ПМТФ, № 1, 1973

УДК 539.374

ЗАДАЧА О СФЕРИЧЕСКОМ ПОРШНЕ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ С «СУХИМ» ТРЕНИЕМ

В. В. Башуров

(Челябинск)

Исследуется автомодельная задача о движении сферического поршня в среде с «сухим» трением. Поршень движется с постоянной скоростью в неидеальной среде.

1. Рассмотрим сферический поршень, начинающий свое движение из начала координат и движущийся с постоянной скоростью в среду с уравнением состояния

$$\begin{gathered} -{}^1/_3\, 3(\sigma^r + 2\sigma^\theta) = K(\rho / \rho_0 - 1)^\gamma, \quad \gamma \geqslant 1, \quad \rho \geqslant \rho_0 \\ \sigma^r + 2\sigma^\theta = 0, \quad \rho < \rho_0 \\ {}^1/_2\,(\sigma^r - \sigma^\theta) = \varkappa p, \qquad \varkappa < 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь σ^r и σ^θ — соответственно радиальные и азимутальные напряжения, p — давление, ρ и ρ_0 — плотности, K — коэффициент объемного сжатия, $\varkappa$ — коэффициент сухого трения, u_p — скорость поршня.

Подобные уравнения состояния рассматривались в [1,2].

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^r}{\partial r} + \frac{2(\sigma^r - \sigma^\theta)}{\rho r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u\rho}{r} = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

Начальные и граничные условия для (1.1), (1.2) имеют вид

$$\begin{gathered} u = p = 0, \qquad \rho = \rho_0 \quad \text{при } t = 0, \quad r \geqslant 0 \\ u = u_p \quad \text{при } r = u_p t \\ u \to 0, \quad p \to 0, \quad \rho \to \rho_0 \quad \text{при } r \to \infty \end{gathered}$$

Анализ размерных величин [3] показывает, что задача автомодельна. Введем безразмерные величины

$$\begin{gathered} \lambda = rt^{-1}\left[\frac{\rho_0}{(1 - {}^4/_3\varkappa)K}\right]^{1/2}, \qquad U = u\left(\frac{\rho_0}{(1 - {}^4/_3\varkappa)K}\right)^{1/2} \\ P = p\cdot K^{-1}, \quad R = \rho\rho_0^{-1}, \quad \alpha = 4\varkappa\,(1 - {}^4/_3\varkappa)^{-1} \end{gathered}$$

В этих переменных система (1.2) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{dU}{d\lambda}\left(\frac{U}{\lambda} - 1\right) = -\frac{1}{\lambda R}\frac{dP}{d\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda^2}\frac{P}{R} \\ \frac{dR}{d\lambda}\left(\frac{U}{\lambda} - 1\right) + \frac{R}{\lambda}\frac{dU}{d\lambda} + 2\frac{RU}{\lambda^2} = 0 \\ P = (R - 1)^\gamma \end{gathered} \tag{1.3}$$

Разрешим систему (1.3) относительно производных, используя третье соотношение из (1.3)

$$\frac{dU}{d\lambda} = \lambda^{-1}\frac{\gamma^{-1}\alpha (U-\lambda) P^{1/\gamma}(P^{1/\gamma}+1)^{-1}+2U}{\gamma^{-1}(U-\lambda)^2 P^{1/\gamma-1}-1} \qquad (1.4)$$

$$\frac{dP}{d\lambda} = -\lambda^{-1}\frac{2U(U-\lambda)(P^{1/\gamma}+1)+\alpha P}{\gamma^{-1}(U-\lambda)^2 P^{1/\gamma-1}-1}$$

Краевые условия для (1.4) имеют вид

$$U=\lambda \quad \text{при } \lambda = u_p\left(\frac{\rho_0}{(1-{}^4/_3\varkappa)K}\right)^{1/2}$$

$$U\to 0,\ P\to 0 \qquad \text{при } \lambda\to\infty.$$

2. С учетом (1.1) условия на сильном разрыве [4] принимают вид

$$(P_1^{1/\gamma}+1)(U_1-\lambda) = (P_2^{1/\gamma}+1)(U_2-\lambda) \qquad (2.1)$$

$$P_1-(P_1^{1/\gamma}+1)U_1(\lambda-U_1) = P_2-(P_2^{1/\gamma}+1)U_2(\lambda-U_2)$$

Если фронт ударной волны распространяется по покоящейся среде, то $P_2=0$, $U_2=0$ и условия на разрыве принимают вид

$$(P_1^{1/\gamma}+1)(U_1-\lambda) = -\lambda, \quad P_1-(P_1^{1/\gamma}+1)U_1(\lambda-U_1)=0$$

Вырожденный сильный разрыв ($P_1\to 0$, $U_1\to 0$) дает значение λ_c, отвечающее скорости распространения слабого разрыва. Несложные выкладки показывают, что

$$\gamma>1,\ \lambda_c=0; \qquad \gamma=1,\ \lambda_c=1$$

Исключая P_1 из (2.1), получим некоторую кривую в плоскости λU. Нетрудно показать, что эта кривая лежит ниже прямой «начальных данных», т. е. прямой $\lambda=U$. Действительно, из первого соотношения в (2.1) видно, что при $\lambda>0, P_1>0$ имеет место $U_1<\lambda$.

Особые точки системы уравнений (1.4) определяются системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\lambda\,[(U-\lambda)^2 P^{1/\gamma-1}\gamma^{-1}-1] &= 0\\ \gamma^{-1}\alpha(U-\lambda)P^{1/\gamma}(P^{1/\gamma}+1)^{-1}+2U &= 0\\ 2U(U-\lambda)(P^{1/\gamma}+1)+\alpha P &= 0\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Пусть $\lambda=0$, тогда

$$\gamma^{-1}\alpha U P^{1/\gamma}(P^{1/\gamma}+1)^{-1}+2U=0, \qquad 2U^2(P^{1/\gamma}+1)+\alpha P=0$$

Если $U=0$. то $P=0$
Если $U\neq 0$, то имеем

$$\gamma^{-1}\alpha P^{1/\gamma} = -2(P^{1/\gamma}+1), \qquad P^{1/\gamma} = -2(\gamma^{-1}\alpha+2)^{-1} \qquad (2.3)$$

$$U=\pm\gamma^{-1/2} \qquad (2.4)$$

При некоторых значениях α и γ формулы (2.3), (2.4) определяют действительные особые точки.

Пусть $\lambda\neq 0$. В этом случае, умножая второе уравнение из (2.2) на $(U-\lambda)$ и используя первое уравнение, получим, что третье уравнение является следствием двух первых. Итак, особые точки в этом случае определяются системой

$$\gamma^{-1}(U-\lambda)^2P^{1/\gamma-1}-1=0, \quad 2U(U-\lambda)(P^{1/\gamma}+1)+\alpha P=0 \qquad (2.5)$$

и образуют особую линию.

Особые точки $(0,0,0)$, $(0, \pm\gamma^{-1/2}[-2(\alpha\gamma^{-1}+2)^{-1}]^{1/2(\gamma-1)}, [-2(\alpha\gamma^{-1}+2)^{-1}]^{\gamma})$ лежат вне области течения и влияют лишь на расположение интегральных кривых в пространстве $\lambda\ U\ P$; ни одна траектория (кроме траектории, отвечающей состоянию равновесия) не проходит через эти точки.

Рассмотрим поведение «особой» линии. Из (2.5) следует, что на особой линии выполнено соотношение

$$\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}(U-\lambda)^{2\gamma/(\gamma-1)} = P \tag{2.6}$$

Из (2.1) путем несложных выкладок получаем, что на ударной волне

$$(\lambda - U)^2 = P^{(\gamma-1)/\gamma}(P^{1/\gamma}+1)^{-1}$$

Траектория, начинающаяся на прямой $U-\lambda=0$, не пересекает особой линии прежде, чем она пересечет линию сильного скачка. Действительно, пусть P_0 — начальное давление. В силу уравнений (1.4)

$$\frac{dP}{d\lambda}<0, \qquad \frac{d(\lambda-U)}{d\lambda}>0$$

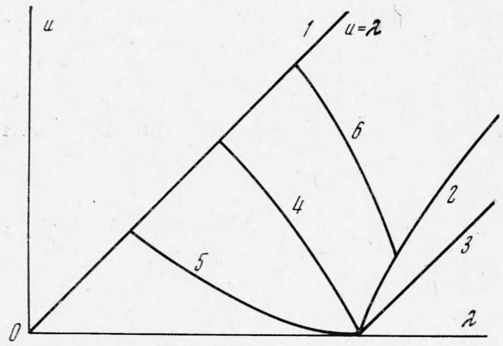
Вычислим значение правой части равенства (2.6) при

$$(\lambda - U)^2 = P^{(\gamma-1)/\gamma}(P^{1/\gamma}+1)^{-1}$$

Это значение равно

$$\gamma^{\gamma/(1-\gamma)}P(P^{1/\gamma}+1)^{2\gamma/(1-\gamma)}$$

Так как $\gamma>1$, то это значение меньше P, т. е. ни в одной точке траектории, предшествующей ударной волне, равенство (2.6) выполнено быть не может.



На фигуре представлены прямая «начальных данных» *1*, ударная волна *2*, особая линия *3* и некоторые характерные траектории с $\gamma=1$: сепаратриса *4*, непрерывное решение *5*, решение с ударной волной *6*. Ясно, что при $\gamma>1$ непрерывный режим течения невозможен. Однако при $\gamma=1$ такая возможность появляется и при численном счете уравнений (1.4) такие траектории были обнаружены. Обсуждаются численные результаты в п. 4. В дальнейшем рассмотрим случай $\gamma=1$.

3. При $\gamma=1$ уравнения (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned} dU/d\lambda &= [\alpha(U-\lambda)P(P+1)^{-1}+2U]\lambda[(U-\lambda)^2-1] \\ dP/d\lambda &= -[2U(U-\lambda)(P+1)+\alpha P]\lambda[(U-\lambda)^2-1] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Особая линия определяется как решение системы

$$(U-\lambda)^2=1, \quad 2U(U-\lambda)(P+1)+\alpha P=0$$

В плоскости λU особая линия распадается на две прямых, из которых интерес представляет прямая $U=\lambda-1$. На этой прямой физически реализуемо лишь состояние

$$\lambda=1, \quad U=0, \quad P=0$$

В остальных точках $P < 0$. Таким образом, точка (1, 0, 0) является особой точкой, через которую может проходить траектория. Отметим, что эта точка соответствует слабому разрыву, и в этой точке можно «сшивать» область покоя с возмущенной областью.

Исследуем поведение интегральных кривых в окрестности особой точки. Согласно [5] вместо системы (3.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dU/d\tau &= \alpha\,(U-\lambda)\,P\,(P+1)^{-1}+2U \\ dP/d\tau &= -2U\,(U-\lambda)\,(P+1)-\alpha P \\ d\lambda/d\tau &= \lambda\,[(U-\lambda)^2-1] \end{aligned} \tag{3.2}$$

и разложим решение в ряд в окрестности точки (1, 0, 0). Линеаризованная система имеет вид

$$\frac{dU}{d\tau}=-\alpha P+2U,\qquad \frac{dP}{d\tau}=2U-\alpha P,\qquad \frac{d\delta}{d\tau}=-2U+2\delta \tag{3.3}$$

Здесь $\delta=\lambda-1$. Собственные числа системы (3.3), выписанные в порядке возрастания, образуют тройку чисел — 0, 2, $2-\alpha$. Каждому собственному числу соответствует некоторое решение системы (3.3). Эти решения легко находятся; в векторной форме они имеют вид

$$Y_1=(1,2/\alpha,1),\qquad Y_2=(0,0,e^{2\tau}),\qquad Y_3=(e^{(2-\alpha)\tau},e^{(2-\alpha)\tau},2\alpha^{-1}e^{(2-\alpha)\tau})$$

Общее решение системы (3.3) представляется в виде

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+C_3Y_3$$

В точку $\lambda=1$, $U=0$, $P=0$ входят интегральные кривые только при $C_1=0$. Таким образом, в окрестности особой точки интегральные кривые, которые могут отвечать некоторому движению, имеют вид

$$U=C_3e^{(2-\alpha)\tau},\qquad P=C_3e^{(2-\alpha)\tau},\qquad \delta=C_2e^{2\tau}+C_32\alpha^{-1}e^{(2-\alpha)\tau}$$

Траектории входят в особую точку при $\tau\to\infty$. Видно, что $U=P$ в окрестности особой точки, т. е. прямая $U=P$ является сепаратрисой в плоскости UP. Найдем зависимость U от λ. Имеем $(2-\alpha)\,\tau=$ $=\ln\,(U/C_3)$, тогда

$$\lambda-1=C_2\,(U/C_3)^{2/(2-\alpha)}+2\alpha^{-1}U,$$
$$d\lambda/dU=C_2\,(U/C_3)^{\alpha/(2-\alpha)}\,C_3^{-1}+2\alpha^{-1}$$

Так как $\alpha<0$, то при $C_2\neq 0$, $U\to 0$ $d\lambda/dU\to\infty$ и все интегральные кривые касаются прямой $U=0$. Если $C_2=0$, то $\lambda=1+2\alpha^{-1}U$ и это уравнение определяет направление (вторую сепаратрису), по которому в точку (1, 0, 0) входит единственная траектория.

Таким образом, если осуществляется режим непрерывного течения, то течение почти всегда происходит без слабого разрыва.

Действительно, так как почти все (за исключением одной) траектории входят в точку (1, 0, 0) с нулевым наклоном ($dU/d\lambda=0$), то они сопрягаются с нулевым решением без разрыва первой производной от скорости; разрыва в $dP/d\lambda$ также нет, так как согласно

$$\lim_{\lambda\to 1-0}\frac{dP}{d\lambda}=\lim\frac{dP}{dU}\,\frac{dU}{d\lambda}=0$$

4. При численных расчетах, во-первых, для различных значений α строилось решение, входящее в особую точку $(1, 0, 0)$ с ненулевым наклоном. Точка пересечения интегральной кривой с прямой начальных данных определяет значение скорости поршня $u_p{}^*$, разделяющее два существенно разных режима течения: с ударной волной и без ударной волны. Выяснилось, что с ростом α (т. е. с ростом коэффициента сухого трения $\varkappa$) значение $u_p{}^*$ растет и приближается к некоторому предельному значению.

Во-вторых, для различных значений α строилась зависимость давления на поршне от его скорости. Приведем эту зависимость для значения $\alpha = -1.75$

U_p	0.25	0.53	0.56	0.75	1.06
P_p	0.23	0.58	0.62	0.92	1.20

В-третьих, при $\alpha = -1.75$ находилась зависимость скорости фронта возмущения от скорости поршня

U_p	0.25	0.53	0.56	0.79	1.06	1.18
U_f	1	1	1	1.1	1.3	1.4

Таким образом установлено, что для данной сыпучей среды при малых скоростях поршня имеет место непрерывное течение без слабых разрывов; при некоторой скорости возникает слабый разрыв; при дальнейшем увеличении скорости возникает ударная волна.

В заключение отметим, что подобная задача рассматривалась в работе [2] в предположении несжимаемости среды; аналогичная задача в плоском случае решена в [6].

Трудности исследования системы уравнений (3.1) не позволяют аналитически исследовать вопросы устойчивости и единственности решений, однако результаты численного расчета, проведенные по программе, изложенной в докладе на I Всесоюзном семинаре по теории моделей механики сплошной среды [7], с хорошей точностью подтвердили результаты, полученные при приближенном решении системы (3.1)

Автор благодарит Т. Ф. Крюкову, выполнившую большинство расчетов.

Поступила 24 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., «Мир», 1969.
2. Вахрамеев Ю. С. Некоторые соотношения подобия для движения сыпучей уплотняющейся среды. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
6. Григорян С. С., Черноусько Ф. Л. Задача о поршне для уравнений динамики грунтов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
7. Быченков В. А., Гаджиева В. В., Куропатенко В. Ф. Расчет взрывов в разрушаемых средах. Доклад на 1-м Всесоюзном семинаре по теории моделей механики сплошной среды. Новосибирск, 1971.