

тах при  $t_* = 15$  мин точка  $A$  уже заметно сдвигается к началу координат. При  $t_* = 0$ , очевидно, точка  $A$  совпадет с точкой  $B$ .

Распространяя предложенный прием на описание ползучести при наличии перерывов в нагружении ( $\sigma = 0$ ), получим, что при отсутствии деформаций восстановления после разгрузки перерывы могут лишь увеличить деформацию ползучести (если кривую ползучести строить только для времени, когда действует нагрузка) и тем значительнее, чем короче время действия нагрузки и дольше время перерывов. Уменьшение же деформаций ползучести можно получить при некоторых видах циклов, если учесть деформации восстановления. Справедливость полученных выводов необходимо проверить специально поставленными экспериментами.

Поступила 3 III 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
2. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести. ПМТФ, 1961, № 3.
3. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О наследственных теориях ползучести. ПМТФ, 1961, № 4.
4. Наместников В. С. О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках. ПМТФ, 1964, № 2.
5. Вилесова Н. С., Наместников В. С. Об одном параметре упрочнения. ПМТФ, 1964, № 3.
6. Ратнер С. И., Понарьина Т. К. Ползучесть и длительная прочность при программном нагружении алюминиевых и титановых сплавов. Сб. «Статическая прочность и выносливость конструкционных сплавов при повышенных температурах», Оборонгиз, 1961.
7. Вилесова Н. С., Хвостунков А. А. Ползучесть листового дуралюмина Д16. Сб. «Ползучесть и длительная прочность», Изд. СО АН СССР, 1963.
8. Мошкин Н. А., Кузнецов А. П. Ползучесть листового дуралюмина Д16АТ при постоянных и циклических нагрузках. Сб. «Ползучесть и длительная прочность», Изд. СО АН СССР, 1963.

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧИВАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОТОКА, ОБРАЗОВАННЫХ НЕСВЯЗНЫМИ ГРУНТАМИ, И КРИТЕРИЙ ГРЯДООБРАЗОВАНИЯ

*Н. Б. Гереселидзе (Тбилиси)*

В работе рассматриваются вопросы устойчивости ложа речных русел и каналов, имеющие важное значение при решении многих задач гидравлики. В отличие от формул неразмывающих скоростей, посредством которых в настоящее время главным образом производится оценка устойчивости ложа русла против размыва и которые выведены из схемы силового воздействия потока в статических условиях при идеализированной форме обтекания изолированной частицы, изложенный метод основан на условии динамической устойчивости и выведен путем последовательного применения основных положений общей теории устойчивости движения А. М. Ляпунова.

Течение жидкости в деформируемом русле, при наличии процессов размыва с последующей аккумуляцией размываемого материала, представляется как волновое движение, обусловленное воздействием возмущений на систему «поток — деформируемая твердая граница».

В соответствии с общей теорией устойчивости движения в «малом» и основными положениями гидродинамической теории устойчивости [1-3], эти возмущения предполагаются малыми (по амплитуде) синусоидальными волнами. Если возмущение имеет форму «всхолмления», исчезающего при  $x = \pm \infty$ , то и в этом случае при помощи интеграла Фурье его можно выразить опять-таки через элементарные синусоидальные возмущения [3].

Анализ проводится с целью установления условий, при которых возникший неустановившийся режим (возмущенное движение) будет вырождаться в первоначальное равномерное состояние (невозмущенное движение), т. е. начавшийся размыв русла и перемещение наносов в форме волн или гряд будут экспоненциально убывать во времени.

Представление начальной фазы деформации русла в виде перемещающихся донных песчаных волн достаточно хорошо согласуется с экспериментальными фактами [4]. Кроме того, экспериментально установлено также, что массовое движение наносов по дну до определенных, сравнительно больших скоростей течения потоков происходит в форме волнообразного движения.

1. В соответствии с принятой схемой явления, возмущенное движение описывается системой уравнений гидравлики (уравнений одномерной гидродинамики) нестационарного движения взвесенесущего потока в размываемом русле. Она состоит из следующих трех уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = q_s, \quad \frac{\partial Q_s'}{\partial x} + \frac{\partial Q_s''}{\partial x} = -B \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{g_*} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\alpha V}{g_*} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\alpha - 1}{g_*} \frac{V}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\alpha V}{g_* \omega} q_s + \\ + \left(1 + \frac{m}{m+2} \sigma S_1\right) \frac{\partial H}{\partial x} + (1 + \sigma S_0) \frac{\partial Z}{\partial x} + J^* + \frac{m}{2(m+2)} \sigma H \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma = \frac{\rho_* - \rho}{\rho}, \quad g_* = g \cos \psi, \quad J^* = \frac{J}{\cos \psi}$$

Здесь  $Q$ ,  $V$ ,  $\omega$ ,  $H$  и  $B$  — соответственно расход, скорость, площадь поперечного сечения, глубина и ширина потока при нестационарном режиме;  $Q_s'$  — расход взвешенных наносов;  $Q_s''$  — расход донных наносов;  $Z$  — высотное расположение дна русла над горизонтальной плоскостью сравнения;  $\alpha$  — полный корректив количества движения, учитывающий и неравномерность распределения осредненных скоростей и пульсацию скоростей по сечению потока;  $S_0$ ,  $S_1$  — средняя по сечению объемная концентрация и концентрация у дна;  $\rho_*$  — плотность наносов;  $\rho$  — плотность воды;  $\psi$  — угол наклона дна русла в устойчивом состоянии к горизонту;  $J^*$  — гидравлический уклон взвесенесущего потока;  $q_s$  — интенсивность изменения расхода, обусловленная притоком или оттоком фаз вдоль пути.

Рассматривается случай без дополнительного притока или оттока расхода водной составляющей, поэтому  $q_s$  выражает изменение расхода твердой фазы — взвешенных наносов.

Первое уравнение (1.1) есть уравнение неразрывности. Второе уравнение (1.1) описывает деформацию ложа русла, т. е. перенос водным потоком второй фазы — наносов, взмытых с ложа русла.

В этой форме [5] левая часть уравнения отражает изменение суммарного расхода наносов вдоль движения, а правая — размыв или намыв дна, т. е. деформацию русла.

Уравнение (1.2) представляет собой одномерное уравнение гидродинамики (уравнение гидравлики) неустановившегося движения турбулентного взвесенесущего потока, текущего в деформируемом русле с переменным расходом фаз вдоль пути. Оно, по аналогии с работой [6] (в которой идентичное с (1.2) уравнение было выведено для случая течения потока в недеформируемом жестком русле), получено из общих уравнений гидродинамики двухфазного турбулентного потока в форме А. Н. Колмогорова, предложенных в работах Г. И. Баренблатта [7]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = (1 + \sigma S) g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v e_{ij}}) \quad (1.3)$$

Из них уравнение (1.2) выводится следующим образом: сначала динамическое уравнение, записанное в проекцию на нормаль относительно продольной координаты, интегрируется по глубине потока. Полученный таким образом закон распределения гидродинамического давления по глубине потока подставляется в уравнение (1.3), записанное в проекции на продольную ось, и затем это уравнение интегрируется по поперечному сечению потока. При этом ограничиваемся лишь приближением Буссинеска; именно, отбрасываются как малые члены, содержащие произведения производных и их степени выше первой. И, наконец, для распределения концентрации взвеси по глубине используется степенная аппроксимация. Не приводя доказательства, укажем, что такая зависимость для распределения концентрации отражает действительную картину при значении показателя степени  $m \ll 1$ . Таким образом, приходим к уравнению гидравлики наносонесущего потока в форме (1.2). Оно сразу переходит в известное уравнение гидравлики Буссинеска — Сен-Венана, если  $S_0 = S_1 = 0$ .

2. В уравнение деформации (1.1) и уравнение динамики (1.2) входят члены, содержащие расходы взвешенных и донных наносов, а также среднюю по сечению и донную концентрацию. Поэтому для замыкания системы требуется привлечение дополнительных соотношений для указанных характеристик потока.

В частности, для расхода наносов может быть взята зависимость И. И. Леви [5]. Учитывая, что  $Q \gg Q_s'$ , значение средней концентрации по сечению потока может быть представлено в форме<sup>1</sup>

$$S_0 = Q_s'/Q = 0.006 (V/w_0)^4 (d/R)^{1.6} \quad (2.1)$$

Здесь  $w_0$  и  $d$  — гидравлическая крупность и диаметр частиц руслового материала;  $R$  — гидравлический радиус русла.

Что же касается донной концентрации  $S_1$ , то, поскольку эта величина играет важную роль при анализе возмущенного состояния потока, т. е. явления нестационарности, непосредственное применение существующих выражений для  $S_1$ , выведенных для условий стационарных процессов обмена в придонном слое, в данном случае не представляется возможным.

Однако если учесть, что процессы нестационарного взыва наносов со дна при воздействии возмущений на дно могут иметь место в том случае, если количество движения потока в придонной области, определенное по величине максимального значения вертикальной составляющей пульсационной скорости, больше количества движения частиц тех наносов, слагающих русло, которые могут быть взвешены из-за воздействия возмущений, т. е. больше количества движения, определенного по скорости осаждения и напряжению сил сцепления, то может быть написана следующая приближенная формула феноменологического происхождения:

$$S_1 = c_0 \frac{W_m^2 - (w_0^2 + T\rho^{-1})}{W_m^2} \quad (2.2)$$

где  $W_m$  — максимальное значение вертикальной составляющей пульсационной скорости,  $T$  — напряжение сцепления, посредством которого в случае пылеватых и глинистых частиц учитывается эффект дополнительных сил, возникающих в водной среде вследствие усиления взаимодействия между указанными частицами, а  $c_0$  — коэффициент, отражающий воздействие на взвешиваемые частицы поля осредненных характеристик невозмущенного состояния турбулентного потока и приближенно определяемый из следующих соображений.

Для условий стационарного процесса обмена в придонном слое уравнение (2.2) может быть написано в виде

$$S_1^* = c_0 \frac{W_m^{*2} (w_0^2 + T\rho^{-1})}{W_m^{*2}} \quad (2.3)$$

где  $W_m^*$  — отнесенное  $W_m$  к стационарному невозмущенному состоянию потока.

Очевидно, значение  $S_1^*$  по (2.3) должно быть равно существующим выражениям для  $S_1$ , и если (2.3) приравнять к одной из них, например полуэмпирической формуле В. М. Маккавеева [9], которая хорошо согласуется с результатами опытов по значениям донной концентрации в условиях стационарного обмена в придонном слое [10], то для коэффициента  $c_0$  получим выражение

$$c_0 = 0.36 \frac{W_m^{*2}}{W_m^{*2} - (w_0^2 + T\rho^{-1})} \frac{V_1^2}{\sigma g_* H_0} \quad \left( W_m = 3V_*, V_* = \sqrt{g \frac{V_0}{C}} \right) \quad (2.4)$$

Здесь  $V_*$  — так называемая динамическая скорость,  $C$  — скоростной множитель в формуле Шези. Учитывая, что донную скорость  $V_1$  можно выразить через среднюю скорость течения в виде  $V_1 = V_0 K$ , получим

$$c_0 = \frac{3.2 V_0^4 K^2}{\sigma H_0 [9g_* V_0^2 - C^2 (w_0^2 + T\rho^{-1})]} \quad (2.5)$$

3. В случае концентрации  $S_1$  возмущений в основном в пределах придонной области зернистого ложа русла, изменением свободной поверхности потока из-за возникновения возмущений можно пренебречь; это равносильно приравнению приращения глубины потока  $h$  значению приращения деформации дна  $\zeta$ , т. е.

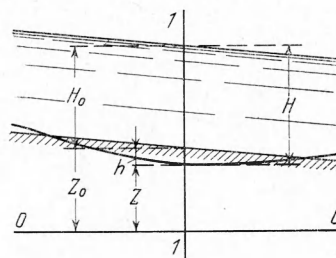
$$h = H - H_0, \quad \zeta = Z - Z_0, \quad h = -\zeta \quad (3.1)$$

Здесь  $H_0$  и  $Z_0$  — глубина потока и высотное расположение дна русла при стационарном — равномерном режиме течения (фиг. 1), а  $H$  и  $Z$  — то же при наличии возмущения, т. е. при неустановившемся режиме течения.

Для дальнейшего анализа производим линеаризацию уравнений (1.1) и (1.2), для чего принимаем

$$V = V_0 + v, \quad H = H_0 + h, \quad \omega = \omega_0 + B_0 h, \quad L = L_0 + \zeta$$

<sup>1</sup> Вместо (2.4) могла бы быть взята и любая другая зависимость из числа обычно используемых [8]. На конечные результаты по оценке устойчивости влияния они практически не оказывают, что видно из конечной формы критерия устойчивости и объясняется тем, что для начала процессов размыва средняя по сечению концентрация  $S_0 \ll S_1$  и в уравнении (1.2)  $\sigma S_0 \ll 1$ .



Фиг. 1

и далее, подставляя в (1.2) значение  $S_1$  по (2.2) и значение  $q_s$  из уравнения деформации (1.1.2), затем исключая скорость возмущенного движения  $v$  при помощи уравнения неразрывности (1.1.1) и используя условие (3.1), получаем дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами второго порядка относительно значения ординаты деформации  $\zeta$

$$P_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + P_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t} + P_3 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + P_4 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + P_5 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \alpha V_0 - \alpha A_1^* V_0 B_0 / \omega_0 + A_2 g_*$$

$$P_3 = \alpha V_0^2 - A_1 \alpha V_0^2 B_0 / \omega_0 - \alpha A_2^* V_0^2 - A_1 g_* \omega_0 / B_0 + A_2 g_* V_0$$

$$P_4 = 2g_* i_0 / V_0, \quad P_5 = 2g_* i_0 \Pi$$

$$A_1 = \frac{m}{m+2} \sigma c_0 \left[ 1 - \frac{C^2 (u_0^2 + T \rho^{-1})}{9g_* V_0^2} \right], \quad A_2 = \frac{m}{2(m+2)} \sigma c_0 H_0 \frac{C^2 (u_0^2 + T \rho^{-1})}{9g_* V_0^3}$$

$$A_1^* = 0.0083 F_0^{3/2} \left( \frac{\Pi}{x^*} \right)^{3/2} H_0 \left( \frac{H_0}{d} \right)^{1/4} - 0.0062 F_0 \frac{\Pi}{x^*} H_0 \left( \frac{d}{H_0} \right)^{1/2}$$

$$A_2^* = 0.0005 F_0^{3/2} \left( \frac{\Pi}{x^*} \right)^{3/2} \left( \frac{H_0}{d} \right)^{1/4} - 0.0002 F_0 \frac{\Pi}{x^*} \left( \frac{d}{H_0} \right)^{1/2}$$

$$\Pi = \frac{\omega_0 x^*}{2B_0 H_0}, \quad F_0 = \frac{V_0^2}{g_* \omega_0 / B_0}$$

Здесь  $\Pi$  — так называемый параметр формы русла,  $F_0$  — число Фруда,  $i_0$  — уклон дна,  $x^*$  — гидравлический показатель русла.

Устойчивость невозмущенного состояния дна русла анализируется ниже посредством представления решения уравнения (3.2) в форме ( $\lambda$  — длина волны

$$\zeta = e^{\beta x + r t} \quad (3.4)$$

причем  $\text{Re} \beta = 0$  для удовлетворения условий на бесконечности [1].

Характеристическое уравнение, полученное путем внесения значения  $\zeta$  по (3.4) в уравнение (3.2), при этом имеет вид

$$P_1 r^2 + (P_4 + ikP_2)r + (-P_3 k^2 + ikP_5) = 0 \quad (k = \text{Im} \beta = 2\pi/\lambda) \quad (3.5)$$

Применим условие устойчивости Ляпунова — Гурвица, использованное в работе [12] при исследовании устойчивости течения потока реальной жидкости конечной глубины в недеформируемых руслах. Согласно этому условию, движение асимптотически устойчиво, если все четные миноры, стоящие в левом верхнем углу квадратной матрицы порядка  $2n$ , составленной из коэффициентов полинома  $f(iZ)$ , представляющего характеристическое уравнение с комплексными коэффициентами уравнения возмущенного движения, больше нуля.

Из составленной по (3.5) (соответственно приводя его к виду  $if(iZ)$ ) квадратной матрицы получаем следующие условия устойчивости:

$$P_1 P_4 > 0, \quad P_2 P_4 P_5 - P_3 P_4^2 - P_1 P_5^2 > 0 \quad (P_1 P_4 = 2g_* i_0 / V_0) > 0 \quad (3.6)$$

Первое из них всегда выполняется, согласно выражению в скобках.

Внося во второе условие значение постоянных коэффициентов по (3.3), пренебрегая при этом слагаемыми, имеющими множителями  $A_1^*$  и  $A_2^*$ , как ничтожно малыми, и решая неравенство относительно скорости течения, получаем

$$V_0^* < \left[ \frac{\delta C^2 (u_0^2 + T \rho^{-1}) \{G - 0.36 m_1 K^2 \omega_0 B_0^{-1} [1 - 0.25 x^* (1 - \Pi^{-1})]\}}{9g_*^* (G - 0.36 m_1 K^2 \omega_0 B_0^{-1})} \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

$$G = H_0 (\Pi^2 - \alpha \Pi + \alpha)$$

Правая сторона неравенства (3.7) выражает предельные значения скоростей, превышение которых должно вызывать нарушение устойчивого состояния ложа русла, т. е. начало деформации русла в виде перемещающихся донных песчаных волн.

Эти скорости находятся в прямой связи со значениями диаметра руслового материала — чем больше диаметр, тем больше правая сторона неравенства (3.7), т. е. увеличивается степень устойчивости ложа русла. Таким образом, критерий качественно правильно отражает действительную картину глубинной эрозии — аккумуляции ложа русел и каналов. Что же касается количественной стороны, то такую оценку дает сравнение рассчитанных по (3.7) скоростей со значениями так называемых неразрывающихся скоростей, приводимых в существующих нормах [13] и являющихся результатом обобщения эмпирических зависимостей для неразрывающихся скоростей,

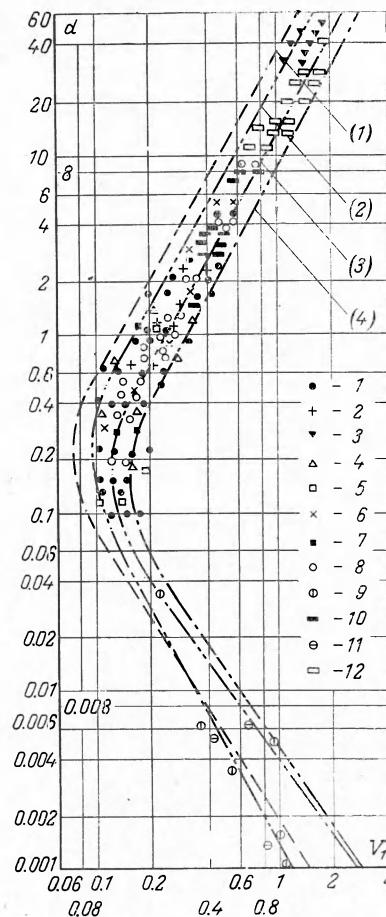
данных лабораторных и натуральных опытов и данных эксплуатаций. Так как приводимые в нормах скорости главным образом отвечают прямоугольному и широкому руслу, в таблице значения рассчитанных по зависимости (3.7) устойчивых скоростей даются соответственно для такого же сечения.

$d$ , мм	$H$ , м	$U$ , м/сек	$V_0^*$ , м/сек	$d$ , мм	$H$ , м	$U$ , м/сек	$V_0^*$ , м/сек
1.0	0.4	0.47	0.42	15.0	0.4	0.95	0.97
	1.0	0.57	0.49		1.0	1.20	1.15
	2.0	0.65	0.56		2.0	1.30	1.17
	3.0	0.70	0.62		3.0	1.40	1.40
5.0	0.4	0.65	0.70	25.0	0.4	1.20	1.16
	1.0	0.80	0.82		1.0	1.40	1.40
	2.0	0.90	0.93		2.0	1.60	1.56
10.0	0.4	0.80	0.94	40.0	0.4	1.50	1.40
	1.0	1.00	1.03		1.0	1.80	1.89
	2.0	1.10	1.17		2.0	2.10	1.98
	3.0	1.20	1.24		3.0	2.20	2.13

Как видно из таблицы,  $V_0^* \approx U$ , т. е. имеет место весьма удовлетворительное согласование теории с обобщенным материалом опытного характера. Этот факт тем более показателен, что в полученный критерий не введен ни один эмпирический коэффициент для улучшения степени сходимости результатов теории и опытных данных и состоит он только из полностью определенных характеристик потока и ложа русла.

О степени количественной сходимости полученного критерия с экспериментальным материалом дает наглядное представление приводимый ниже график на фиг. 2. На оси ординат здесь отложены значения действующих скоростей  $V_1$  м/сек на высоте диаметра частиц,  $d$  мм, при которых частицы приходят в движение, т. е. начальные скорости трогания; кривые по уравнению (3.7) при значении коэффициента Шези по Маккавееву (1), Доу Го-жень (2), Чангу (3), Штриклеру (4); опыты: Великанова — 1, Пушкарева — 2, Шамова — 3, Кнороза — 4, Рубинштейна — 5, Хэ — 6, Чжана — 7, Нанкинской лаборатории — 8, натурные данные китайских рек — 9, Мейер-Петера — 10, Скобея — 11, Шаффернака — 12. Сопоставляемые опытные точки заимствованы из графика Доу Го-жень [14], поэтому и переход от скоростей, полученных по критерию (3.7), к  $V_1$  производился при помощи зависимости Доу Го-жень для распределения местной осредненной скорости по нормали к свободной поверхности [15].

На графике нанесены опытные точки, полученные М. А. Великановым и Н. М. Бочковым, В. Ф. Пушкаревым, Г. И. Шамовым, В. С. Кнорозом, Г. А. Рубинштейном, Хэ Чжи-таем, Чжан Ю-лином, Нанкинской лабораторией гидротехники, Мейер-Петером, Скобеем, Шаффернаком [14]. Нанесены также четыре теоретические кривые. Все они получены по критерию (3.7), но с применением разных зависимостей для коэффициента Шези  $S$ , в качестве которого брались формулы: Штриклера, Чанга, В. М. Маккавеева [16] и Доу Го-жень [15].



Фиг. 2

