ПМТФ, № 6, 1969

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК ЭЛЕКТРОННОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ ЧАСТОТЫ В ПЛАЗМЕ С ПУЧКОМ

М. А. Лившиц

(Москва)

Рассматривается нелинейное возбуждение высших гармоник электронной циклотронной частоты для волн, распространяющихся перпендикулярно к внешнему однородному магнитному полю, в максвелловской плазме при прохождении через нее электронного пучка малой плотности. Показано, что нелинейный механизм возбуждения приводит к возможности генерации циклотронных гармоник при параметрах плазмы, при которых с точки зрения линейной теории генерация отсутствует. Вычислены нелинейные инкременты генерации циклотронных гармоник при нелинейном рассеянии продольных высокочастотных волн, возбуждаемых в плазме пучком, на электронах пучка и плазмы.

Исследование распространения гармоник электронной гирочастоты представляет интерес, прежде всего, для циклотронного нагрева плазмы, излучения циклотронных гармоник неравновесной плазмой, взаимодействия их с другими типами волн. Из-за отсутствия затухания Ландау для таких волн при их распространении перпендикулярно к внешнему магнитному полю энергия, заключенная в таких волнах, может быть весьма большой, и важное значение приобретают всевозможные нелинейные взаимодействия с участием этих волн. Поэтому следует рассмотреть возможности как линейного, так и нелинейного возбуждения таких волн. В работе [1] рассматривалась нелинейная генерация электронных циклотронных гармоник в плазме с током; там же приведены ссылки на экспериментальные работы. С другой стороны, генерация гармоник электронной гирочастоты наблюдалась в плазме при пропускании через нее электронного пучка малой плотности (например, [2]). В данной работе рассматривается возможный нелинейный механизм такой генерации. Развиваемый в ряде работ (например, [3–5]) линейный механизм возбуждения таких волн приводит к ограничениям на параметры пучка и плазмы. В работах [3, 4] рассматривается возбуждение квазипродольных электронных циклотронных волн в предположении, что функция распределения электронов по скоростям имеет вид

$$f(v_\perp, v_\parallel) = \frac{n_1}{2\pi v_{0\perp}}\,\delta(v_\perp - v_{0\perp})\,\delta(v_\parallel - v_{0\parallel})$$

а в работе [5] наряду с распределением в виде δ-функции имеется фон электронов с максвелловской функцией распределения.

Существенным для возможности генерации является отличие функции распределения по поперечным скоростям от максвелловской; увеличение разброса поперечных скоростей приводит к стабилизации [4]. Во всех случаях имеется нижний порог генерации $\omega_L / \Omega > 1$ ($\omega_L = (4\pi e^2 n / m_e)^{1/2}$ — электронная ленгмюровская частота, $\Omega = |e| H / m_e c$ — электронная циклотронная частота), зависящий от номера циклотронной гармоники, а также при наличии максвелловских электронов (будем называть их собственно плазмой в отличие от пучка с δ-функцией распределения) от отношения плотностей и характерных скоростей пучка и плазмы [5]. Для каждого значения $q = \omega_L / \Omega$ выше порога имеются диапазоны значений $\lambda = k_1 v_{0\perp} / \Omega$ (где k_1 — волновое число электронной циклотронной волны), в которых генерации нет (в частности, во всех случаях генерация отсутствует при $\lambda < 1$). Рассматриваемый ниже нелинейный механизм возбуждения приводит к возможности генерации как квазипродольных, так и обыкновенных и необыкновенных электронных циклотронных волн при рассеянии на электронах плазмы и пучка квазипродольных высокочастотных волн, возбуждаемых в плазме в магнитном поле пучком электронов малой плотности $n_1 \ll n_0$ (n_1 — плотность пучка, n_0 — плотность плазмы), скорость которого превышает v_F фазовую скорость этих волн [6, 7]. Эта генерация имеет место даже для максвелловского распределения поперечных скоростей пучка при соответствующих продольных скоростях пучка. Генерация может иметь место как в плотной $q \gg 1$, так и в неплотной $q \ll 1$ плазме. Диапазоны значений параметра $\mu_1 = (k_1 v_e / \Omega)^2$ определяются близостью генерируемой частоты ω_f к гармоникам электронной гирочастоты $\nu_0\Omega$.

1. **Основные уравнения.** Пусть электроны плазмы и пучка характеризуются максвелловскими распределениями

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2} v_e^3} \exp\frac{-\mathbf{v}^2}{2v_e^2}, \qquad f_{01}(\mathbf{v}) = \frac{n_1}{(2\pi)^{3/2} u_e^3} \exp\frac{-(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)^2}{2u_e^2} \tag{1.1}$$

Здесь n_0, v_e — плотность и средняя тепловая скорость электронов плазмы, n_1, u_e — те же величины для пучка, v_0 — средняя направленная скорость пучка, H_0 — внешнее постоянное и однородное магнитное поле. Будем считать $n_1 \ll n_0$, а $\mathbf{v}_0 \parallel H_0$.

При достаточно большой скорости пучка ($v_0 > v_F$) в плазме возбуждаются высокочастотные продольные колебания с частотами [6]

$$\omega_\pm^2(\theta) = {}^1/_2(\omega_L^2 + \Omega^2) \pm {}^1/_2 \sqrt{(\omega_L^2+\Omega^2)^2 - 4\omega_L^2\Omega^2\cos^2\theta} \tag{1.2}$$

Здесь θ — угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и магнитным полем H_0. При выводе (1.2) плазма предполагалась холодной, т. е. выполнены условия

$$\mu = \frac{k_\perp^2 v_e^2}{\Omega^2} \gg 1, \qquad \beta_n = \frac{\omega - n\Omega}{|k_z| v_e} \gg 1 \tag{1.3}$$

В предельных случаях плазмы очень большой и очень малой плотности ($q \gg 1$, $q \ll 1$) из (1.2) имеем

$$\omega_+ \approx \omega_L(1 + {}^1/_2 q^2 \sin^2\theta), \quad \omega_- \approx \Omega \operatorname{sos}\theta \ (q \gg 1) \tag{1.4}$$

$$\omega_+ \approx \Omega\,(1 + q^2/2 \sin^2\theta), \quad \omega_- \approx \omega_L \cos\theta \ (q \ll 1) \tag{1.5}$$

Формулы для ω_+ справедливы с точностью до членов порядка m_e / m_i для любых углов θ, формулы для ω_- — при условии

$$|1/2\,\pi - \theta| \gg (m_e / m_i)^{1/2} \tag{1.6}$$

Кроме того, так как ω_+ или $\omega_- \to \Omega$ при $\theta \to 0$, то должно выполняться условие

$$\frac{kv_e}{\Omega} \ll \frac{q^2}{2|1-q^2|}\theta^2$$

Нелинейное уравнение, описывающее процесс индуцированного рассеяния на электронах плазмы и пучка, может быть получено из полуквантовых соображений баланса [8]

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_1}^{\sigma'}}{\partial t} = -\sum_{\nu\alpha} \int w_\nu^{\sigma\sigma'\alpha}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) N_{\mathbf{k}}^\sigma N_{\mathbf{k}_1}^{\sigma'} \left(k_{2z}\frac{\partial f_p}{\partial p_z} + \frac{\nu\Omega}{v_\perp}\frac{\partial f_p}{\partial p_\perp}\right) d\mathbf{p}\, d\mathbf{k} \tag{1.7}$$

Здесь $N_{\mathbf{k}}^\sigma$ число квантов сорта σ, $w_\nu^{\sigma\sigma'\alpha}$ — вероятность рассеяния волны σ с импульсом $\mathbf{k}$ на частице α с импульсом $\mathbf{p}_\alpha$ с превращением в волну σ' с импульсом $\mathbf{k}_1$. В вероятность рассеяния вносят вклад как электроны плазмы, так и электроны пучка, однако вклад последних порядка $n_1 / n_0 \ll \ll 1$ от вклада электронов плазмы, поэтому в дальнейшем им пренебрегаем. Однако f_p — суммарная функция распределения электронов пучка и плазмы. Выражение для вероятности рассеяния имеет вид

$$w_\nu^{\sigma\sigma'\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = 2(2\pi)^6 \omega_1^2(k_1)\,\delta(\omega_2 - k_{2z}v_z - \nu\Omega_\alpha) \times$$
$$\times \left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon^\sigma\right|^{-1}_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon^{\sigma'}\right|^{-1}_{\omega=\omega_1(\mathbf{k}_1)} |a_i^*(\mathbf{k})\,\Lambda_{ij}(k, k_1)\,a_j(\mathbf{k}_1)|^2 \tag{1.8}$$

$$\omega_2 = \omega - \omega_1, \qquad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \qquad k = \{\mathbf{k}, \omega\}$$

$$\Lambda_{ij}(k, k_1) = \Lambda_{ij}^{(1)}(k, k_1) + \Lambda_{ij}^{(2)}(k, k_1)$$

$$\varepsilon^\sigma(k) = a_i(\mathbf{k})\,\varepsilon_{ij}(k)\,a_j(\mathbf{k}) + (\mathbf{k}\mathbf{a}(\mathbf{k}))(\mathbf{k}\mathbf{a}^*(\mathbf{k}))\,c^2\omega^{-2} \tag{1.9}$$

$$\Lambda_{ij}(k, k_1) = [S_{ijs}(k, k_1, k_2) + S_{isj}(k, k_2, k_1)]E_s(k_2) \tag{1.10}$$
$$E_s(k_2) = \Pi_{sl}(k_2) f_l(k_2)$$

Здесь $\mathbf{a}(\mathbf{k}^\sigma)$ — единичный вектор поляризации волны σ, e_α и Ω_α — заряд и циклотронная частота частицы сорта α, тензор $\Lambda_{ij}^{(1)}(k, k_1)$ связан с колебаниями частицы в поле волн (комптоновское рассеяние), а $\Lambda_{ij}^{(2)}(k, k_1)$ связан с рассеянием падающей волны на облаке экранирующего заряда (собственно нелинейное рассеяние). Компоненты тензора $S_{ijs}(k, k_1, k_2)$ находятся из выражений для нелинейного тока в плазме в магнитном поле]9], причем вклад ионов в них порядка m_e/m_i от вклада электронов, и им можно пренебречь; $\Pi_{sl}(k_2)$ — обратный максвелловский оператор для волны k_2. Ток $j(k_2)$ определяется невозмущенным движением рассеивающей частицы в магнитном поле

$$j_l(k) = \sum_{\nu\alpha} \frac{e_\alpha}{(2\pi)^3} \delta(\omega - k_z v_z - \nu\Omega) \exp(-i\nu\varphi) \Gamma_l \tag{1.11}$$

$$\Gamma_x = \frac{v_\perp}{2} [J_{\nu+1}(k_\perp r_\alpha) e^{-i\varphi} + J_{\nu-1}(k_\perp r_\alpha) e^{i\varphi}]$$

$$\Gamma_y = \frac{iv_\perp}{2} [J_{\nu-1}(k_\perp r_\alpha) e^{i\varphi} - J_{\nu+1}(k_\perp r_\alpha) e^{-i\varphi}]$$

$$\Gamma_z = v_z J_\nu(k_\perp r_\alpha), \qquad r_\alpha = v_\perp / \Omega_\alpha, \qquad \sin\varphi = k_y / k_\perp$$

Выражения для $\Lambda_{ij}^{(1)}$ приведены в [9].

В рассматриваемой задаче некоторые выражения можно упростить. Во-первых, коэффициенты S_{ijs} в квадратичном члене разложения нелинейного тока по амплитудам взаимодействующих волн, через которые выражается вероятность рассеяния, можно разложить в ряд по $\mu \ll 1$ и $\beta_n^{-1} \ll 1$, так как именно в этом приближении (приближение холодной плазмы) и получены выражения (1.2) для частот продольных высокочастотных колебаний в магнитном поле. Указанное разложение в ряды в выражениях для S_{ijs} соответствует разложению в ряд по $\mathbf{kv} / \omega$ в кинетическом уравнении для электронной функции распределения второго приближения, из которого и получены выражения S_{ijs}. Приближенные выражения для нелинейных токов имеют вид

$$S_{1jl}^{(e)} = -\frac{|e|\omega}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\varepsilon_{sl}^{(e)}(k_2) - \delta_{sl}}{4\pi m_e} \left\{k_{2s}\left(\delta_{j1} - i\frac{\Omega}{\omega}\delta_{j2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_2}{\omega_1}\left[\delta_{js}\left(k_{1x} - i\frac{\Omega}{\omega}k_{1y}\right) - k_{1s}\left(\delta_{j1} - i\frac{\Omega}{\omega}\delta_{j2}\right)\right]\right\}$$

$$S_{2jl}^{(e)} = -\frac{|e|\omega}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\varepsilon_{sl}^{(e)}(k_2) - \delta_{sl}}{4\pi m_e} \left\{k_{2s}\left(\delta_{j2} + i\frac{\Omega}{\omega}\delta_{j1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_2}{\omega_1}\left[\delta_{js}\left(k_{1y} + i\frac{\Omega}{\omega}k_{1x}\right) - k_{1s}\left(\delta_{j2} + i\frac{\Omega}{\omega}\delta_{j1}\right)\right]\right\}$$

$$S_{3jl}^{(e)} = -\frac{|e|}{\omega} \frac{\varepsilon_{sl}^{(e)}(k_2) - \delta_{sl}}{4\pi m_e} \left\{k_{2s}\delta_{j3} + \frac{\omega_2}{\omega_1}(k_{1z}\delta_{js} + k_{1s}\delta_{j3})\right\} \tag{1.12}$$

Во-вторых, можно упростить выражения для тензора $\varepsilon_{ij}^{(e)}(k_2)$, где $k_2 = \{\mathbf{k}_2, \omega_2\}$ — виртуальная волна. В самом деле, $\omega_2 = \omega - \omega_1$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ (ω, $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор продольной высокочастотной волны, ω_1, $\mathbf{k}_1$ — частота и волновой вектор электронной циклотронной волны $\omega_1 \approx \nu_0\Omega$). Поскольку отсутствие поглощения электронных циклотронных волн на тепловых частицах в плазме связано с перпендикулярностью их распространения по отношению к направлению внешнего магнитного поля (которое выбрано за ось z), то для виртуальной волны $k_{2z} =$

$= k_z$. Поэтому в выражениях для $\varepsilon_{ij}^{(e)}(k_2)$ можно осуществить разложение по параметру

$$\frac{\omega_2 - n\Omega}{|k_{2z}|v_e} = \frac{\omega - \omega_1 - n\Omega}{|k_z|v_e} = \frac{\omega - (n+\nu_0)\Omega}{|k_z|v_e} \gg 1 \qquad (1.13)$$

в силу (1.3) (наличие малой поправки $\Delta = \omega_1 - \nu_0\Omega$, $\Delta \ll \Omega$ не меняет сути дела). В этом приближении тензор $\varepsilon_{ij}(k_2)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ имеет вид

$$\varepsilon_{11} = 1 - \sum_n B_n(\omega_2)\left[\frac{n^2 A_n(\mu_2)}{\mu_2} - 2\mu_2 A_n'(\mu_2)\sin^2\varphi_2\right] \qquad (1.14)$$

$$\varepsilon_{22} = 1 - \sum_n B_n(\omega_2)\left[\frac{n^2 A_n(\mu_2)}{\mu_2} - 2\mu_2 A_n'(\mu_2)\cos^2\varphi_2\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}^* = ig = \sum_n iB_n(\omega_2)\,A_n'(\mu_2)(n + 2i\mu_2\sin\varphi_2\cos\varphi_2)$$

$$\varepsilon_{33} = 1 - \sum_n B_n(\omega_2)\,A_n(\mu_2), \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

$$A_n(\mu_2) = \exp(-\mu_2)\,I_n(\mu_2), \quad A_n' = \frac{dA_n}{d\mu_2}, \quad \mu_2 = \frac{k_{2\perp}^2 v_e^2}{\Omega^2},$$

$$B_n = \frac{\omega_L^2}{\omega_2(\omega_2 - n\Omega)}$$

Здесь $I_n(\mu_2)$ — модифицированная функция Бесселя.

Отметим, что разложение по параметру μ_2 возможно не всегда, так как хотя для продольных волн $\mu \ll 1$, однако для электронных циклотронных волн в общем случае $\mu_1 < 1$, $\mu_1 > 1$.

Выражение для обратного максвелловского оператора, описывающего виртуальную волну k_2, в приближении $\omega_2 - n\Omega \gg |k_{2z}|v_e$ имеет вид

$$\Pi_{ij} = -\frac{4\pi i}{\omega_2}\frac{T_{ij}}{D} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (1.15)$$

$$D = N_2^4[\varepsilon_{33}x^2 + (\varepsilon_{11}t^2 + \varepsilon_{22}(1-t^2))(1-x^2)] - N_2^2\{(1-x^2)[\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - g^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}(1-t^2) - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}t^2] + (\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\varepsilon_{33}\} + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - g^2)\varepsilon_{33}$$

$$T_{11} = N_2^4(1-x^2)t^2 - N_2^2\{\varepsilon_{22}(1-x^2) + \varepsilon_{33}[1-(1-x^2)(1-t^2)]\} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}$$

$$T_{12} = T_{21}^* = N_2^4(1-x^2)t\sqrt{1-t^2} - N_2^2\{\varepsilon_{33}(1-x^2)t\sqrt{1-t^2} - ig \times (1-x^2)\} - ig\varepsilon_{33}$$

$$T_{13} = T_{31}^* = N_2^2 x\sqrt{1-x^2}\,[N_2^2 t + ig\sqrt{1-t^2} - \varepsilon_{22}t]$$

$$T_{22} = N_2^4(1-x^2)(1-t^2) - N_2^2\{\varepsilon_{11}(1-x^2) + \varepsilon_{33}[1-(1-x^2)t^2]\} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}$$

$$T_{23} = T_{32}^* = N_2^2 x\sqrt{1-x^2}[N_2^2\sqrt{1-t^2} - \varepsilon_{11}\sqrt{1-t^2} - igt]$$

$$T_{33} = N_2^4x^2 - N_2^2\{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - (1-x^2)[\varepsilon_{11}(1-t^2) + \varepsilon_{22}t^2]\} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - g^2 \qquad (1.16)$$

Здесь

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mn}(k_2), \quad N_2^2 = k_2^2c^2/\omega_2^2, \; x^2 = k_{2z}^2/k_2^2, \quad t^2 = k_{2x}^2/k_{2\perp}^2 = \cos^2\varphi_2.$$

Далее будет рассмотрено возбуждение обыкновенных и квазипродольных циклотронных волн при нелинейном рассеянии волн (1.4) (1.5) на электронах пучка и плазмы.

2. Возбуждение обыкновенных электронных циклотронных волн. Дисперсионное уравнение обыкновенных циклотронных волн имеет вид (направление волнового вектора $\mathbf{k}_1$ выбрано за ось x)

$$n_1^2 = \varepsilon_{33}(k_1) = 1 - \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega_1^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l(\mu_{1\alpha}) \frac{\omega_1}{\omega_1 - l\Omega_\alpha}, \qquad n_1^2 = \frac{k_1^2 c^2}{\omega_1^2} \tag{2.1}$$

Для частоты ω_1, близкой к $\nu_0\Omega$, имеем (движением ионов можно пренебречь)

$$\frac{\omega_1 - \nu_0\Omega}{\nu_0\Omega} \approx -\frac{\varkappa}{\mu_1} A_{\nu_0}(\mu_1), \qquad \varkappa = q^2 \frac{v_e^2}{c^2} \approx \frac{P_e}{P_H} \tag{2.2}$$

где $\varkappa$ — отношение газокинетического и магнитного давлений.

$$\left|\frac{\omega_1 - l\Omega}{\omega_1}\right| \gg \frac{v_e^2}{c^2} \qquad (l\text{ — целое число}) \tag{2.3}$$

приводит к тому [1], что распространение обыкновенных циклотронных волн возможно лишь в плотной плазме $q \gg 1$. Ниже приводятся результаты расчетов нелинейных инкрементов возбуждения этих волн при рассеянии высокочастотных продольных волн с частотами $\omega = \omega_+$ (1.4) на электронах плазмы и пучка.

Рассмотрим два случая.

1. *Длинные волны*, $\mu_1 \ll 1$. Из (2.3) следует $\omega_L \gg \nu_0\Omega$. При этом $\mu_2 \ll 1$, так как $\mu \ll 1$, и не равные нулю компоненты тензора $\varepsilon_{ij}^{(e)}(k_2)$ имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_2^2 - \Omega^2}, \quad \varepsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_2^2}, \quad g = \frac{\omega_L^2\Omega}{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega^2)} \tag{2.4}$$

Оценка обратного максвелловского оператора показывает, что в этом случае рассеяние происходит в основном через виртуальную продольную волну. Условием этого будет неравенство $N_2^2 \gg N_{2+}^2, N_{2-}^2$, где N_{2+}^2, N_{2-}^2 — корни уравнения $D = 0$. При оценке были использованы условия $n^2 = (kc/\omega)^2 \gg 1$ (условие квазипродольности волн k) и $n_1^2 = (k_1 c/\omega_1)^2 \gg 1$ следует из (2.1)). Обратный максвелловский оператор приобретает вид

$$\Pi_{ij}(k_2) = -\frac{4\pi i}{\omega_2} \frac{k_{2i}k_{2j}}{k_2^2 \varepsilon^l(k_2)} \qquad \left(\varepsilon^l(k_2) = \frac{k_{2i}k_{2j}}{k_2^2} \varepsilon_{ij}(k_2)\right) \tag{2.5}$$

При нелинейном рассеянии волны с частотой $\omega = \omega_+$ получаем, используя (1.10) — (1.12), (2.4), (2.5) с учетом $\omega_L \gg \nu_0\Omega$

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) = a_i^*(\mathbf{k}) \Lambda_{ij}^{(2)}(k, k_1) a_j(\mathbf{k}_1) = \tag{2.6}$$

$$= -\frac{ie^2\omega_L^2}{2(2\pi)^3 m_e \nu_0^2 \Omega^2} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \cos\theta \sum_\nu \delta(\omega_2 - k_{2z}v_z - \nu\Omega) J_\nu(k_{2\perp}r) \exp i\nu\varphi_2$$

Комптоновское рассеяние определяется выражением

$$\Lambda^{(1)}(k, k_1) = a_i^*(\mathbf{k}) \Lambda_{ij}^{(1)}(k, k_1) a_j(\mathbf{k}_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{ie^2}{m_e k} \frac{\omega}{\omega_1} \times \tag{2.7}$$

$$\times \sum_\nu \delta(\omega_2 - k_{2z}v_z + \nu\Omega) \left[\frac{k_1 v_z}{(\omega_1 - \nu\Omega)^2 - \Omega^2} \left(k_x + ik_y \frac{\Omega}{\omega_1 - \nu\Omega}\right) + \frac{k_z}{\omega_1 - \nu\Omega}\right] J_\nu(k_1 r)$$

При

$$\frac{\nu_0\Omega}{\omega_1 - \nu_0\Omega} \gg \frac{k_1^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2}, \qquad \frac{k_z^2 u_e^2}{\nu_0^2\Omega^2} \gg 1,$$

---

[1] Более подробно об этом см. дисс. К. Н. Степанова, Харьковск. гос. ун-т, 1965.

комптоновское рассеяние является преобладающим. Вероятность рассеяния имеет вид (оставлен резонансный член в $\Lambda^{(1)}$)

$$w^{\sigma\sigma'e} = \frac{e^4}{2m_e^2k^2}\frac{J^2_{\nu_0}(k_1r)}{A_{\nu_0}(\mu_1)}\delta(\omega - k_zv_z)\frac{\omega_L}{\omega_1\Omega^2}k_\perp^2\sin^2\theta \quad \left(\frac{k}{k_1} \ll q\right) \tag{2.8}$$

Нелинейный инкремент возбуждения обыкновенных электронных циклотронных волн дается формулой

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^4}{m_e^3\omega_1}\frac{k_1^2}{\Omega^2}\int N_{\mathbf{k}}d\mathbf{k}\frac{\omega}{k^2|k_z|}\sin^2\theta\left\{\frac{\omega_2 n_0}{v_e^3}\exp\frac{-\beta_0^2}{2} + \right. \tag{2.9}$$

$$\left. + \frac{\omega_2 - k_zv_0}{u_e^3}n_1\frac{A_{\nu_0}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)}\exp\frac{-(\omega - k_zv_0)^2}{2k_z^2u_e^2}\right\} \quad \left(\mu_1' = \frac{k_1^2u_e^2}{\Omega^2}\right)$$

Первое слагаемое связано с рассеянием на электронах плазмы; оно экспоненциально мало. Второе слагаемое связано с рассеянием на электронах пучка. Условием раскачки будет наличие продольных k-волн с отрицательной проекцией k_z; в противном случае пучок вносит дополнительное затухание (до начала перекачки продольных волн в сторону меньших k), так как

$$k_zv_0 > \omega_2 \tag{2.10}$$

Это следует из условия [6] возбуждения пучком квазипродольных колебаний $k_z v_0 > \omega$. Однако раскачка волнами с отрицательными k_z экспоненциально мала, так как направленная скорость пучка $v_0 > u_e$ (без учета увеличения u_e при квазилинейной релаксации). Раскачка циклотронных волн возможна также продольными волнами с $k_zv_0 < \omega_2$ после спектральной перекачки первоначально возбужденных волн с $k_zv_0 > \omega$ в сторону меньших k. Это имеет место только при рассеянии с уменьшением частоты, когда $\omega > \omega_1$. Оценка максимального инкремента генерации имеет вид

$$\gamma_{\mathbf{k}_1\max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{8}\frac{W^l}{n_0T_e'}\frac{n_1}{n_0}\frac{A_{\nu_0}(\mu'_1)}{A_{\nu_0}(\mu_1)}\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 q^2\frac{\omega_L^2}{\nu_0\Omega}$$

$$\left(T_e' = m_eu_e^2, \quad W^l = \int\omega N_{\mathbf{k}}\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\right) \tag{2.11}$$

при $k_z^2u_e^2 \gg \nu_0^2\Omega^2$, $\omega_2 - k_zv_0 \approx \omega - k_zv_0 \approx k_zu_e$

Здесь W^l — полная энергия k-волн. Если же у всех квазипродольных волн, возбуждаемых пучком, $(k_zu_e / \omega_1)^2 \ll 1$, то инкремент $\gamma_{\mathbf{k}_1}$ при учете только резонансного члена в (2.7) экспоненциально мал

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \sim \frac{k_zu_e}{\omega_1}\exp\frac{-\omega_1^2}{2k_z^2u_e^2}\gamma_{\mathbf{k}_1\max}$$

При учете остальных слагаемых в (2.6), (2.7) $\gamma_{\mathbf{k}_1} \sim (\omega_1 - \nu_0\Omega)^2\omega_1^{-2}\nu_0^{-4}$ от (2.11).

Рассмотрим теперь возбуждение обыкновенной циклотронной волны при рассеянии продольной волны с частотой $\omega = \omega_-$; $\Lambda^{(2)}$ дается выражением

$$\Lambda^{(2)} \approx -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{ie^2k_z}{m_ek\omega}\left\{1 + \frac{k_1^2}{k_2^2}\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \frac{k_1\omega^2\omega_2}{k_2^2\omega_1(\omega^2 - \Omega^2)}\left(k_x + ik_y\frac{\omega}{\Omega}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_\nu \delta(\omega_2 - k_{2z}v_z - \nu\Omega)J_\nu(k_{2\perp}r)\exp i\nu\varphi_2\right\} \tag{2.12}$$

Комптоновское рассеяние дается формулой (2.7), где $\omega = \omega_-$. В этом случае из-за $\omega < \omega_1$ раскачка возможна лишь при наличии волн с отрицательными k_z. Она экспоненциально мала в силу $v_0 > u_e$ (при учете только резонансного слагаемого в (2.7)). Оценка максимального инкремента возбуждения обыкновенной циклотронной волны при преобладании комнтоновского рассеяния на электронах пучка имеет вид (оставлено наибольшее слагаемое в (2.7), удовлетворяющее условию $\omega_2 + k_z v_0 + \nu_1 \Omega \approx 0$)

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{k_z v_0 - \nu_0 \Omega}{|k_z| u_e} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \frac{A_{\nu_1}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \frac{n_1}{n_0} \frac{\omega^2}{\nu_0 \Omega} \left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2 \frac{(\omega_1 - \nu_0 \Omega)^2}{k^2 v_0^2} \tag{2.13}$$

При этом считалось $\Omega \ll k_z v_0 \ll v_0 k_1 \operatorname{tg} \theta$.

Эта оценка получена на границе выполнения (1.6), т. е. при $\theta \sim \theta_{\max}$; W^l — энергия k-волн в узком растворе углов вокруг $\theta_{\max}$.

2. *Короткие волны*, $\mu_1 \gg 1$. Воспользуемся (1.3). Тогда для волны с частотой $\omega = \omega_-$ $\mu \ll 1$. Для волны с частотой $\omega = \omega_+$ будем также считать это неравенство выполненным. В таком случае в силу $\mu_1 \gg 1$ имеем $k_1 \gg k$, т. е. для виртуальной волны $\mathbf{k}_2 \approx -\mathbf{k}_1$, и в формулах (1.14) — (1.16) надо положить $\theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi$. Получим, используя (1.10) — (1.12), (1.14) — (1.16)

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) = \left(\frac{k_x}{k} + i \frac{k_y}{k} \frac{\Omega}{\omega}\right) \frac{|e| \omega}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{k_1}{4\pi m_e} \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} (\varepsilon_{33}^{(e)}(k_1) - 1) - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_2}{\omega_1} (\varepsilon_{33}^{(e)}(k_2) - 1)\right] E_{zk_2} + \frac{k_z}{k} \frac{|e|}{m_e \omega_1} \frac{k_1}{4\pi} \left[(\varepsilon_{11}^{(e)}(k_2) - 1) E_{xk_2} + \varepsilon_{12}^{(e)}(k_2) E_{yk_2}\right] \tag{2.14}$$

$$E_{xk_2} = -\frac{4\pi i}{\omega_2} \frac{1}{D} [(N_2^2 - \varepsilon_{22})(N_2^2 - N_{2+}^2) j_{xk_2} + ig (N_2^2 - N_{2-}^2) j_{yk_2}]$$
$$E_{yk_2} = -\frac{4\pi i}{\omega_2} \frac{1}{D} [- ig (N_2^2 - N_{2+}^2) j_{xk_2} - \varepsilon_{11} (N_2^2 - N_{2+}^2) j_{yk_2}] \tag{2.15}$$
$$E_{zk_2} = \frac{4\pi i}{\omega_2} \frac{1}{D} \varepsilon_{11} (N_2^2 - N_{2-}^2) j_{zk_2}$$

$$D = \varepsilon_{11} (N_2^2 - N_{2+}^2)(N_2^2 - N_{2-}^2), \quad N_{2+}^2 = \varepsilon_{33}, \quad N_{2-}^2 = \varepsilon_{22} - g^2 / \varepsilon_{11} \tag{2.16}$$

Сопоставление (2.14) и (2.15), (2.16) позволяет сделать заключение о том, что первое слагаемое в (2.14) определяется рассеянием через виртуальную обыкновенную волну (остается знаменатель вида $N_2^2 - N_{2+}^2$), а второе слагаемое определяется рассеянием через комбинацию виртуальной необыкновенной волны и виртуальной продольной волны (если такая может быть выделена).

В общем случае оставим от всей суммы слагаемое, включающее $\varepsilon_{33}^{(e)}(k_1) - 1$, поскольку в нем содержится член с резонансным знаменателем $\omega_1 - \nu_0 \Omega$. Учитывая дисперсионное уравнение для обыкновенной циклотронной волны, можно записать

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) = - \frac{ie^2 \omega}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{k_1 v_z}{m_e \omega_1} \frac{k_1^2 c^2}{\omega_2^2} \frac{1}{N_2^2 - N_{2+}^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \times$$
$$\times \left(\frac{k_x}{k} + i \frac{k_y}{k} \frac{\Omega}{\omega}\right) \sum_\nu J_\nu (k_{2\perp} r) \delta (\omega_2 - k_{2z} v_z + \nu \Omega) \tag{2.17}$$

Комптоновское рассеяние определяется выражением (2.7).

Выделяя в (2.7) резонансный член и сравнивая с (2.17), приходим к выводу, что определяющим является комптоновский механизм рассеяния, если выполнено условие

$$\frac{\omega_1 - \nu \Omega}{\Omega} \ll \frac{N_2^2 - N_{2+}^2}{N_2^2} \tag{2.18}$$

Поскольку $(\omega_1 - \nu_0\Omega) / \Omega \ll 1$ (выполнение этого условия и позволяет говорить о распространении именно циклотронной гармоники), а волна k_2 является виртуальной, а не реально распространяющейся обыкновенной волной (для которой только и выполнено $N_2^2 = N_{2+}^2$), то (2.18) можно считать выполненным.

В этом случае оценки инкрементов генерации обыкновенных циклотронных волн совпадают с оценками при $\mu_1 \ll 1$ при выполнении тех же условий раскачки (замечания к формуле (2.10)) и даются формулами (2.9), (2.11) при трансформации квазипродольной волны с частотой $\omega = \omega_+$ и формулой (2.13) — при трансформации волны с частотой $\omega = \omega_-$ с учетом, что

$$A_{\nu_1}(\mu_1') / A_{\nu_0}(\mu) \approx v_e / u_e \quad \text{при} \quad \mu_1 \gg 1, \quad \mu_1' \gg 1$$

3. Возбуждение квазипродольных циклотронных волн. Из уравнения необыкновенной циклотронной волны

$$\varepsilon_{11}(k_1)n_1^2 - \varepsilon_{11}(k_1)\varepsilon_{22}(k_1) - \varepsilon_{12}^2(k_1) = 0 \tag{3.1}$$

при $n_1^2 \gg \varepsilon_{22}(k_1) + \varepsilon_{12}^2(k_1) / \varepsilon_{11}(k_1)$ может быть получено уравнение квазипродольной циклотронной волны

$$\varepsilon_{11}(k_1) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_1^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l^2 A_l(\mu_{1\alpha})}{\mu_{1\alpha}} \frac{\omega_1}{\omega_1 - l\Omega} = 0 \tag{3.2}$$

Для частоты ω_1, близкой к $\nu_0\Omega$, пренебрегая движением ионов, имеем (оставлены резонансный член и члены с $l = \pm 1$)

$$\frac{\omega_1 - \nu_0\Omega}{\nu_0\Omega} \approx \frac{A_{\nu_0}(\mu_1)}{\mu_1} \left[\frac{\Omega^2}{\omega_L^2} - \frac{2}{\nu_0^2 - 1} \frac{A_1(\mu_1)}{\mu_1}\right]^{-1} \tag{3.3}$$

Ниже изложены результаты расчетов нелинейных инкрементов возбуждения этих волн для плотной и малоплотной плазмы.

1. Плотная плазма $q \gg 1$. Из (3.3) следует, что распространение квазипродольных волн с частотами, кратными электронной циклотронной частоте, возможно в плотной плазме лишь при $\mu_1 \ll 1$ (при $\mu_1 \gtrsim 1$ частоты волн далеко отстоят от $\nu_0\Omega$, что противоречит допущению, принятому при выводе (3.3)). При $\mu_1 \ll 1$ аналогично случаю обыкновенной циклотронной волны можно пользоваться выражениями (2.4), (2.5) и считать, что нелинейное рассеяние происходит через виртуальную продольную волну.

Можно показать, что при трансформации волны с частотой $\omega = \omega_+$ в квазипродольную циклотронную преобладающим является комптоновское рассеяние, которое определяется выражением

$$\Lambda^{(1)}(k, k_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{ie^2}{km_e} \sum_{\nu} \delta(\omega_2 - k_{2z}v_z + \nu\Omega) J_\nu(k_1 r) \frac{\omega}{(\omega_1 - \nu\Omega)^2 - \Omega^2} \times$$
$$\times \left(k_x + i\frac{\Omega}{\omega_1 - \nu\Omega} k_y\right) \tag{3.4}$$

Оставляя в сумме (3.4) резонансный член, запишем выражение для нелинейного инкремента

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^4}{m_e^3\Omega^2} \frac{\mu_1}{\nu_0 q} \int N_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} \frac{k_\perp^2}{k^2 |k_z|} \left\{\frac{n_0\omega_2}{v_e^3} \exp\left(-\frac{\beta_0^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_2 - k_z v_0}{u_e^3} \ln_1 \frac{A_{\nu_0}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \exp \frac{(\omega - k_z v_0)^2}{2k_z^2 u_e^2}\right\} \tag{3.5}$$

Если раскачка происходит (замечание к формулам (2.10), (2.11)), то максимальный инкремент имеет оценку

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{n_1}{n_0} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \frac{\omega_L^2}{\nu_0 \Omega} \mu_1 \frac{A_{\nu_0}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \tag{3.6}$$

$$\omega - k_z v_0 \approx k_z u_e, \quad k_1^2 u_e^2 \gg \nu_0^2 \Omega^2$$

При трансформации волны с частотой $\omega = \omega_-$ в квазипродольную циклотронную также преобладает комптоновское рассеяние. Оценка максимального инкремента имеет вид на границе выполнения (1.6)

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{n_1}{n_0} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \mu_1 \left(\frac{\Omega}{k v_0}\right)^4 \frac{(\omega_1 - \nu_0 \Omega)^2}{\nu_0 \Omega} \frac{k_z v_0 - \nu_0 \Omega}{|k_z| u_e} \frac{A_{\nu_1}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2 \tag{3.7}$$

$$(\omega_2 + k_z v_0 + \nu_1 \Omega \approx 0)$$

2. Неплотная плазма $q \ll 1$. Распространение квазипродольных волн с частотами, близкими к гармоникам электронной циклотронной частоты, возможно как при $\mu_1 \ll 1$, так и при $\mu_1 \gg 1$.

При $\mu_1 \ll 1$ для $\varepsilon_{ij}(k_2)$ можно пользоваться выражениями (2.4) и считать, что нелинейное рассеяние происходит через виртуальную продольную волну.

Нелинейное рассеяние волны с частотой (1.5) $\omega = \omega_+$ определяется величиной

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) = \frac{ie^2}{(2\pi)^3 m_e k} \frac{k_1 \Omega}{\omega_L^2 \sin^2\theta} \frac{k_\perp^2 - (k_x + ik_y) k_1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2} \sum_\nu J_\nu(k_{2\perp} r)\, \delta(\omega_2 - k_{2z} v_z - \nu\Omega) \exp i\nu\varphi_2 \tag{3.8}$$

При этом считалось, что

$$\omega^2 k_{2\perp} k_\perp \gg k_z^2 (\omega^2 - \Omega^2), \quad k_1^2 \gg k_2^2\, q\, (\nu_0 - 1)^2$$

Для комптоновского рассеяния остается в силе выражение (3.4), в котором $\omega \approx \Omega$.

Как для этой волны, так и для волны с частотой $\omega = \omega_-$ в силу неравенства $\omega < \omega_1 \approx \nu_0 \Omega$ при их рассеянии с превращением в электронные циклотронные волны раскачка последних возможна лишь при наличии волн с отрицательными k_z. Учет одного лишь резонансного слагаемого в (3.4) приводит к тому, что инкремент раскачки экспоненциально мал. Поэтому следует оценить вклад остальных слагаемых в (3.4) и (3.8) в нелинейный инкремент. Как показывает соответствующая оценка, основной вклад вносит наибольшее слагаемое в (3.8), удовлетворяющее условию $\omega_2 + k_z v_0 - \nu_1 \Omega \approx 0$ (при $k_z u_e / \Omega \ll 1$). Выражение для нелинейного инкремента имеет вид при рассеянии продольных волн с $\omega = \omega_+$

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^4}{m_e^3} \mu_1 k_1^2 \frac{(\omega_1 - \nu_0 \Omega)^2 \Omega}{\omega_1 \omega_L^4} \int N_{\mathbf{k}}\, d\mathbf{k} \frac{k_{2\perp}^4}{k_2^4 |k_z|} \times$$

$$\times \left\{ \frac{n_0 \omega_2}{v_e^3} \frac{A_{\nu_1}(\mu_1)}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \exp \frac{-v_0^2}{2 v_e^2} + \frac{n_1}{u_e^3} (\omega_2 + k_z v_0) \frac{A_{\nu_1}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \right\} \tag{3.9}$$

Предполагалось, что

$$\frac{k_1^2 k_{2\perp}^2}{k_2^4} \frac{(k_z v_0)^4}{\omega_L^4 \sin^4\theta} \gg 1$$

Для оценки максимального инкремента получаем

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{n_1}{n_0} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \frac{A_{\nu_1}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \frac{k_1^2}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^2} \mu_1 \frac{(\omega_1-\nu_0\Omega)^2}{\omega_1} \frac{k_z v_0 - \nu_0 \Omega}{|k_z| u_e} \tag{3.10}$$

При $k_z u_e / \Omega \gtrsim 1$ несколько слагаемых в (3.8) вносят одинаковый вклад в $\gamma_{\mathbf{k}_1}$.

Подобным же образом при рассеянии волны с частотой $\omega = \omega_-$, удерживая наибольшее слагаемое в $\Lambda^{(2)}$, получаем оценку максимального инкремента (при $k_z^2 > k_\perp k_1 q$)

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{n_1}{n_0} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \frac{k_1^2 k^2}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|^4} \mu_1 \frac{A_{\nu_1}(\mu_1')}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \frac{(\omega_1-\nu_0\Omega)^2}{q^2\omega_1} \frac{k_z v_0 - \nu_0 \Omega}{|k_z| u_e} \tag{3.11}$$

При $\mu_1 \gg 1$ аналогично п.2.2 $k_1 \gg k$, т. е. $\mathbf{k}_2 \approx -\mathbf{k}_1$, как для волны с частотой $\omega = \omega_+$, так и для волны с частотой $\omega = \omega_-$. В общем случае собственно нелинейное рассеяние определяется величиной

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) = \left(\frac{k_x}{k} + i\frac{k_y}{k}\frac{\Omega}{\omega}\right) \frac{|e|\,\omega}{\omega^2-\Omega^2} \frac{k_1}{4\pi m_e} [(\varepsilon_{11}^{(e)}(k_2) - 1) - (\varepsilon_{11}^{(e)}(k_1) - 1)] E_{xk_2} + \Bigg[\left(\frac{k_x}{k} + i\frac{k_y}{k}\frac{\Omega}{\omega}\right)\left(\varepsilon_{12}^{(e)}(k_2) + \frac{\omega_1}{\omega_2}\varepsilon_{21}^{(e)}(k_1)\right) + \left(i\frac{\Omega}{\omega}\frac{k_x}{k} - \frac{k_y}{k}\right)\frac{\omega}{\omega_2}(\varepsilon_{11}^{(e)}(k_1) - 1)\frac{|e|\,\omega}{\omega^2-\Omega^2}\frac{k_1}{4\pi m_e}\Bigg] E_{yk_2} - \frac{k_z}{k}\frac{|e|\,k_1}{\omega_2}\frac{\varepsilon_{11}^{(e)}(k_1) - 1}{4\pi m_e} E_{zk_2} \tag{3.12}$$

Здесь E_{sk_2} даются формулами (2.15), (2.16).

Для комптоновского рассеяния имеет место выражение (3.4). Раскачка возможна лишь при наличии волн с отрицательными k_z, причем учет лишь резонансного члена в (3.4) приводит к тому, что инкремент экспоненциально мал. Основной вклад будут вносить наибольшие слагаемые в (3.4) и (3.12), удовлетворяющие условию $\omega_2 + k_z v_0 + \nu_1 \Omega \approx 0$ при $k_z u_e / \Omega \ll 1$.

Если виртуальная волна является продольной, т. е. $N_2^2 \gg N_{2+}^2$, N_{2-}^2, то $\Lambda^{(2)}$ имеет вид (пренебрегая $\varepsilon_{11}^{(e)}(k_2) - 1$ в силу наличия резонансного знаменателя в $\varepsilon_{11}^{(e)}(k_1) - 1$ и учитывая $\varepsilon_{11}^{(e)}(k_1) = 0$)

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) \approx -\frac{ie^2\omega}{\omega^2-\Omega^2} \frac{1}{(2\pi)^3 m_e \varepsilon_{11}(k_2)} \left(\frac{k_x}{k} + i\frac{k_y}{k}\frac{\Omega}{\omega}\right) \sum_\nu \delta(\omega_2 - k_{2z} v_z + \nu\Omega) J_\nu(k_{2\perp} r) \tag{3.13}$$

Сравнение наибольших слагаемых в (3.4) и (3.13) приводит к выводу, что собственно нелинейное рассеяние преобладает, если

$$(\omega^2 - \Omega^2)\varepsilon_{11}(k_2) < k_z^2 v_0^2 \quad (k_z v_0 > \Omega)$$

Оценка максимального инкремента при рассеянии волн с частотами $\omega = \omega_+$, $\omega = \omega_-$

$$\gamma_{\mathbf{k}_1 \max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{n_1}{n_0} \frac{W^l}{n_0 T_e'} \frac{v_e}{u_e} \frac{\mu_1}{|\varepsilon_{11}(k_2)|^2} \frac{(\omega_1-\nu_0\Omega)^2}{\omega_1} \frac{k_z v_0 - \nu_0 \Omega}{|k_z| u_e} \tag{3.14}$$

Однако для одномерного спектра $k = k_z$ для волны с частотой $\omega = \omega_-$ рассеяние полностью определяется последним слагаемым в (3.12). Для волны с частотой $\omega = \omega_+$ этот раствор углов исключен из рассмотрения, так как $\omega_+ \to \Omega$ при $\theta \to 0$.

Для сравнения запишем условие преобладания нелинейного рассеяния, если оно происходит через виртуальную обыкновенную волну; $\Lambda^{(2}$ имеет вид

$$\Lambda^{(2)}(k, k_1) \approx -\frac{ie^2 k_z k_1}{(2\pi)^3 k m_e \omega_2^2} \frac{v_z}{N_2^2 - N_{2+}^2} \sum_\nu \delta(\omega_2 - k_{2z} v_z + \nu\Omega) J_\nu(k_{2\perp} r) \quad (3.15)$$

и собственно нелинейное рассеяние преобладает, если

$$\frac{N_2^2}{N_2^2 - N_{2+}^2} \gg \frac{\omega}{(k_z v_0)^2} \frac{k_\perp}{k_1} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 c^2 \qquad (k_z v_0 > \Omega) \quad (3.16)$$

4. Некоторые оценки. Ограничиваясь приведенными выше расчетами нелинейных инкрементов возбуждения обыкновенных и квазипродольных циклотронных волн (выражения для необыкновенных циклотронных волн не приводятся из-за их громоздкости, тем более, что при $\varkappa \ll \mu_1 \ll 1$ соответствующая ветвь необыкновенных волн переходит в плазменные волны), можно отметить следующие характерные черты нелинейного механизма генерации циклотронных волн.

Возбуждение циклотронных волн возможно как в плотной, так и в неплотной плазме. В плотной плазме генерация может наступить или после нескольких актов нелинейной перекачки квазипродольных волн, возбуждаемых пучком, по спектру в сторону меньших k, когда станет выполняться условие $\omega - \omega_1 - k_z v_0 > 0$, или же после изотропизации квазипродольных волн из-за различных нелинейных механизмов изотропизации. Обыкновенные волны возбуждаются более интенсивно (сравни (2.11) и (3.7) при $\mu_1 \ll 1$). Однако следует заметить, что инкременты будут достаточно велики лишь при рассеянии волн с $\omega = \omega_+$ и выполнении следующих условий:

$$\omega_1 \ll k_z u_e < k_z v_0 < \omega_L - \omega_1, \quad \omega_1 \approx \nu_0 \Omega \ll \omega_L \quad (4.1)$$

Таким образом, в плотной плазме наиболее интенсивно возбуждаются первые гармоники электронной гирочастоты. Инкремент возбуждения более высоких гармоник ($\omega_1 \gg k_z u_e$) на несколько порядков меньше, а возбуждение частот $\nu_0 \Omega > \omega_L$ возможно лишь при наличии отрицательных k_z и также на несколько порядков меньше, чем (2.11). Подобным же образом, возбуждение электронных циклотронных гармоник при рассеянии волн с $\omega = \omega_-$ возможно лишь при наличии отрицательных k_z и по величине на несколько порядков меньше (2.11).

В неплотной плазме возбуждаются только квазипродольные циклотронные волны. Нелинейное возбуждение их возможно при наличии отрицательных k_z. Как следует из оценок (3.10), (3.11), (3.14), оно также на несколько порядков менее интенсивно, чем (2.11).

Оценим характерное время генерации обыкновенных циклотронных волн при $\mu_1 \gg 1$, исходя из (2.11). Положим $\omega_L \sim 10\Omega$, $v_e \sim 10^{-2} u_e \sim 10^{-3} v_0$, $W^l \sim 10^{-3} n_0 T_e$, $n_1 \sim 10^{-3} n_0$, $k_1 v_e \sim 10\Omega$, $k v_0 \sim \omega_L$.

При этом $\gamma_{\mathbf{k},\max} \sim 10^{-6} \omega_L \sim 10^{-4}$ *сек*$^{-1}$ при $n_0 \sim 10^{12}$ *см*$^{-3}$.

Следует учесть, однако, что нелинейная генерация сможет иметь место только после нелинейной перекачки продольных волн, возбужденных пучком, по спектру в сторону меньших k.

Оценим время перекачки от значений $k_z v_0 \gtrsim \omega$ до значений $k_z v_0 \lesssim \omega_2$, т. е. на $\omega - \omega_2 = \omega_1 \approx \nu_0 \Omega$. В случае перекачки при рассеянии на ионах оценка максимального инкремента перекачки имеет вид

$$\gamma_{\mathbf{k}\max} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \omega_L \frac{W^l}{n_0 T_i} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^{-2} \quad (4.2)$$

для перекачки на $\Delta\omega \approx |\Delta k_z^l| v_i \approx v_i \omega_L^* / v_0$ (при $\theta \sim 1$, где θ — угол между k^l и $k^l{}_1$).

При $W^l \sim 10^{-2}\, n_0 T_i$, $T_e \sim 10 T_i$, $v_0 \sim 10^4\, v_i$ время перекачки на $\omega - \omega_2$

$$\tau \approx \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{n_0 T_i}{W^l} \omega_L^{-1} \left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)^2 \nu_0 \frac{v_0}{v_i q}$$

того же порядка, что и (2.11).

Аналогично можно оценить и другие приведенные выше инкременты.

При $\mu_1 \gg 1$ в плотной плазме могут возбуждаться и обыкновенные и квазипродольные волны. В неплотной — только квазипродольные.

Линейный механизм генерации, как указывалось, не работает, если функция распределения электронов пучка максвелловская, а для распределения по поперечным скоростям в виде δ-функции возбуждение циклотронных гармоник при $\lambda < 1$ отсутствует [3–5].

Для сравнения запишем выражение для нелинейного инкремента генерации обыкновенных электронных циклотронных волн при рассеянии квазипродольных волн с

$$\omega \approx \omega_L + \frac{\Omega^2}{2\omega_L} \sin^2\theta$$

на электронах пучка с функцией распределения

$$f_0(\mathbf{v}) = n_1 (2\pi)^{-3/2} v_{0\perp}^{-1} u_e^{-1} \delta(v_\perp - v_{0\perp}) \exp \frac{-(v_z - v_0)^2}{2u_e^2}$$

(считая, как и при получении (2.9), что определяющим является комптоновское рассеяние и оставляя в (2.7) резонансный член; при этом вклад электронов плазмы в $\gamma_{\mathbf{k}_1}$ экспоненциально мал)

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{n_0 T_e'} \frac{\omega_L^5}{\omega_1 \Omega^2} \frac{k_1^2}{A_{\nu_0}(\mu_1)} \int N_{\mathbf{k}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2\theta}{|k_z|^3} \exp \frac{-(\omega - k_z v_0)^2}{2k_z^2 u_e^2} \times$$
$$\times \left\{ 2J_{\nu_0}(\lambda) J_{\nu_0}'(\lambda) \nu_0 \frac{k_1 u_e}{v_{0\perp}} - \frac{\omega - k_z v_0}{u_e} J_{\nu_0}^2(\lambda) \right\} \tag{4.3}$$

Отсюда видно, что $\gamma_{\mathbf{k}_1}$ меняет знак при прохождении величины λ через корни выражения в фигурных скобках, т. е. возникают диапазоны устойчивости и неустойчивости, связанные с видом функции распределения по поперечным скоростям, аналогично линейной теории.

Автор признателен В. Н. Цытовичу за постановку и многократное обсуждение затрагиваемых в статье вопросов.

Поступила 16 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. А., Цытович В. Н. Нелинейная генерация высших гармоник электронной циклотронной частоты в плазме с током. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 5.
2. Schlesinger S. P., Bradford P. V., Marshall T. C. Proc. 8-th Internat. Conf. Phenomena in Ionized Gases. Vienna, 1967, p. 379; Vienna, Internat. Atomic Energy Agency, 1968.
3. Crawford F. W., Tataronis J. A. Absolute instabilities of perpendicularly propagating cyclotron harmonic plasma waves. J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No 9.
4. Dory R. A., Guest G. E., Harris E. G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field. Phys. Rev. Letters, 1965, vol. 14, No 5.
5. Crawford F. W., Tataronis J. A. Cyclotron harmonic plasma wave instabilities. Proc. 7—th Internat. Conf. Phenomena in Ionized Gases. Beograd, 1965; Beograd, Gradevinska Knjiga, 1966.
6. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964.
7. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.
8. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. Усп. физ. н., 1966, т. 90, вып. 3.
9. Цытович В. Н., Шварцбург А. Б. К теории нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной анизотропной плазме. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 3.