5^{(0)}$, $\omega_6^{(0)}$, — преимущественно изгибными.

На рис. 1 окружными смещениями отсчетной поверхности представлены крутильные формы колебаний, соответствующие частотам $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$,

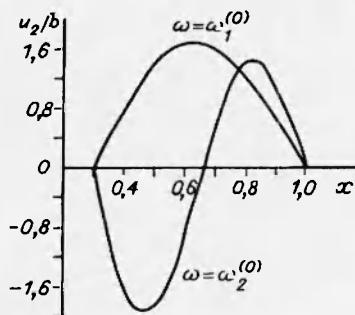


Рис. 1

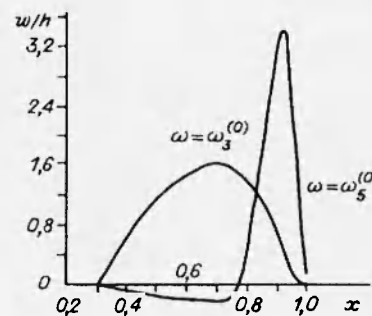


Рис. 2

а на рис. 2 прогибами показаны преимущественно изгибные формы, отвечающие частотам $\omega_3^{(0)}$, $\omega_5^{(0)}$.

В табл. 2 в зависимости от параметра окружного волнообразования n приведены результаты расчета трех низших собственных частот, найденных как на основе неклассических уравнений (2.1)–(2.8), так и на основе классических уравнений (2.1)–(2.8), (2.10), установившихся свободных колебаний конической оболочки. Результаты получены при значениях параметров в (3.1)–(3.3).

Из табл. 2 видно, что неучет поперечных сдвиговых деформаций приводит к завышению расчетных значений собственных частот, притом тем большому, чем больше порядковый номер определяемой частоты и чем больше номер n рассматриваемой окружной гармоники. Так, если относительная погрешность, вносимая в определение собственной частоты $\omega_1^{(0)}$ неучетом поперечных сдвигов, практически отсутствует, то при определении собственной частоты $\omega_1^{(10)}$ эта погрешность составляет уже 4,63%. При определении собственных частот $\omega_3^{(0)}$ и $\omega_3^{(10)}$ относительная погрешность от неучета поперечных сдвиговых деформаций составляет соответственно 0,04 и 8,70%. Из табл. 2 видно также, что зависимости низших собственных частот конической оболочки от номера окружной гармоники n характеризуются наличием точек минимума. Аналогичный результат установлен в работе [7], в которой соответствующий анализ выполнен для композитной цилиндрической оболочки.

Т а б л и ц а 2

n	Классическая теория			Неклассическая теория		
	$\omega_1^{(n)}$	$\omega_2^{(n)}$	$\omega_3^{(n)}$	$\omega_1^{(n)}$	$\omega_2^{(n)}$	$\omega_3^{(n)}$
	кГц					
0	1,202	2,328	2,782	1,202	2,327	2,781
2	0,515	0,954	1,486	0,513	0,949	1,475
4	0,634	0,954	1,318	0,628	0,941	1,294
6	1,079	1,471	2,128	1,057	1,431	2,047
8	1,717	2,293	3,481	1,661	2,196	3,270
10	2,525	3,386	5,174	2,408	3,186	4,724

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А. Н. О численном решении линейных краевых задач устойчивости слоистых оболочек вращения // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 8. С. 60–66.
2. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 87–96.
3. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979.
4. Кармишин А. В., Мяченков В. И., Репин А. А., Фролов А. Н. Единый метод решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 141–146.
5. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин и др. М.: Машиностроение, 1975.
6. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
7. Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987.
8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

10. **Matrix Eigensystem Routines — EISPACK Guide Extension** / B. S. Garbow et al. Berlin et al.: Springer-Verl., 1977. (Lect. Notes Comput. Sci. V. 51).
11. **Андреев А. Н.** К оценке прочности упругой слоистой композитной оболочки вращения в геометрически нелинейной постановке // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 7. С. 43–49.
12. **Андреев А. Н.** О численном интегрировании уравнений осесимметричного изгиба слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 73. С. 137–148.
13. **Андреев А. Н.** О численном решении краевых задач статики слоистых композитных оболочек вращения // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюз. конф. Красноярск, 23–27 февр. 1987 г. Новосибирск, 1988. С. 3–8.
14. **Андреев А. Н., Немировский Ю. В.** Численный анализ напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек вращения методом инвариантного погружения // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т. 42, № 1. С. 9–19.
15. **Немировский Ю. В.** К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. 1972. № 5. С. 861–873.
16. **Композиционные материалы: Справочник** / Под общ. ред. В. В. Васильева и Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990.

*Поступила в редакцию 21/VI 1993 г.,
в окончательном варианте — 31/X 1994 г.*
