

ОБ УСКОРЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Ю. С. Сигов

(Москва)

На примере плоской модели равновесного пограничного слоя между разреженной плазмой и магнитным полем в релятивистски-инвариантной форме рассмотрен эффект перераспределения энергии между ионной и электронной компонентами при движении плазмы в неоднородном магнитном поле. Найдены релятивистские и поляризационные поправки к классической теории. Приведены результаты численного решения задачи.

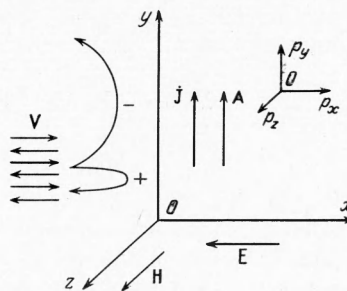
Одним из интересных моментов в задаче об отражении плазмы от «магнитной стенки» является вопрос о перераспределении энергии между тяжелой и легкой компонентами.

Еще Чепмен и Ферраро [2], рассматривавшие, в связи с проблемой взаимодействия солнечного корпускулярного потока с геомагнитным полем, задачу о нормальном падении на однородное магнитное поле нерелятивистского моноэнергетического потока плазмы, показали, что электроны и ионы при наличии между ними жесткой электростатической связи (т. е. в предположении о нейтральности плазмы в каждой точке) в точке поворота обмениваются энергиями

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_- v_{(-)}^2 &= \frac{1}{2} m_+ U^2 = \frac{1}{2} m_- U^2 + m_+ U^2 (1 - \mu), & \frac{1}{2} m_+ v_{(+)}^2 &= \\ &= \frac{1}{2} m_- U^2 = \frac{1}{2} m_+ U^2 \mu & & (1) \\ (u_{0+} = u_{0-} = U, v_0 = w_0 = 0, \mu = m_- / m_+) \end{aligned}$$

Здесь m — масса и $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — скорость частицы, индексы плюс и минус относятся соответственно к ионной и электронной компонентам, индекс 0 обозначает скорость на $-\infty$ по отношению к «магнитной стенке», а заключение индекса в скобки указывает, что соответствующая величина относится к точке поворота частицы, где $u_{(\pm)} = 0$.

Пространственная схема пограничного слоя и направление основных векторных величин приведены на фиг. 1. Падающий на магнитное поле \mathbf{H}_0 поток плазмы, отвечающий некоторой функции распределения частиц, заданной при $x \rightarrow -\infty$, где $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = 0$, целиком отражается от «магнитной стенки». Возникающий при этом ток \mathbf{j} в плоскости границы обеспечивает полную экранировку плазмы от магнитного поля, давление которого уравнивается динамическим давлением плазмы. Поскольку массивные ионы, обладая большим, чем у электронов, начальным импульсом, имеют тенденцию глубже проникать в магнитное поле, в общем случае возникает разделение зарядов, приводящее к появлению электростатического поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Несколько необычный вид примерных траекторий ионов и электронов в переходном магнитном поле (фиг. 1) объясняется



Фиг. 1

электростатическими силами, связывающими разноименно заряженные частицы, при этом ускорение электронов в поле \mathbf{E} сопровождается одновременным торможением ионов. Вся картина полностью самосогласована: движение частиц происходит в электромагнитном поле, которое в свою очередь целиком определяется состоянием плазмы.

В 1958 г. В. И. Векслер [3] обратил внимание на всеобщий характер эффекта, подчеркнув, что перекачка энергии от тяжелой компоненты к легкой, сопровождающаяся релятивизацией последней, может иметь место при любом перемещении нейтральной плазмы в неоднородном магнитном поле, если электроны и ионы обладали каким-то начальным поперечным разбросом скоростей. Позднее «поперечный» нагрев электронной компоненты рассматривался в работе [4], где задача о движении замагниченной плазмы в неоднородном магнитном поле р-шала в дрейфовом приближении, и в работе [5], в которой эффект Векслера рассматривался в одночастичном приближении на примере плоской модели Чепмена — Ферраро и ставился вопрос о поляризационных поправках к формуле (1).

Настоящее сообщение существенным образом опирается на результаты работы [1], в которой получена пространственная структура пограничного слоя путем численного решения полной системы уравнений Власова, описывающих самосогласованное электромагнитное поле в слое Чепмена — Ферраро

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi e \left\{ \int f_-(x, \mathbf{p}^\circ) dp_x^\circ dp_y^\circ - \int f_+(x, \mathbf{p}^\circ) dp_x^\circ dp_y^\circ \right\} \quad (2)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \langle j \rangle = 4\pi ce \left\{ \frac{p_y^\circ + eA/c}{E_-^\circ} f_-(x, \mathbf{p}^\circ) dp_x^\circ dp_y^\circ - \int \frac{p_y^\circ - eA/c}{E_+^\circ} f_+(x, \mathbf{p}^\circ) dp_x^\circ dp_y^\circ \right\} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \Phi(-\infty) = A(-\infty) = 0, \quad E(\infty) = \Phi'(\infty) = 0 \\ H(\infty) = A'(\infty) = H_0 = (8\pi \langle p_{xx} \rangle)^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon_{\pm} = \pm e$, u_k — четырехскорость частицы, p_x и p_y — x - и y -компоненты четырехимпульса $p_k = m c u_k = p_k^\circ - \varepsilon A_k/c$. Напомним, что функции распределения частиц в невозмущенной плазме при $x \rightarrow -\infty$ были выбраны в виде

$$\begin{aligned} f_{\pm}(p_{x0}, p_{y0}) = \frac{n_0}{2|P_{1\pm}|} \delta\left(\frac{p_{y0}}{m_{\pm}c}\right), \quad \frac{p_{x0}^2}{m_{\pm}^2c^2} \leq P_{1\pm}^2 \\ f_{\pm}(p_x, p_y) = 0, \quad \frac{p_{x0}^2}{m_{\pm}^2c^2} > P_{1\pm}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы уравнений характеристик кинетического уравнения в релятивистски-инвариантной форме [6] дает для каждой из компонент плазмы полный набор первых интегралов

$$\begin{aligned} p_2^\circ = p_y^\circ = p_y + \varepsilon A/c = m c u_y + \varepsilon A/c = p_{y0} \\ p_3^\circ = p_z^\circ = m c u_z = p_{z0} \\ p_4^\circ = i c^{-1} (E^\circ + \varepsilon \Phi) = i c^{-1} (c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + (p_y^\circ - \varepsilon A/c)^2} + \varepsilon \Phi) = p_{40} \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (6) выражают условия сохранения энергетической и пространственных компонент обобщенного четырехимпульса частицы.

Картины пространственного распределения основных физических величин в пограничном слое при $\mu = m_-/m_+ = 1/1836$ для значений максимального безразмерного импульса $P_+ = 10^{-3}$ и $P_1 = 1$ даны соответственно на фиг. 2, 3 (ср. соответствующим

щие графики для $\mu = 1/4$ в [1]). В качестве единицы длины взята величина $\xi_{\pm} = x/\xi = (mc^2/4\pi n_0 e^2)^{1/2}$. Через E, H, ρ, j, v_{\pm} обозначены соответственно безразмерные величины напряженностей электростатического и магнитного полей, плотности зарядов и полного тока, средней скорости ионной (электронной) компоненты в направлении оси y . При этом размерные (в квадратных скобках) величины связаны с безразмерными соотношениями:

для фиг. 2

$$[E] = 10^{-3} m_{-} c^2 E / e \xi_{*}, \quad [H] = 3.5 \cdot 10^{-1} m_{-} c^2 H / e \xi_{*},$$

$$[\rho] = 5 \cdot 10^{-2} e n_0 \rho, \quad [j] = 2 \cdot 10^{-2} e c n_0 j, \quad [v_{-}] = 10^{-1} c v_{-}$$

для фиг. 3

$$[E] = 10 m_{-} c^2 E / e \xi_{*}, \quad [H] = 31 m_{-} c^2 H / e \xi_{*} \quad [\rho] = e n_0 \rho, \quad [j] = e c n_0 j, \quad [v_{\pm}] = c v_{\pm}$$

Энергетическая зависимость основных физических характеристик пограничного слоя показана на фиг. 4, 5.

Как и в работе [1], на фиг. 4 характерные размеры L_H, L_E, l, R, r и D (аналог дебаевского радиуса) определены формулами

$$H(-L_H) = 0.1 H_0, \quad E(-L_E) = 0.1 E_{\max}, \quad \rho(-l) = 0$$

$$D^2 = \mu^{-1} [(1 + P_{1+}^2)^{1/2} - 1] + (1 + P_{1-}^2)^{1/2} - 1$$

$$R = m_{+} c^2 P_1 / e H_0, \quad r = m_{-} c^2 P_1 / e H_0$$

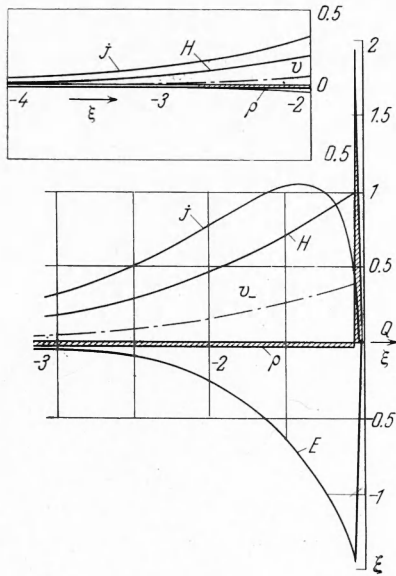
На фиг. 5 через

$$H_0 = \frac{e \xi_{*} [H_0]}{m_{-} c^2}, \quad E_{\max} = \frac{e \xi_{*} [E_{\max}]}{m_{-} c^2}, \quad \rho_{+}, \rho_{-}$$

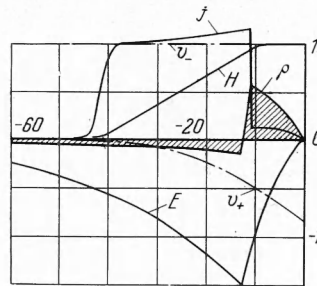
$$j_{-} = \frac{[j_{-}]}{e c n_0}, \quad i = i_{+} + i_{-}, \quad \psi_{\max} = \frac{e [\Phi_{\max}]}{m_{-} c^2}$$

обозначены максимальные значения соответствующих величин, ψ_{\max}° — безразмерное значение электростатического потенциала, полученное в предположении строгой нейтральности плазмы.

Проведенные для плазменной модели (5) численные расчеты позволяют сделать некоторые количественные заключения по поводу роли разделения зарядов в перераспределении энергии между компонентами. Релятивистски-инвариантная форма, в которой проводится решение задачи, дает возможность исследовать этот вопрос в широкой области кинетических энергий частиц в плазме.



Фиг. 2



Фиг. 3

Предварительно рассмотрим одно важное энергетическое соотношение. В соответствии с (6), каждая плазменная частица сохраняет свою полную энергию, т. е.

$$E_{\pm}^{\circ} + \varepsilon_{\pm} \Phi = E_{0\pm}^{\circ}$$

Здесь $E_{0\pm}^\circ$ — энергия при $x \rightarrow -\infty$; под E° понимается «кинетическая» энергия

$$E^\circ = c \sqrt{m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2}$$

которая включает в себя энергию покоя.

Напишем выражение для полной энергии всех частиц, траектории которых заполняют фазовое пространство xp . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{0\pm}^\circ \rangle dx &= \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{G_{\pm}} [(E^\circ_{\pm}) + \varepsilon_{\pm} \Phi] f_{\pm} dp = \\ &= \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \langle (E^\circ_{\pm}) \rangle dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \langle \rho(x) \rangle dx \end{aligned} \quad (7)$$

Область G_{\pm} в импульсном пространстве определяется условиями

$$p_{\pm}^2 \geq 0, \quad p_{0\pm}^2 \geq 0$$

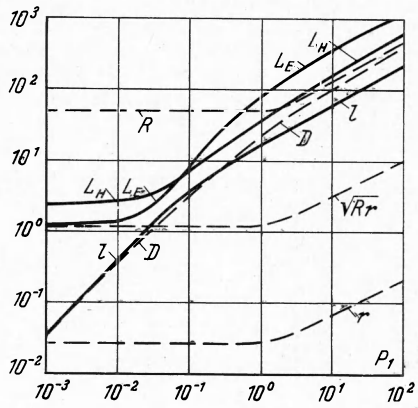
Используя (2), (4), преобразуем второй интеграл в выражении (7)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \langle \rho \rangle dx &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \frac{d^2 \Phi}{dx^2} dx = -\frac{1}{4\pi} \Phi \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^2}{4\pi} dx \end{aligned} \quad (8)$$

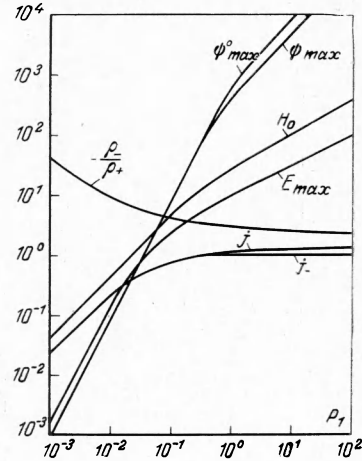
Объединяя (7) и (8), получаем, что

$$\sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{0\pm}^\circ \rangle dx = \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_{\pm}^\circ \rangle dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^2}{4\pi} dx \quad (9)$$

т. е. полная энергия всех частиц, «запасенная» при $x \rightarrow -\infty$, распадается на кинетическую энергию плазмы и энергию электростатического поля, возникшего при разделении зарядов.



Фиг. 4



Фиг. 5

Легко видеть, что, полагая $\rho \equiv 0$ («нейтральное приближение»), вместо точного соотношения (9) приходим к выражению

$$\sum_{\pm} \langle E_{0\pm}^\circ \rangle = \sum_{\pm} \langle E_{\pm}^\circ \rangle$$

которое отвечает формуле (1).

Естественно, что последняя может быть уточнена, если учесть эффект поляризации плазмы. Сделаем это для плазменной модели (5). Ради наглядности рассмотрим самый простой случай $P_{1+} = P_{1-} = P_1$, когда электроны и ионы имеют одинаковое распределение по скоростям. Этот случай соответствует модели Чемпена — Ферраро, если сопоставить моноэнергетический поток частицам с (следуя [1], будем называть их «пробными»)

$$p_{x^0} = mcP_1, \quad P_1 = \frac{U}{c} \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

В соответствии с (6), имеем

$$\begin{aligned} p_{y(-)} - eA_{(-)}/c = 0, \quad p_{y(+)} + eA_{(+)} / c = 0 \\ c \sqrt{m_-^2 c^2 + p_{y(-)}^2} - e\Phi_{(-)} = m_- c^2 \sqrt{1 + P_1^2} = E_{0-}^\circ \\ c \sqrt{m_+^2 c^2 + p_{y(+)}^2} + e\Phi_{(+)} = m_+ c^2 \sqrt{1 + P_1^2} = E_{0+}^\circ \end{aligned} \quad (10)$$

В нейтральном приближении

$$A_{(-)} = A_{(+)}, \quad \Phi_{(-)} = \Phi_{(+)} = \Phi_{\max}^\circ$$

и в качестве релятивистского аналога формулы (1) получаем

$$c \sqrt{m_-^2 c^2 + p_{y(-)}^2} = E_{0-}^\circ + e\Phi_{\max}^\circ \quad (11)$$

где

$$e\Phi_{\max}^\circ = m_- c^2 \psi_{\max}^\circ = m_- c^2 \left[\left(1 + \frac{F_1}{4\mu^2} \frac{4\mu + P_1(1 + \mu)^2}{1 + P_1^2}\right)^{1/2} - (1 + P_1^2)^{1/2} \right] \quad (12)$$

определяется из системы (10).

В реальных условиях электроны несколько отстают от ионов, отражаясь при некотором $\Phi = \Phi_{(-)} < \Phi_{\max}^\circ$, так что

$$c \sqrt{m_-^2 c^2 + p_{y(-)}^2} = E_{0-}^\circ + e\Phi_{(-)} \quad (13)$$

Сравнивая (11) и (13), видим, что при учете разделения зарядов пробный электрон, по сравнению с нейтральным приближением, «недополучает» от иона энергию $e(\Phi_{\max}^\circ - \Phi_{(-)})$, или, в относительном выражении,

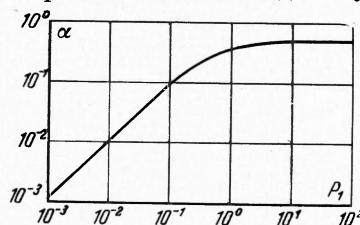
$$(\Phi_{\max}^\circ - \Phi_{(-)}) / \Phi_{\max}^\circ = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Значение потенциала $\Phi_{(-)}$, при котором происходит отражение пробных электронов, определялось по результатам численных расчетов на ЭВМ структур пограничного слоя для различных значений предельного импульса P_1 . График коэффициента $\alpha(P_1)$ для $\mu = 1/1836$ представлен на фиг. 6. В нерелятивистской области энергий $\alpha \sim P_1$, а в релятивистской — стремится к константе, приблизительно равной 0,54.

Окончательно вместо (1) для энергии пробного электрона в точке поворота получаем следующее выражение

$$E_{(-)}^\circ = c \sqrt{m_-^2 c^2 + p_{y(-)}^2} = E_{0-}^\circ + (1 - \alpha) e\Phi_{\max}^\circ \quad (14)$$

где Φ_{\max}° определяется формулой (12).



Фиг. 6

Выпишем формулу для $p_{y(-)}$ (P_1, μ, α) — импульса пробного электрона в точке отражения. Из (10), (12), (14) находим

$$p_{y(-)} = m_- c \left\{ \left[\alpha \sqrt{1 + P_1^2} + (1 - \alpha) \left(1 + \frac{P_1^2}{4\mu^2} \frac{4\mu + P_1^2(1 + \mu^2)^{1/2}}{1 + P_1^2} \right)^{1/2} \right]^2 - 1 \right\}^{1/2} \quad (15)$$

В нерелятивистском случае $P_1 \ll 1$, с точностью до членов порядка P_1 и пренебрегая малой константой μ по сравнению с единицей, получаем

$$p_{y(-)} \approx m_- c P_1 [\alpha + (1 - \alpha) / \mu]^{1/2}$$

В предельном случае $P_1 \gg 1$

$$p_{y(-)} \approx m_- c P_1 [\alpha + (1 - \alpha) / 2\mu]$$

Напомним, что $p_{y(-)}$ связано с $v_{(-)}$ формулой

$$p_{y(-)} = m_- v_{(-)} (1 - v_{(-)}^2 / c^2)^{-1/2}$$

На фиг. 2, 3 штрих-пунктирными линиями изображен пространственный ход величин

$$v_{\pm} = [v_{\pm}] / c = \langle j_{\pm} \rangle / \langle \rho_{\pm} \rangle c$$

— средней скорости ионной и электронной компонент в плоскости, параллельной пограничному слою. Представленные графики наглядно иллюстрируют соотношение $v_{(-)} / v_{(+)} \approx 1 / \mu$ в нерелятивистской области энергий и нарушение этого соотношения при больших P_1 , когда значительную роль играют поляризационные эффекты. В релятивистском случае (фиг. 3) на кривой $v_{(-)}$ хорошо видно характерное плато, соответствующее потоку электронов, имеющих в направлении оси y скорость, близкую к скорости света.

Поступила 21 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. С и г о в Ю. С. Структура пограничного слоя между разреженной плазмой и магнитным полем. ПМТФ, 1965, № 2.
2. Фергало V. C. A. Theory of a plane model. J. Geophys. Res., 1952, vol. 57, No. 1.
3. Векслер В. И. О новом механизме генерации релятивистских электронов в космическом пространстве. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 2.
4. С и г о в Ю. С. Об электростатических эффектах при движении разреженной плазмы в неоднородном магнитном поле. Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 6.
5. Шабанский В. П. Структура переходного слоя между плазмой и магнитным полем. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, № 5.
6. Беляев С. Т., Будкер Г. И. Релятивистское кинетическое уравнение. Докл. АН СССР, 1956, т. 7, № 6.