На фиг. 3 изображены кривые ползучести при монотонно изменяющейся нагрузке [5]. Очевидно, что при увеличивающейся нагрузке гипотеза (4) лучше соответствует опыту, чем (3), а при уменьшающейся — немного хуже.

Кривые релаксации [4], построенные по (11), мало отличаются от кривых, соответствующих гипотезе (3) (фиг. 2).

Здесь не рассмотрены при увеличивающейся нагрузке кривые ползучести при напряжениях, превышающих предел упругости, так как в этих случаях гипотеза (3) дает завышенные кривые ползучести [5]; соответствие (4) с опытом будет здесь еще хуже.

Оставляя в стороне последний случай, можно резюмировать, что новый параметр упрочнения без введения дополнительных констант позволил при неубывающих нагрузках получить лучшее соответствие с опытом по сравнению с обычной теорией упрочнения. При убывающей нагрузке соответствие новой теории с опытом несколько хуже, однако от этого расхождения можно избавиться, если, как и в работе [3], принять, что при $\sigma \cdot \sigma < 0$ действует гипотеза (3).

Поступила 5 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabotnov Y. N. On the Equation of State for Creep. Progr. Appl. Mech., the Prager Anniversary Volume, the Macmillan Co., N. Y., 1963.
2. Rabotnov Y. N. On the Equation of State of Creep. Proc. of the Joint International Confer. on Creep, 1963.
3. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести. ПМТФ, 1961, № 3.
4. Наместников В. С., Хвостунков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
5. Наместников В. С. О ползучести алюминиевого сплава при переменных нагрузках. ПМТФ, 1964, № 2.

КАЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПО ОСНОВАНИЮ ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА

Р. Я. Иванова *(Новосибирск)*

Рассматривается контактная задача линейной вязко-упругости. Многие задачи этого класса решаются с применением преобразования Лапласа, решение же данной задачи основывается на принципах теории наследственности. В задаче рассмотрен только один вид ядра — экспонента, хотя может быть применено любое вырожденное ядро. Задача о качении цилиндрического тела по вязко-упругому основанию в плоской постановке решалась Г. А. Бойченко [1], но со значительными упрощениями. В последние годы аналогичные задачи вызывают интерес в США. Об этом свидетельствуют многие работы и, в частности, работа Хантера [2].

Ниже эта задача решается другим методом. Каток и основание считаются изготовленными из одного и того же материала. Таким материалом может быть даже сталь, так как есть основание полагать, что при малых напряжениях сталь ведет себя как линейно-вязкий материал [1].

При решении задачи используются следующие предположения.

1. Движение катка начинается в момент времени $t = -\infty$ и продолжается с постоянной скоростью c.
2. Задача рассматривается, как плоская.
3. Материал катка и основания подчиняется закону Больцмана — Вольтерра

$$\sigma_{ij} = \lambda^\circ \theta + 2\mu^\circ \varepsilon_{ij}$$

где λ°, μ° — интегральные операторы вида

$$\lambda^\circ = \lambda (1 - \lambda^*), \qquad \mu^\circ = \mu (1 - \mu^*)$$

причем

$$\lambda^* \varphi (t) = \int_{-\infty}^{t} \Lambda (t - \tau) \varphi (\tau) d\tau, \qquad \mu^* \varphi (t) = \int_{-\infty}^{t} M (t - \tau) \varphi (\tau) d\tau$$

---

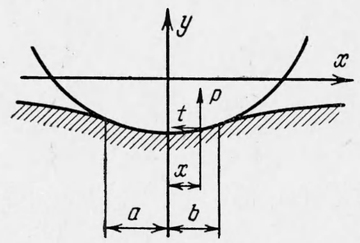
[1] В. С. Постников. Внутреннее трение чистых металлов и сплавов при высоких температурах. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Кемерово, 1959.

4. Объемное последействие отсутствует, т. е. $\lambda^\circ + \mu^\circ = \lambda + \mu$.

Здесь λ, μ — упругие постоянные, $\Lambda(t-\tau)$, $M(t-\tau)$ — функции, определяемые экспериментально. Существуют материалы, для которых эти функции близки к экспоненциальным.

Для рассматриваемой среды, по которой движется каток, задача будет формулироваться как первая основная задача теории упругости, но в решении упругие постоянные будут заменяться соответственно операторами, что даст возможность учесть изменение упругих свойств материала во времени. Это положение было названо Ю. Н. Работновым [3] принципом Вольтерра.

Следуя Бойченко [1], воспользуемся соотношениями Мусхелишвили [4]. Если упругое тело занимает нижнюю полуплоскость и значения напряжений на границе будут $Y_y = -p(x)$, $X_y = t(x)$ (фиг. 1), то производные от граничных значений перемещений по координате x должны удовлетворять соотношению Мусхелишвили



Фиг. 1

$$\Phi^+(x) + \varkappa\Phi^-(x) = 2\mu\,(U_{1x}' + iV_{1x}')$$

Заменив упругие постоянные λ и μ операторами λ°, μ°, получим:
для точек основания

$$\Phi_1^+(x) + \varkappa^\circ\Phi_1^-(x) = 2\mu^\circ\,(U_{1x}' + iV_{1x}') \tag{1}$$

для точек катка

$$\Phi_2^-(x) + \varkappa^\circ\Phi_2^+(x) = 2\mu^\circ\,(U_{2x}' + iV_{2x}') \tag{2}$$

причем

$$\Phi_1 = -\Phi_2$$

Применяя формулы Сохоцкого — Племеля для предельных значений функций Φ_1 и Φ_2, вычтем из уравнения (1) уравнение (2). Получим сингулярное интегральное уравнение, содержащее $p(x)$ и $t(x)$

$$-\int_{-a}^{b} \frac{p(s) + it(s)}{s-x}\,ds = A^\circ\,[-i\,(U_{1x}' - U_{2x}') + (V_{1x}' - V_{2x}')] \qquad \left(A^\circ = \frac{2\pi\mu^\circ}{1+\varkappa^\circ}\right)$$

Здесь пределы интегрирования приняты от $-a$ до b, так как вне участка контакта $p(x) = t(x) = 0$.

Разделив мнимую и действительную части, запишем два сингулярных уравнения

$$-\int_{a}^{b} \frac{p(s)}{s-x}\,ds = A^\circ\,(V_{1x}' - V_{2x}'), \qquad \int_{-a}^{b} \frac{t(s)}{s-x}\,ds = A^\circ\,(U_{1x}' - U_{2x}') \tag{3}$$

Решаем первое из этих уравнений, так как касательные напряжения определены в работе [1].

Основываясь на отсутствии объемного последействия (предположение 4), представим оператор A° в следующем виде

$$A^\circ = \pi\,(\lambda+\mu)\left[1 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{1}{1-\mu^*\mu/(\lambda+2\mu)}\right]$$

Пусть $\Gamma(t-\tau)$ будет резольвента ядра $M(t-\tau)$. Тогда

$$A^\circ = a_1 + b_1\Gamma^* \tag{4}$$

Здесь

$$a_1 = \pi\,(\lambda+\mu) - \frac{\pi\,(\lambda+\mu)^2}{\lambda+2\mu}$$

$$b_1 = -\frac{\pi\mu\,(\lambda+\mu)^2}{(\lambda+2\mu)^2}, \qquad \Gamma^*\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

При равномерном движении катка движение среды можно принять установившимся по отношению к системе координат, перемещающейся поступательно вместе с центром катка. Тогда смещения и напряжения не будут зависеть явно от времени и будут функциями только координат.

Введем неподвижную систему координат так, что

$$y_1 = y, \qquad x_1 = x + ct.$$

Произведем замену переменной в формуле (4)

$$x_1 = x + ct, \qquad x_1 = \xi + c\tau, \qquad t - \tau = \frac{\xi - x}{c}$$

$$A^\circ\varphi(x) = a_1\varphi(x) + \frac{b_1}{c}\int\limits_x^\infty \Gamma\left(\frac{\xi - x}{c}\right)\varphi(\xi)\,d\xi = a_1\varphi(x) + \frac{b_1}{c}\Gamma_1{}^*\varphi(x)$$

Заменяя дугу окружности катка дугой параболы, можно считать, что на линии контакта $V_{1x}{}' - V_{2x}{}' \approx x / R$.

Таким образом

$$V_{1x}{}' - V_{2x}{}' = g(x) = x / R \quad \text{при} \; -a \leqslant x \leqslant b \tag{5}$$

$$V_{1x}{}' - V_{2x}{}' = g(x) = V_{1x}{}' \quad \text{при} \; x > b \tag{6}$$

Здесь $V_{1x}{}'$ — некоторая пока неизвестная функция.

Уравнение (3) в новых переменных имеет вид

$$-\int\limits_{-a}^{b} \frac{p(s)}{s - x}\,ds = A^\circ g(x) = f(x)$$

Решением этого уравнения по методу Карлемана будет

$$p(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b - x}{a + x}\right)^{1/2}\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{f(s)}{s - x}\,ds + \frac{C'}{\sqrt{(a + x)(b - x)}} \tag{7}$$

Из требования ограниченности $p(x)$ при $x = b$ следует, что $C' = 0$.

Возьмем резольвенту Γ определенного вида. Например

$$\Gamma\left(\frac{\xi - x}{c}, \lambda_i\right) = \sum_{i=1}^{k} A_i \exp\left[-\lambda_i\left(\frac{\xi - x}{c}\right)\right]$$

В этом случае оператор

$$A^\circ\varphi(x) = a_1\varphi(x) + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_x^\infty A_i \exp\left[-\lambda_i\left(\frac{\xi - x}{c}\right)\right]\varphi(\xi)\,d\xi$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b - x}{a + x}\right)^{1/2}\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{f(s)}{s - x}\,ds = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b - x}{a + x}\right)^{1/2}$$

$$\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{1}{s - x}\left[a_1 g(s) + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_s^\infty A_i \exp\left[-\lambda_i\left(\frac{\xi - s}{c}\right)\right]g(\xi)\,d\xi\right]ds =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b - x}{a + x}\right)^{1/2}\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{1}{s - x}\left[a_1 g(s) + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_s^b A_i \times\right.$$

$$\left.\times \exp\left[\lambda_i\left(\frac{s - \xi}{c}\right)\right]g(\xi) + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_b^\infty A_i \exp\left[\lambda_i\left(\frac{s - \xi}{c}\right)\right]g(\xi)\,d\xi\right]ds \tag{8}$$

Упростим правую часть уравнения (8), учитывая условие (5)

$$\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{1}{s - x}a_1 g(s)\,ds = \frac{a_1}{R}\int\limits_{-a}^{b}\left(\frac{a + s}{b - s}\right)^{1/2}\frac{s}{s - x}\,ds$$

Обозначим

$$\int\limits_0^\infty A_i \exp\left[-\lambda_i\frac{s}{c}\right]v_{1\xi}{}'(\xi)\,d\xi = C_i \tag{9}$$

где $V_{1x}{}' = g(x)$ при $x > b$.

После преобразования уравнение (8) принимает вид

$$p(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{1/2} \int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \left\{\frac{a_1}{R}s + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int_{s}^{b} A_i \exp\left[-\lambda_i\left(\frac{\xi-s}{c}\right)\right]\frac{\xi}{R}\,d\xi + \frac{b_1}{c}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i C_i \exp\left(\lambda_i \frac{\xi}{c}\right)\right\}\frac{ds}{s-x} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{1/2} \int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \frac{1}{s-x}\left[s\left(\frac{a_1}{R} + \frac{b_1}{R}\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + \sum_{i=1}^{k} \exp\left(\frac{\lambda_i s}{c}\right)\frac{b_1}{c}\lambda_i C_i - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{k}\left(b + \frac{c}{\lambda_i}\right)\frac{b_1}{R}\exp\left(-\lambda_i \frac{b}{c}\right) \exp\left(\lambda_i \frac{s}{c}\right) + \frac{b_1 c}{R}\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{\lambda_i}\right]\frac{ds}{s-x} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{1/2} \int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \left[m_1' s + \sum_{i=1}^{k} m_{2i} \exp\left(\lambda_i \frac{s}{c}\right) + m_3\right]\frac{ds}{s-x}$$

Здесь

$$m_1' = \frac{a_1}{R} + \frac{b_1}{R}\sum_{i=1}^{k} A_i, \qquad m_3 = \frac{b_1 c}{R}\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{\lambda_i}$$

$$m_{2i} = \frac{b_1}{c}\lambda_i C_i - \frac{b_1}{R}\left(b + \frac{c}{\lambda_i}\right)\exp\left(-\frac{\lambda_i}{c}b\right)$$

Вычислить в замкнутой форме

$$\int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \exp\frac{\lambda_i s}{c}\,ds$$

не удается. Поэтому ниже используются два члена разложения функции $\exp(\lambda_i s / c)$ в ряд

$$\exp\frac{\lambda_i s}{c} = 1 + \frac{\lambda_i s}{c}$$

Это оправдано для материалов с достаточно большим временем релаксации τ, т. е. когда $s \ll c\tau$.

В дальнейшем вычисление $p(x)$ ведется по приближенной формуле

$$p(x) = \left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{1/2} \int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \frac{m_1' s + m_2'}{s-x}\,ds \tag{11}$$

$$m_1' = m_1 + \sum_{i=1}^{k} m_{2i}\frac{\lambda_i}{c}, \qquad m_2' = m_3 + \sum_{i=1}^{k} m_{2i}$$

Вычислим интеграл в правой части (10)

$$\int_{-a}^{b} \left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2} \frac{m_1' s + m_2'}{s-x}\,ds = J(x)$$

Для этого рассмотрим другой известный интеграл [5]

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda^*}\left[\left(\frac{a+\xi}{b-\xi}\right)^{1/2} m_1'\xi + m_2'\right]\frac{d\xi}{\xi - z} =$$

$$= \left(\frac{a+z}{b-z}\right)^{1/2}(m_1' z + m_2') - a_q z^q - a_{q-1} z^{q-1} - \ldots - a_0$$

где ξ принадлежит области, ограниченной контуром Λ^*, $a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0$ — коэффициенты разложения при достаточно больших ξ в ряд функции

$$\left(\frac{a+\xi}{b-\xi}\right)^{1/2}(m_1'\xi+m_2') = -i\left[1+\frac{1}{\xi}\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{ab}{4}-\frac{a^2}{8}+\frac{3b^2}{8}\right)+\dots\right]\times$$

$$\times(m_1'\xi+m_2') \approx -i(m_1'\xi+m_2''), \qquad \left(m_2''=\frac{a+b}{2}bm_1'+m_2'\right)$$

Таким образом

$$\Omega(z)=(m_1'z+m_2')\left(\frac{a+z}{b-z}\right)^{1/2}+i(m_1'z+m_2'')$$

Введем в рассмотрение еще один интеграл

$$J(z)=\int_L\sqrt{\frac{a+s}{b-s}}\,\frac{m_1's+m_2'}{s-z}\,ds$$

где s принадлежит L. Стягивая контуры к дугам, получим

$$J(z)=\pi i\Omega(z)=\pi i\left[\left(\frac{a+z}{b-z}\right)^{1/2}(m_1'z+m_2')+i(m_1'z+m_2'')\right] \tag{12}$$

Учитывая, что

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}J(z)\to F^+(x)=\frac{1}{2\pi i}J^+(x) \quad \text{при } z\to x$$

по формулам Сохоцкого — Племеля получим

$$F^+(z)=\frac{1}{2}\psi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(s)\,ds}{s-x} \quad \left(\psi(x)=\left(\frac{a+x}{b-x}\right)^{1/2}(m_1'x+m_2')\right)$$

Итак

$$\frac{1}{2\pi i}J^+(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+x}{b-x}\right)^{1/2}(m_1'x+m_2')+\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{b}\left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2}\frac{m_1's+m_2'}{s-x}ds \tag{13}$$

С другой стороны, из (12) следует

$$J^+(x)=\pi i\left[\left(\frac{a+x}{b-x}\right)^{1/2}(m_1'x+m_2')+i(m_1'x+m_2')\right] \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), находим

$$\int_{-a}^{b}\left(\frac{a+s}{b-s}\right)^{1/2}\frac{m_1's+m_2'}{s-x}ds=-\pi(m_1'x+m_2'')$$

Окончательно получим формулу для напряжений

$$p(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{b-x}{a+x}\right)^{1/2}(m_1'x+m_2') \tag{15}$$

Для определения конечных точек a и b контактного участка имеем два условия.

1. Требование ограниченности $p(x)$ при $x=-a$

$$m_1'x+m_2''=0 \quad \text{при } x=-a$$

2. Условие равновесия

$$\int_{-a}^{b}p(s)\,ds=P$$

Из первого условия следует, что

$$a=m_2''/m_1' \tag{16}$$

Из второго условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b}\left(\frac{b-s}{a+s}\right)^{1/2}(m_1's+m_2'')\,ds=m_1'(a+b)\left(b+\frac{3a}{16}\right)-\frac{m_2''(a+b)}{2}=P$$

Или, учитывая (16)

$$P=-\frac{5}{16}\frac{m_2''^2}{m_1'}+\frac{11}{16}m_2''b+m_1'b^2 \tag{17}$$

Уравнение (17) дает возможность определить b только в том случае, если известны $C_i(b)$, от которых в свою очередь зависят m_1' и m_2''. Для определения b воспользуемся условием незагруженности участка $x > b$. Решаем вторую основную задачу теории упругости, считая $p(x)$ известным, и заменяем упругие постоянные на операторы

$$2\mu^\circ (U_{1x}' - iV_{1x}') = (\varkappa^\circ + 1)\,\Phi(x) \tag{18}$$

но

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{b} \frac{p(s) + it(s)}{s - x}\,ds \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и разделяя мнимую и действительную части, имеем

$$V_{1x}' = -\frac{1+\varkappa^\circ}{4\pi\mu^\circ}\int_{-a}^{b}\frac{p(s)}{s-x}\,ds = -A_1^\circ \int_{-a}^{b}\frac{p(s)}{s-x}\,ds \qquad (x > b) \tag{20}$$

$$A_1^\circ = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)} + \frac{1}{2\pi\mu} + \frac{1}{2\pi\mu c}\Gamma_1^* = a' + b'\Gamma_1^*$$

Здесь Γ_1^* определяется по формуле (5).

Интеграл в правой части (20) уже не имеет особенностей и легко вычисляется

$$\int_{-a}^{b}\frac{p(s)}{s-x}\,ds = -\frac{a+b}{2}m_1' + (m_2'' + m_1'x)\left[1 - \left(\frac{x-b}{x+a}\right)^{1/2}\right] = f_1(x)$$

Теперь

$$V_{x1}' = -A_1^\circ f_1(x) = -a'f_1(x) - b'\Gamma_1^* f_1(x) = -a'f_1(x) -$$

$$- b'\int_{x}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i \exp\left[-\lambda_i\left(\frac{\xi - x}{c}\right)\right]\left\{\frac{a+b}{2}m_1' - (m_2'' + m_1'\xi)\left[1 - \left(\frac{\xi-b}{\xi+a}\right)^{1/2}\right]\right\}d\xi$$

Если разложить функцию $\sqrt{(\xi - b)/(\xi + a)}$ в ряд по степеням ξ^{-1}, то, ограничиваясь двумя членами разложения (только из удобства записи), можно приближенно вычислять интеграл

$$\int_{x}^{\infty}\exp\frac{-\lambda_i s}{c}\left(\frac{\xi-b}{\xi+a}\right)^{1/2}d\xi$$

В результате получим

$$V_{1x}' = b'\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i \Phi_{0i}\left[-E_i\left(-\frac{\lambda_i x}{c}\right)\right]\exp\left(\frac{\lambda_j x}{c}\right) + \frac{\Phi_1}{x} \tag{21}$$

Здесь

$$\Phi_{0i} = d_1 - d_2\frac{\lambda_i}{c}, \qquad \Phi_1 = a'd_1 - b'\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i d_2$$

$$d_1 = \frac{m_1'}{4\cdot 2!}(3a^2 + 2ab - b^2) - \frac{a+b}{2}m_2''$$

$$d_2 = \frac{m_2''}{4\cdot 2!}(3a^2 + 2ab - b^2) - \frac{m_1'}{8\cdot 3!}(3b^2 + 3ab^2 - 9a^2b - 15a^3)$$

Таким образом, определив по формуле (21) функцию V_{1x}', можно по формуле (9) вычислить C_i.

Поступила 19 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойченко Г. А. Сопротивление перекатывания наследственно-упругих тел. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 9.
2. Хантер. Контактная задача качения жесткого цилиндра по вязко-упругому полупространству. Прикладная механика, Труды американского общества инженеров, 1961, 4.
3. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, № 1.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.