на каустике

$$m_2 \approx \frac{2m_2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma^{1/4}\left(2\,(kK)^2\left((\delta u_2 kK)^2-1\right)\right)^{1/4}}, \tag{3.25}$$

где Г — гамма-функция. Эта формула справедлива всюду на каустике, кроме точки O' (и ее окрестности). А в точке O' справедливо разложение $f \approx \frac{1}{36}(\delta u_2\,(kK)^3)^2\left(u_2^{\prime *}-y\right)^6$, оно позволяет вычислить m_2 по формуле

$$m_2 \approx \frac{m_2^{\alpha}}{3\sigma^{1/3}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Big/\left(Kk\,(\delta u_2)^{1/3}\right). \tag{3.26}$$

Условие применимости (3.26) имеет вид

$$m_2' \ll 1,\ kd/m_2' \gg 1,\ kd < 1,$$

где $m_2' \approx m_2^0\left(\delta u_2^2/\sigma\right)^{1/3}$; $\sigma/\delta u_2^2 < 1$; $m_2^0 \ll 1$.

Таким образом, показано, что в континуально-дискретной модели, не учитывающей объема частиц, малые возмущения, возникшие в момент $t=0$ на $-\infty < x < +\infty$, остаются всюду конечными в полуплоскости $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$. Максимум возмущений достигается на каустиках, определяемых уравнением (3.24), а их величина обратно пропорциональна ширине функции распределения в дробной степени (3.25), (3.26), в то время как в двухжидкостной модели (без учета объема частиц) малые возмущения неограниченно растут на каустиках по закону (3.21).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клебанов Л. А., Крошилин А. Е. и др.** О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 1.
2. **Крайко А. Н.** О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 3.
3. **Крайко А. Н.** К теории двухжидкостных течений газа и диспергированных в нем частиц.— В кн.: Гидродинамика и теплообмен в двухфазных средах. Матер. II Всесоюз. шк. по теплофизике. Новосибирск, 1981.
4. **Иорданский С. В., Куликовский А. Г.** О движении жидкости, содержащей мелкие частицы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
5. **Мясников В. П.** Статистическая модель механического поведения дисперсных систем.— В кн.: Механика многокомпонентных сред в технологических процессах. М.: Наука, 1978.
6. **Крайко А. Н., Стернин Л. Е.** К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
7. **Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.** Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
8. **Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.** Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.

Поступила 14/XII 1984 г.

УДК 629.7.018.3

РАСЧЕТ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОЗДУХА НА ПОВЕРХНОСТИ МОДЕЛЕЙ И В СЛЕДАХ ЗА НИМИ ДЛЯ УСЛОВИЙ АЭРОБАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

И. Г. Еремейцев, Н. Н. Пилюгин

(*Москва*)

Расчет неравновесного квазиодномерного течения химически реагирующих газовых смесей представляет практический интерес в связи с изучением релаксационных процессов, получением газодинамических струй для физических измерений, а также исследованием плазменных сверхзвуковых явлений в следе за телом и т. д.

В [1—8] и др. приведены расчеты химически неравновесных сверхзвуковых квазиодномерных течений. При этом используются различные алгоритмы решения таких задач для течений в соплах и трубках тока около тела. В настоящее время с помощью трубок тока для некоторых условий обтекания рассчитаны поля неравновесных параметров на поверхности сферически затупленных конусов, а результаты расчетов для невязкого течения в следах отсутствуют. При расширении за кормовым срезом тела, где резко снижается температура газа, необходимо дополнительно учитывать важные реакции с участием электронов, отрицательных ионов и многоатомных молекул. Для сопоставления и обработки результатов аэробаллистических экспериментов необходимы также расчеты неравновесных параметров при обтекании тел с другими формами поверхности в широком диапазоне изменения исходных параметров. Однако отсутствие удобных и быстрых для реализации на ЭВМ методик расчета не позволяло до сих пор проводить такие сопоставительные исследования и давать практические рекомендации.

В [9] детально изучена задача о течении химически неравновесного, частично ионизованного многокомпонентного, невязкого газа из сферического сверхзвукового источника; из расчетов видно, что в ряде важных случаев можно использовать постоянное значение эффективного показателя адиабаты, что дает возможность получить однозначную связь между площадью трубки тока и давлением газа.

В данной работе представлен единый алгоритм расчета на ЭВМ прямой и обратной квазиодномерной задачи о течении химически неравновесного многокомпонентного воздуха. На основе разработанной методики расчета обсуждаются постановки и пути решения ряда задач неравновесной аэродинамики.

1. Рассмотрим стационарное квазиодномерное течение химически неравновесного газа. Система безразмерных уравнений, описывающая такое течение, имеет вид [1]

$$\rho v S(x) = 1, \quad \rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx}, \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dx}(h + v^2) = 0, \quad \rho v \frac{dc_i}{dx} = W_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$h = \sum_{i=1}^{N} c_i h_i = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\int_0^T c_{pi} dT + h_i^0 \right), \quad c_i = \rho_i/\rho,$$

$$p = \rho T m_* \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{m_i}, \ \sum_{i=1}^{N} c_i = 1, \ [X_i] = \frac{c_i}{m_i}\rho,$$

$$W_i = \frac{l_*}{\rho_* v_*} m_i I_i, \quad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} X_i \underset{k_{bj}}{\overset{k_{fj}}{\rightleftarrows}} \sum_{i=1}^{N} b_{ij} X_i, \quad j = 1, 2, \ldots, N_r,$$

$$I_i = \sum_{j=1}^{N_r} (b_{ij} - a_{ij}) \left\{ k_{fj} \prod_{k=1}^{N} [X_k]^{a_{kj}} - k_{bj} \prod_{k=1}^{N} [X_k]^{b_{kj}} \right\}.$$

Здесь $S_* S$ — площадь трубки тока; $l_* x$ — продольная координата; $v_* v$, $\rho_* \rho$, $\rho_* v_*^2 p$, $\frac{m_* v_*^2}{R_A} T$, $\frac{v_*^2}{2} h$ — скорость, плотность, давление, температура и энтальпия газа; c_i, m_i — массовая концентрация и молекулярный вес i-го компонента; N — число химических компонентов; R_A — универсальная газовая постоянная; W_i — скорость образования i-го компонента в результате химических реакций и ионизации; N_r — число реакций; k_{fj}, k_{bj} — константа прямой и обратной химических реакций; a_{ij}, b_{ij} — стехиометрические коэффициенты; $[X_i]$ — мольно-объемная концентрация i-го компонента; $c_{pi} R_A / 2m$ — теплоемкость i-го компонента при постоянном давлении; $(v_*^2/2) h_i^0$ — удельная энтальпия образования i-го компонента; звездочкой отмечены характерные размерные величины данной задачи. Для замыкания системы (1.1) в прямой задаче задается форма трубки тока, т. е. зависимость площади поперечного сечения S от продольной координаты x, в обратной — изменение по x давления p.

Сделаем переход в уравнениях (1.1) от продольной координаты x к координате расширения трубки тока r посредством замены $S(x)$ на r^2. Тогда систему (1.1) запишем как

$$\rho v r^2 = 1, \ \rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp}{dr}, \ \frac{d}{dr}(h + v^2) = 0, \tag{1.2}$$

$$p = \rho T \sum_{i=1}^{N} \gamma_i,\ \rho v \frac{d\gamma_i}{dr} = \sum_{j=1}^{N_r} \nu_{ij}\Gamma_j\varphi_j,\ i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{m_i} m_*,$$

$$\Gamma_j = \begin{cases} \dfrac{r_*\rho_*^2}{v_* m_*^2} k_{bj}\rho^2 & \text{для тройных реакций,} \\ \dfrac{r_*\rho_*}{v_* m_*} k_{bj}\rho & \text{для бинарных реакций,} \end{cases}$$

где $r_* = f(r)\, l_*$; $f(r) = dx/dr$.

При $f(r) = 1$ система (1.2) тождественно совпадает с уравнениями, описывающими неравновесное течение газа из сферического источника радиуса $r_* = l_*$ [9].

В результате решения (1.2) с соответствующими начальными условиями все параметры получаются в виде функций от r. Для перехода к начальной координате x необходимо установить взаимно-однозначное соответствие между x и r. В прямой задаче оно устанавливается непосредственно из соотношения $S(x) = r^2$. При этом величина f легко вычисляется: $f = 2r dx/dS$.

В обратной задаче задается профиль давления $p(x)$, а функция $S(x)$ может быть рассчитана после решения всей задачи. Решение обратной задачи можно получить путем решения эквивалентной прямой задачи о течении из источника с переменным радиусом $r_*(r)$. С этой целью численно решается система (1.2), а по найденному распределению $p(r)$ из соотношения

$$\frac{p(x)}{p_0'} = \frac{p(r)}{p_*} = \gamma_{ef}^* \mathrm{M}_*^2 p(r) \tag{1.3}$$

находится соответствие между r и x. В (1.3) γ_{ef}^*, p_*, M_* — эффективный показатель адиабаты [1], давление и число Маха на поверхности источника $r = 1$; p_0' — давление в критической точке тела. Из (1.3) следует

$$f(r) = \gamma_{ef}^* \mathrm{M}_*^2 \frac{dx}{dp} \frac{dp}{dr},$$

где величина dp/dx задана, а dp/dr находится из решения (1.2). В частном случае при $\gamma_{ef}(r) = \mathrm{const}$ dp/dr можно определить на основе изэнтропических формул [9]:

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{2\gamma_{ef} p(r)}{r} \left\{ \frac{r^4}{\mathrm{M}_*^2} \left[\gamma_{ef} \mathrm{M}_*^2 p(r)\right]^{\frac{\gamma_{ef}+1}{\gamma_{ef}}} - 1 \right\}^{-1}.$$

В общем случае производную dp/dr нужно вычислять численно совместно с решением уравнений (1.2). Распределение давления на поверхности затупленного осесимметричного тела можно получить либо на основе численных решений, затабулированных в [10], либо по модифицированной формуле Ньютона [11]. Распределение давления по поверхности сферы находится с высокой точностью по формуле [11]

$$\frac{p}{p_0'} = 1 - 1{,}17 \sin^2\theta + 0{,}225 \sin^6\theta,\ \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \tag{1.4}$$

$$p_0' = \left\{1 + \gamma \mathrm{M}_\infty^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} p_\infty,\ \varepsilon = \rho_\infty/\rho_{s0}.$$

Здесь γ, M_∞, ρ_∞ — отношение теплоемкостей, число Маха и плотность в набегающем потоке газа; α — угол между нормалью к телу и горизонтальной осью. Распределение давления вдоль оси следа можно найти по аналогии с сильным цилиндрическим взрывом [11, 12].

Если использовать эту формулу из [12] и срастить ее с формулой (1.4) при $\theta = \pi/2$ и $x' = R$, где R — радиус сферы, то в следе за сферой имеем

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{\gamma M_\infty^2 k_2(\gamma)\sqrt{\frac{C_x}{2}}}{(x'+x_0')/R}, \quad \gamma = \gamma_\infty, \tag{1.5}$$

$$\frac{x_0'}{R} = \frac{k_2(\gamma)\sqrt{\frac{C_x}{2}}}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)0{,}055} - 1, \quad \gamma k_2(\gamma) = \frac{\frac{\gamma}{\gamma^{2-\gamma}}}{\frac{4-\gamma}{2^{2-\gamma}}},$$

где C_x — коэффициент сопротивления тела.

Как показано в [13], сглаживание давления в небольшой по размеру донной области несильно влияет на решение в следе. Аналогичные выражения для $p(x)$ могут быть получены и для других тел.

Исключая давление с помощью уравнения состояния пз. уравнений импульса и энергии, а также переходя к новой независимой переменной $z = r^{-1}$ и переменной интегрирования v, окончательно найдем

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \quad \frac{dT}{dv} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1}, \quad \frac{d\gamma_i}{dv} = -\frac{1}{vz^2}\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\sum_{j=1}^{N_r} \nu_{ij}\Gamma_j\varphi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1.6}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{v}\left[T\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\frac{dH_i}{dT}\right)\left(\frac{2}{z} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{d\gamma_i}{dz}}{\sum_{i=1}^{N}\gamma_i}\right) - \sum_{i=1}^{N}\frac{d\gamma_i}{dz}H_i\right],$$

$$\Phi_2 = 2 - \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\gamma_i} - \frac{T}{v^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\frac{dH_i}{dT}\right), \quad H_i = \frac{h_i m_i}{m_*},$$

$$\Phi_3 = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\gamma_i} - \frac{T}{v^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{d\gamma_i}{dz}H_i\right) - 2T\left(\frac{2}{z} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{d\gamma_i}{dz}}{\sum_{i=1}^{N}\gamma_i}\right).$$

Начальные условия к системе (1.6):

$$v = 1, \; z = 1, \; T = T_* R_A m_*^{-1} v_*^{-2}, \; \gamma_i = \gamma_{i*}, \; i = 1, 2, \ldots, N.$$

2. Преобразованием координат $z = r^{-1}$ проведено интегрирование уравнений в ограниченной области $0 < z \leqslant 1$. Использован метод решения уравнений, аналогичный [5, 9], который позволил по единой неявной разностной схеме с высокой точностью и достаточно большим шагом рассчитывать области течения как близкие к равновесию, так и существенно неравновесные.

Система дифференциальных уравнений (1.6) заменялась следующими разностными соотношениями:

$$\frac{\gamma_{i,m+1} - \gamma_{i,m}}{\Delta v} = -\frac{sW_{i,m+1}}{v_{m+1}z_{m+1}^2}\frac{\Phi_{2,m+1}}{\Phi_{1,m+1}} - \frac{(1-s)W_{i,m}}{v_m z_m^2}\frac{\Phi_{2,m}}{\Phi_{1,m}}, \tag{2.1}$$

$$W_{i,m} = \sum_{j=1}^{N_r}\nu_{ij}\Gamma_{j,m}\varphi_{j,m}, \quad i = 1, 2, \ldots, N_L,$$

$$\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta v} = s\frac{\Phi_{3,m+1}}{\Phi_{1,m+1}} + (1-s)\frac{\Phi_{3,m}}{\Phi_{1,m}}, \quad \frac{z_{m+1} - z_m}{\Delta v} = s\frac{\Phi_{2,m+1}}{\Phi_{1,m+1}} + (1-s)\frac{\Phi_{2,m}}{\Phi_{1,m}},$$

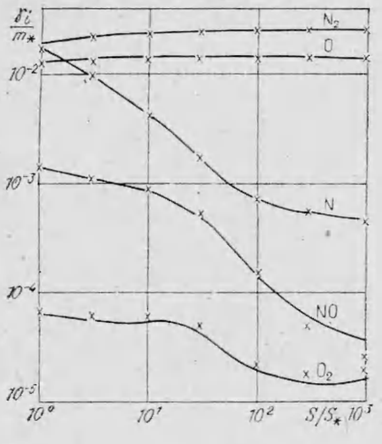

Рис. 1.

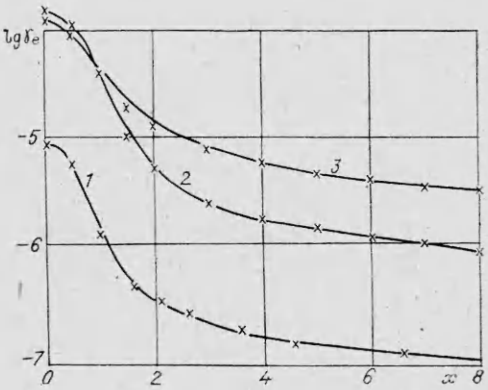

Рис. 2.

где $0 \leqslant s \leqslant 1$; Δv — шаг интегрирования; m — номер узла расчетной сетки; s — весовой множитель; N_L — число продуктов независимых реакций. В расчетах полагалось $s = 0{,}6$, $\Delta v = 10^{-3}$. Вся система нелинейных уравнений решалась методом Ньютона по стандартной программе.

Рассматривался воздух, состоящий из 18 компонентов: O, N, e, O_2, N_2, NO, NO^+, O_2^+, N_2^+, O^+, N^+, O_2^-, O^-, NO_2, O_3, N_2O, NO_2^-, O_3^-, между которыми протекает 72 реакции. Система основных химических реакций бралась в соответствии с рекомендациями [1, 3, 8, 9, 14] и приведена в таблице, где константы скоростей реакций представлены в виде $k = a \cdot 10^n T^b \times \times \exp(-C/T)$, температура дана в кельвинах, размерности констант скоростей реакций — в $(\text{см}^3/\text{моль})^{q-1} \cdot \text{с}^{-1}$ (q — порядок реакции), индексы f и b означают прямую и обратную реакции соответственно. Необходимые константы равновесия и термодинамические свойства взяты из [14, 15].

3. Проведено сравнение расчетов распределений неравновесных параметров воздуха по изложенному выше способу с результатами [2—7], полученными по методу трубок тока как для прямых, так и для обратных задач.

На рис. 1 приведено распределение концентраций компонентов при расширении воздуха в гиперзвуковом сопле для $T_* = 10\ 000$ K, $p_* = 5{,}35 \cdot 10^7$ Па, $r_* = 1$ см (линии) из [3]. Форма сопла задавалась в виде

$$S/S_* = 1 + (x/r_*)^2, \quad r_* = l_*/\operatorname{tg} \theta$$

(сопло, приближающееся к коническому с полууглом раствора θ). Крестиками на рис. 1—4 отмечены результаты, полученные по вышеизложенному методу. Из рис. 1 видно хорошее совпадение с данными [3]. Некоторое расхождение значений концентраций NO и O_2 при $S/S_* > 10^2$ объясняется различием в кинетике реакций настоящей работы от принятой в [3].

Учет более полной системы реакций приводит к заметному отличию в распределениях концентраций только при $S/S_* > 10$. Поэтому на небольших расстояниях от критического сечения сопла можно использовать более простую систему реакций (см. [2—7]).

Проведены расчеты с разным распределением давления в области за срезом тела, где обычно происходит «сшивание» формул для давления на теле и по взрывной аналогии в следе, и выяснено, что изменение распределений давления в ближнем следе мало влияет на результаты расчетов распределений неравновесных параметров. Так, изменение давления на 25% на расстоянии за телом $x' = x/R \sim 10$ (R — радиус миделя тела) приводило к изменению температуры газа менее чем на 1%, а числовой электронной концентрации в единице объема менее чем на 5%. Это оправдывает использование асимптотических формул для сглаженного профиля давления в сравнительно небольшой по размерам области ближнего следа.

j	Реакции	$k_f = a_f 10^{n_f} T^{l_f} e^{-\frac{C_f}{T}}$				$k_b = a_b 10^{n_b} T^{l_b} e^{-\frac{C_b}{T}}$			
		a_f	n_f	l_f	C_f	a_b	n_b	l_b	C_b
1	$O_2 + O_2 \rightleftarrows O + O + O_2$	1,80	21	—1,5	59 500	1,48	18	—1,0	0
2	$O_2 + O \rightleftarrows O + O + O$	4,86	21	—1,5	59 500	4,00	18	—1,0	0
3	$O_2 + N_2 \rightleftarrows O + O + N_2$	4,04	20	—1,5	59 500	3,33	17	—1,0	0
4	$O_2 + N \rightleftarrows O + O + N$	3,64	18	—1,0	59 500	3,00	15	—0,5	0
5	$O_2 + NO \rightleftarrows O + O + NO$	3,64	18	—1,0	59 500	3,00	15	—0,5	0
6	$N_2 + O_2 \rightleftarrows N + N + O_2$	2,00	17	—0,5	113 000	1,10	16	—0,5	0
7	$N_2 + N_2 \rightleftarrows N + N + N_2$	4,92	17	—0,5	113 000	2,70	16	—0,5	0
8	$N_2 + O \rightleftarrows N + N + O$	2,00	17	—0,5	113 000	1,10	16	—0,5	0
9	$N_2 + N \rightleftarrows N + N + N$	2,18	22	—1,5	113 000	1,20	21	—1,5	0
10	$N_2 + NO \rightleftarrows N + N + NO$	2,00	17	—0,5	113 000	1,10	16	—0,5	0
11	$NO + O_2 \rightleftarrows N + O + O_2$	4,06	20	—1,5	75 500	1,00	20	—1,5	0
12	$NO + N_2 \rightleftarrows N + O + N_2$	4,06	20	—1,5	75 500	1,00	20	—1,5	0
13	$NO + O \rightleftarrows N + O + O$	8,12	21	—1,5	75 500	2,00	21	—1,5	0
14	$NO + N \rightleftarrows N + O + N$	8,12	21	—1,5	75 500	2,00	21	—1,5	0
15	$NO + NO \rightleftarrows N + O + NO$	8,12	21	—1,5	75 500	2,00	21	—1,5	0
16	$O + N_2 \rightleftarrows NO + N$	5,92	13	0,0	37 500	1,32	13	0	0
17	$O + NO \rightleftarrows N + O_2$	3,20	9	1,0	19 700	9,56	11	0,5	3 700
18	$N + O \rightleftarrows NO^+ + e$	0,65	12	0,0	31 900	1,80	21	—1,5	0
19	$N_2 + O_2 \rightleftarrows NO + NO$	4,56	24	—2,5	64 600	3,40	21	—2,0	43 100
20	$NO^+ + O_2 \rightleftarrows O_2^+ + NO$	4,40	15	0,0	33 650	5,50	14	0	0
21	$NO^+ + NO \rightleftarrows N_2 + O_2^+$	3,20	8	0,0	11 950	6,00	8	0	0
22	$O + O \rightleftarrows O_2^+ + e$	6,00	8	0,50	80 800	5,00	19	—1,0	0
23	$NO^+ + NO \rightleftarrows O_2 + N_2^+$	1,10	11	0,0	51 530	1,80	10	0	0
24	$NO^+ + N_2 \rightleftarrows NO + N_2^+$	3,80	15	0,0	73 230	2,70	14	0	0
25	$N + N \rightleftarrows N_2^+ + e$	8,50	9	1,0	67 700	5,00	18	—0,5	0
26	$O_2^+ + O \rightleftarrows O^+ + O_2$	3,60	12	0,0	16 480	1,20	13	0	0
27	$NO^+ + O \rightleftarrows O^+ + NO$	1,80	13	0,0	50 130	1,20	13	0	0
28	$NO^+ + N \rightleftarrows N_2 + O^+$	6,40	11	0,0	12 180	1,80	12	0	0
29	$N_2^+ + O \rightleftarrows NO + N^+$	1,80	14	0,0	25 760	6,00	13	0	0
30	$O^+ + N \rightleftarrows N^+ + O$	1,33	15	0,0	10 910	3,00	14	0	0
31	$NO + O_2 \leftarrow NO^+ + O_2^-$					1,20	17	0	0
32	$O_2^- + O_2 \rightleftarrows e + O_2 + O_2$	5,418	9	1,5	4 990	1,445	18	0	0
33	$O_2^- + N_2 \rightleftarrows e + O_2 + N_2$	2,528	8	1,5	4 990	3,02	16	0	0
34	$O_2^- + NO \rightleftarrows e + O_2 + NO$	6,00	7	1,5	5 330	1,00	16	0	0
35	$O^- + O \rightleftarrows e + O_2 + O$	6,00	7	1,5	5 330	1,00	16	0	0
36	$O^- + O \leftarrow e + O + O$					3,02	17	0	0
37	$O^- + O_2 \leftarrow e + O + O_2$					1,445	18	0	0
38	$O^- + NO \leftarrow e + O + NO$					3,02	17	0	0
39	$O^- + N_2 \rightleftarrows e + O + N_2$	2,40	11	1,0	16 900	2,00	18	—0,5	0
40	$O_2 + e \leftarrow O^- + O$					8,428	13	0	0
41	$O_2^- + O \rightleftarrows O_2 + O^-$	4,816	13	0,0	0	2,08	12	0,5	16 200
42	$NO + O \leftarrow NO^+ + O^-$					1,20	17	0	0
43	$NO_2 + N \rightleftarrows NO + NO$	4,00	12	0,0	0	1,08	11	0	39 200
44	$NO_2 + O \rightleftarrows NO + O_2$	1,00	13	0,0	292	1,98	14	—0,5	23 600
45	$NO_2 + e \leftarrow O^- + NO$					1,00	14	0	0
46	$NO_2 + O_2 \rightleftarrows NO + O + O_2$	1,57	17	0,0	36 300	1,45	15	0	—970
47	$NO_2 + N_2 \rightleftarrows NO + O + N_2$	1,57	17	0,0	36 300	1,45	15	0	—970
48	$NO_2 + NO_2 \rightleftarrows NO + NO + O_2$	4,07	12	0,0	13 543	7,25	9	0	0

j	Реакции	$k_f = a_f 10^{n_f} T^{l_f} e^{-\frac{C_f}{T}}$				$k_b = a_b 10^{n_b} T^{l_b} e^{-\frac{C_b}{T}}$			
		a_f	n_f	l_f	C_f	a_b	n_b	l_b	C_b
49	$NO_2 + O^- \leftarrow e + O + NO_2$					3,02	17	0	0
50	$O_3 + N_2 \rightleftarrows O + O_2 + N_2$	1,926	15	0,0	12 000	1,27	13	0	—900
51	$O_3 + O_2 \rightleftarrows O + O_2 + O_2$	2,05	15	0,0	12 000	1,486	13	0	—900
52	$O_3 + O_3 \rightleftarrows O + O_2 + O_3$	4,635	15	0,0	12 000	5,436	13	0	—750
53	$NO_2 + O_2 \rightleftarrows O_3 + NO$	6,622	11	0,0	25 100	4,816	11	0	1 200
54	$NO + O_2 \leftarrow O_3 + N$					2,00	10	0	293
55	$O_3 + O \rightleftarrows O_2 + O_2$	8,428	11	0,0	1 500	6,622	12	0	49 600
56	$O_3 + e \leftarrow O_2^- + O$					1,00	14	0	0
57	$N_2O + O \rightleftarrows N_2 + O_2$	6,30	14	0,0	13 437	9,00	11	0,5	53 200
58	$N_2O + O \rightleftarrows NO + NO$	3,63	13	0,0	13 689	2,19	14	0	39 356
59	$N_2O + O \rightleftarrows NO_2 + N$	6,60	15	—1,0	21 100	4,80	12	0	0
60	$NO_2 + N_2 \leftarrow N_2O + NO$					2,512	14	0	25 164
61	$O + NO_2^- \leftarrow O^- + NO_2$					7,20	14	0	0
62	$O_2 + NO_2^- \leftarrow O_2^- + NO_2$					4,316	14	0	0
63	$NO + NO_2 \leftarrow NO^+ + NO_2^-$					1,20	17	0	0
64	$NO_2^- + O_2 \leftarrow O^- + NO + O_2$					1,44	19	0	0
65	$NO_2^- + N_2 \leftarrow O^- + NO + N_2$					7,40	15	0	0
66	$NO_2^- + O \leftarrow O^- + NO + O$					7,40	16	0	0
67	$NO_2^- + NO \leftarrow O^- + NO + NO$					7,40	16	0	0
68	$O_3^- + O_2 \leftarrow e + O_3 + O_2$					1,44	18	0	0
69	$O_3^- + O_2 \leftarrow O_2^- + O + O_2$					5,436	16	0	0
70	$O_2 + O_2 + e \leftarrow O_3^- + O$					8,428	13	0	0
71	$NO_2^- + O_2 \leftarrow O_3^- + NO$					6,00	12	0	0
72	$NO + O_3 \leftarrow NO^+ + O_3^-$					1,20	17	0	0

На рис. 2 представлены распределения мольно-массовых концентраций электронов γ_e в зависимости от координаты x (нормирована на радиус), взятой вдоль поверхности затупленного конуса с радиусом кривизны затупления $R = 15$ см и $\theta = 6°$. Кривая *1* соответствует обтеканию тела при $V_\infty = 4$ км/с на высоте $H = 15$ км, *2* — $V_\infty = 5$ км/с и $H = 30$ км, *3* — $V_\infty = 5$ км/с и $H = 45$ км (результаты [7]). Сравнение проводилось также с данными [2, 4, 6], из чего следует, что предлагаемая методика приводит к хорошему согласию распределений неравновесных параметров вдоль оси сопел и по поверхности затупленных тел с результатами численных расчетов [2—7] при $x < 10$. При бо́льших расстояниях имеется отличие от данных [2—7] в распределениях неравновесных концентраций. Это связано с тем, что при расширении потока происходят его охлаждение и образование отрицательных ионов и трехатомных молекул, поэтому необходимо учитывать более полную систему реакций и компонентов, чем в [2—7].

4. Настоящая методика расчета позволяет определить также распределение неравновесных параметров на внешней границе вязкого следа и начальные условия в следе за моделью в аэробаллистическом эксперименте.

На рис. 3, 4 приведены результаты расчетов неравновесных параметров воздуха на поверхности сферически затупленных моделей с диаметром 0,5 см и в ближнем следе за ними для характерных условий аэробаллистического эксперимента ($T_\infty = 290$ К): *1—9* — соответствуют $V_\infty = 4$ км/с,

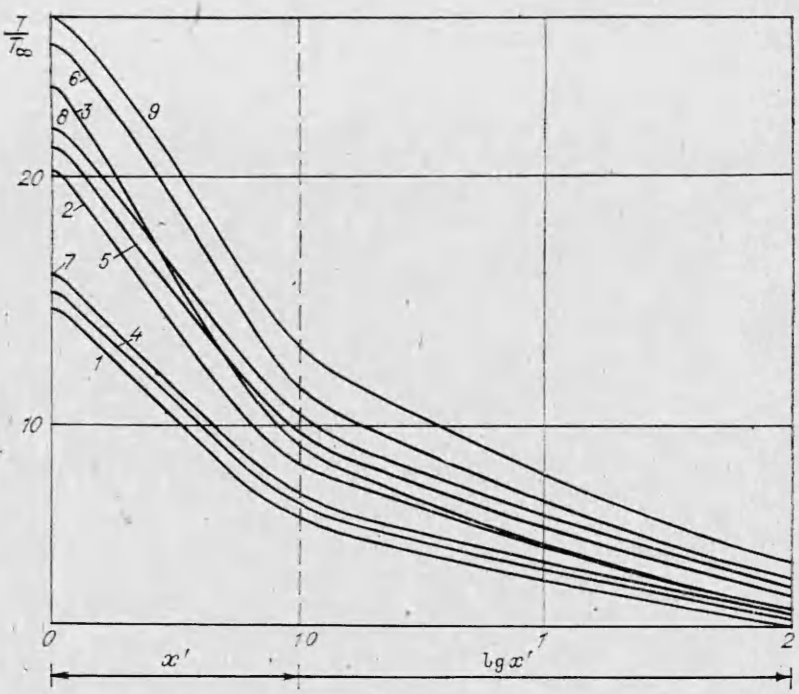

Рис. 3.

$p_\infty = 1{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 5$ км/с, $p_\infty = 1{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 6$ км/с, $p_\infty = 1{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 4$ км/с, $p_\infty = 5{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 5$ км/с, $p_\infty = 5{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 6$ км/с, $p_\infty = 5{,}33\cdot10^3$ Па; $V_\infty = 4$ км/с, $p_\infty = 1{,}07\cdot10^4$ Па; $V_\infty = 5$ км/с, $p_\infty = 1{,}07\cdot10^4$ Па; $V_\infty = 6$ км/с, $p_\infty = 1{,}07\cdot10^4$ Па. Распределение давления вдоль оси симметрии задавалось по формуле (1.5). Координата x' вдоль оси симметрии отсчитывалась от критической точки тела и нормирована на радиус затупления. Численное решение на рис. 3, 4, строго говоря, справедливо только до точки пересечения невязкой трубки тока с границей ядра турбулентного вязкого следа, что составляет несколько десятков калибров диаметра тела. Однако для оценок на рис. 3, 4 результаты даны для бо́льших расстояний.

Наряду с приведенным выше численным решением при некоторых предположениях важно получить простое аналитическое решение для распределения электронной концентрации в трубке тока.

В [1, 9] показано, что при околоравновесном течении можно ввести эффективный постоянный показатель γ_{ef}, который позволяет получить простое решение. При $1{,}5 \leqslant r \leqslant 15$ приближенно представим его в виде следующих зависимостей [16]:

(4.1)
$$v(r) = [\eta(r)\, g(M_*)/\varepsilon_1]^{1/2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\gamma_{ef}-1}{\gamma_{ef}+1},$$

$$T(r) = \frac{\gamma_{ef}+1}{2\gamma_{ef}}\, \varepsilon_1^{\frac{\gamma_{ef}-1}{2}}\, r^{2(1-\gamma_{ef})} g(M_*),$$

$$\rho(r) = \sqrt{\varepsilon_1/[\eta(r)\, g(M_*)]}\, r^{-2},$$

$$p(r) = \frac{1}{2\gamma_{ef}} \left[(\gamma_{ef}^2 - 1)\, \varepsilon_1^{\gamma_{ef}-1} g(M_*)/\eta(r)\right]^{1/2} r^{-2\gamma_{ef}},$$

$$\eta(r) = 1 - \varepsilon_1^{\frac{\gamma_{ef}-1}{2}}\, r^{-2(\gamma_{ef}-1)} \sigma^{-1}(M_*),$$

$$\sigma(M_*) = \left(\varepsilon_1 M_*^2 + 1 - \varepsilon_1\right)^{\frac{\gamma_{ef}+2}{2}} \Big/ M_*^{\gamma_{ef}-1}, \quad g(M_*) = \left(\varepsilon_1 M_*^2 + 1 - \varepsilon_1\right)/M_*^2.$$

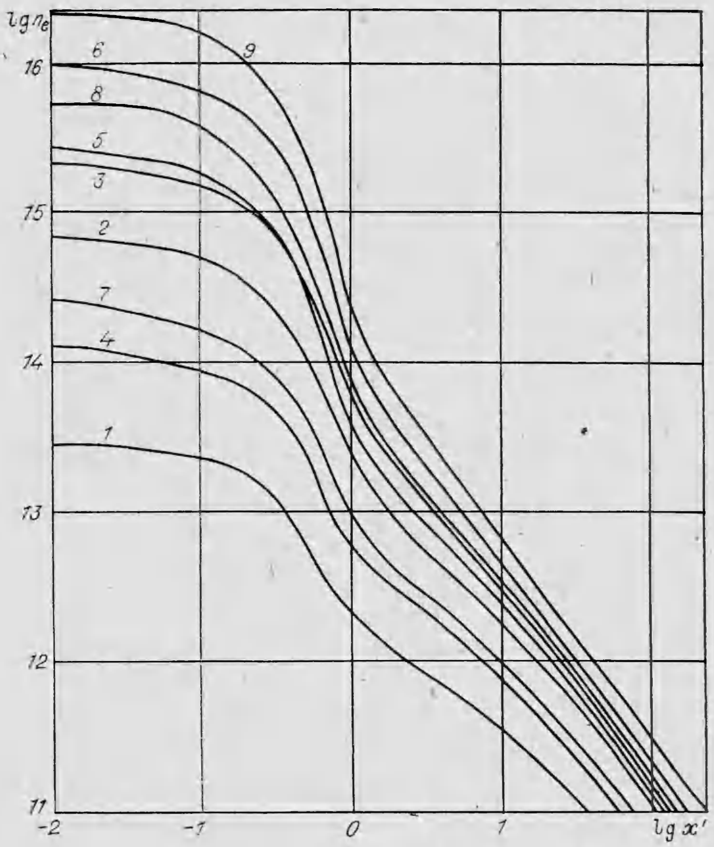

Рис. 4.

Расчет по формулам (4.1) приводит к отличию от точных численных результатов для профилей скорости на 1% и температуры на 8% в диапазоне $1{,}5 \leqslant r \leqslant 15$. Для простоты предположим, что от критической точки тела вдоль трубки тока происходит рекомбинация электронов в реакции $e + NO^+ \rightarrow N + O$. Тогда уравнение для мольно-массовой концентрации γ_e запишем как

$$\text{(4.2)} \qquad \rho v \frac{d\gamma_e}{dx} = -\frac{K_0}{m_*} \frac{\gamma_e^2 \rho^2}{T^{3/2}}, \quad \gamma_e(x = 0) = \gamma_{e*},$$

где m_* — молекулярный вес; $K_0 = 1{,}8 \cdot 10^{21}$ см^3 К$^{3/2}$/(моль·с); $n_{e*} = \gamma_{e*} p_* / kT_*$; звездочкой отмечены параметры в точке торможения.

Введем безразмерные параметры:

$$\text{(4.3)} \qquad \bar{v} = v/v_*, \ \bar{\rho} = \rho/\rho_*, \ \bar{x} = x/R, \ \bar{T} = T/T_*.$$

В уравнении (4.2) перейдем к координате r (черточки опускаем):

$$\text{(4.4)} \qquad v \frac{d\gamma_e}{dr} = -\frac{K_0}{m_*} \frac{\gamma_e^2 \rho(r) f(r)}{[T(r)]^{3/2}}, \quad f = \frac{dx}{dr}, \quad \gamma_e(r = 1) = \gamma_{e*}.$$

Решение уравнения (4.4) приводится к виду

$$\text{(4.5)} \qquad \frac{\gamma_e(r)}{\gamma_{e*}} = \left\{ 1 + \frac{K_0}{m_*} \frac{\gamma_{e*} \rho_* R}{v_* T_*^{3/2}} F(r) \right\}^{-1}, \quad F(r) = \int\limits_1^r \frac{\rho(r) f(r)\, dr}{v(r) [T(r)]^{3/2}}.$$

Соответствие между x и r устанавливается с помощью соотношения [9]

$$r^2 = \left\{ [p(x)]^{1/\gamma_{ef}} \sqrt{1 + \lambda_* - \lambda_* [p(x)]^{\frac{\gamma_{ef} - 1}{\gamma_{ef}}}} \right\}^{-1}, \quad \lambda_* = \frac{2}{(\gamma_{ef} - 1) M_*^2}.$$

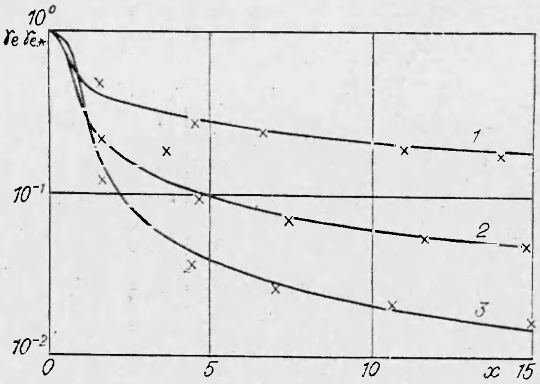

Рис. 5.

Используя (4.1), при $r \geqslant 2{,}5$ $(x \geqslant 1{,}6)$ получаем

$$F(r) = A(\gamma_{ef}) + B(\gamma_{ef})\, I(r),\quad I(r) = \frac{t}{y}\left(1 + \frac{2t^2}{3y^2} + \frac{t^4}{5y^4}\right), \tag{4.6}$$

$$y = r^{1-\gamma_{ef}},\quad t = \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$a^2 = \varepsilon_1^{\frac{1-\gamma_{ef}}{2}}\, \sigma(\mathrm{M}_*).$$

При обтекании сферически затупленной модели сравнение с точными расчетами для $\gamma_{ef} \approx 1{,}2$ дало $A = -0{,}806$, $B = 0{,}642$.

Результаты точных расчетов $\gamma_e(x)$ по сравнению с расчетами по формулам (4.5) и (4.6) при $x' \sim 1$ могут отличаться в несколько раз. Это отличие связано с использованием в аналитическом решении (4.5) только одной реакции рекомбинации, в то время как в действительности на электронную концентрацию влияет бо́льшее число реакций с заряженными частицами. Поэтому в рамках одной основной модельной реакции рекомбинации введем эффективное значение константы скорости реакции K_{0ef}, которое учитывает влияние остальных (неучтенных) реакций. Сопоставление с точными расчетами при $10 \leqslant \mathrm{M}_\infty \leqslant 20$ и $1{,}33 \cdot 10^3$ Па $\leqslant p_\infty \leqslant 1{,}33 \cdot 10^4$ Па дает

$$K_{0ef} = (-0{,}86M_\infty + 26{,}58)(-0{,}005p_\infty + 1{,}17)\cdot 10^{20}\ \text{см}^3\, K^{3/2}/(\text{моль}\cdot\text{с}).$$

На рис. 5 построена зависимость $\gamma_e(x)/\gamma_{e*}$ для сферы $R = 0{,}25$ см, где *1* — численные результаты при $\mathrm{M}_\infty = 11{,}7$ и $p_\infty = 1{,}07 \cdot 10^4$ Па, *2* — $\mathrm{M}_\infty = 14{,}7$ и $p_\infty = 5{,}33 \cdot 10^3$ Па, *3* — $\mathrm{M}_\infty = 17{,}6$ и $p_\infty = 1{,}07 \cdot 10^4$ Па. Там же для сравнения крестиками нанесены результаты расчетов по формулам (4.5) и (4.6), видно хорошее совпадение.

5. Рассмотрим более подробно постановку новых вариационных задач неравновесной аэродинамики. При движении моделей с гиперзвуковыми скоростями в ударном слое и следе за телом образуются сильно возбужденные квантовые состояния атомов, молекул, а также заряженные частицы. Наличие заряженных частиц (в основном электронов) и излучающих компонентов позволяет проводить СВЧ-диагностику и оптические измерения в газовом потоке около летящей модели в аэробаллистическом эксперименте. Интегральная интенсивность оптических или СВЧ-сигналов при регистрации определяется режимом течения, геометрическими размерами и формой тела. В связи с этим поставим задачу: найти форму тела из условия, чтобы некоторый функционал J, зависящий от какой-либо концентрации, был минимальным при различных изопериметрических условиях.

Пусть начало координат располагается в критической точке осесимметричного тела, ось OX направлена вдоль его оси симметрии, ось OY — перпендикулярно оси OX. Уравнение, описывающее форму тела в этих координатах: $y = y(x)$, причем $y(0) = 0$.

В качестве функционалов J, зависящих от формы осесимметричного тела $y = y(x)$, в разных задачах могут быть выбраны следующие:

$$J = c_i(x = L), \tag{5.1}$$

где c_i — массовая концентрация i-го компонента, определяющая рассматриваемый процесс; L — длина тела (функционал (5.1) зависит от формы тела сложным образом через распределение давления по его поверхности);

$$J = 2\pi \int_0^{\Delta_s(L)} \rho u c_i y\, dz, \tag{5.2}$$

где J выражает поток i-го компонента через ударный слой толщины Δ_s; ρ, u — плотность и скорость газа; z — координата по нормали к поверхности тела (выражение (5.2) определяет решение уравнений, описывающих течение в вязком турбулентном следе);

$$J = S_1^{-1} \int_{S_1} c_i ds. \tag{5.3}$$

Здесь ds — элемент боковой поверхности тела; S_1 — площадь лобовой части тела; J выражает среднее значение i-й концентрации по поверхности тела. Решения вариационных задач о теле с минимальным значением одного из функционалов (5.1) — (5.3) получаются при различных комбинациях длины, радиусов носка и миделя, объема и боковой поверхности тела на основе разработанной выше методики совместно с методом локальных вариаций.

Определение оптимальных форм тел в указанном смысле позволит уменьшить (или увеличить) интенсивность излучения и количество заряженных частиц около моделей и в следах за ними, что важно при регистрации физических процессов в аэробаллистических экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю.** Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.
2. **Мартин Дж.** Вход в атмосферу. М.: Мир, 1969.
3. **Lordi J. A., Mates R. E.** Nonequilibrium effects of high-enthalpy expansions of air.— AIAA J., 1965, v. 3, N 10.
4. **Скурин Л. И.** К вопросу о моделировании воздушной плазмы на баллистической трассе в смеси воздуха с тяжелым газом.— ЖТФ, 1980, т. 50, вып. 4.
5. **Камзолов В. Н., Пирумов У. Г.** Расчет неравновесных течений в соплах.— Изв АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
6. **Стулов В. П., Шкадова В. П.** Об одномерном неравновесном течении воздуха.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2.
7. **Саяпин Г. Н.** Неравновесные концентрации электронов на поверхности тонких затупленных конусов при обтекании сверхзвуковым потоком воздуха.— Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1656.
8. **Spurk I. H., Gerber M., Sedney R.** Characteristic calculation of flowfields with chemical reactions.— AIAA J., 1966, v. 4, N 1.
9. **Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г.** Неравновесное течение воздуха из сверхзвукового сферического источника.— В кн.: Гиперзвуковые течения при обтекании тел и в следах/Под ред. Г. Г. Черного, Г. А. Тирского. М.: Изд-во МГУ, 1983.
10. **Дьяконов Ю. П., Пчелкина Л. В., Сандомирская И. Д.** Сверхзвуковое обтекание затупленных тел. М.: Изд-во МГУ, 1971.
11. **Лунев В. В.** Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
12. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
13. **Lin S. C., Hayes T. E.** A quasi-one-dimensional treatment of chemical reactions in turbulent wakes of hypersonic objects.— AIAA J., 1964, v. 2, N 7.
14. **Sang-Wook Kang.** Nonequilibrium, ionized, hypersonic flow over a blunt body at low Reynolds number.— AIAA J., 1970, v. 8, N 7.
15. **Глушко В. П., Гурвич Л. В. и др.** Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М.: Наука, 1978.
16. **Еремейцев И. Г., Пилюгин Н. Н.** Трение и теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях при неравномерном сверхзвуковом обтекании осесимметричных тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2.

Поступила 15/II 1985 г.