

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ПРИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАВИСЯЩЕМ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Г. А. Варшавский

(Москва)

Исследование теплофизических свойств применяющихся изоляционных и конструкционных материалов показывает, что в большинстве случаев их коэффициенты теплопроводности более или менее существенно зависят от температуры.

В связи с этим использование для расчетов тепловых потоков и температурных полей в твердых телах методов, основанных на предположении о независимости коэффициента теплопроводности от температуры, снижает ценность таких расчетов.

В 1935 г. для стационарного случая было показано [1], что введение специальной функции позволяет преобразовать уравнение распространения тепла при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры, к уравнению Лапласа. Однако в литературе до сих пор нет четкой точки зрения по этому вопросу. В руководствах [2, 3] указано, что стационарная задача теплопроводности точно решается при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Применяя преобразование Кирхгофа, Шнейдер [3] близко подошел к обобщению, но, однако, его не сделал. В книгах [4, 5] и работе [6] на основании [1] отмечено, что стационарная задача теплопроводности при любой зависимости $\lambda(T)$ сводится к уравнению Лапласа.

В работе [7] была рассмотрена задача о распространении тепла в безграничной среде при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры для мгновенного источника тепла.

Получение результатов, которые могут быть использованы при решении задач теплопроводности с произвольной зависимостью $\lambda(T)$, сделало целесообразным изложение рекомендуемого метода.

1. Стационарный режим. Применение выражения

$$dQ = -\lambda \operatorname{grad} T ds d\tau \quad (1.1)$$

для расчета элементарного количества тепла dQ , проходящего за время $d\tau$ через площадку ds , приводит в результате рассмотрения теплового баланса элементарного объема к основному уравнению теории теплопроводности

$$\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} \lambda = c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.2)$$

в котором c и γ — соответственно теплоемкость и удельный вес среды, λ — коэффициент теплопроводности.

При стационарном режиме это уравнение вырождается в

$$\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} \lambda = 0 \quad (1.3)$$

Детальное рассмотрение уравнения показывает, что при λ , являющемся функцией температуры $\lambda = \lambda(T)$, оно представляет собой не что иное, как уравнение Лапласа для функции

$$\Phi = \Phi(T, 0) = \int_0^T \lambda dT \quad (1.4)$$

(Условный нуль отсчета в (1.4) может быть выбран произвольно).
В связи с этим уравнение (1.3) равнозначно уравнению

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0 \quad (1.5)$$

Наибольший интерес с практической стороны представляют задача Дирихле и смешанная задача. Задача Дирихле заключается в отыскании гармонической функции по ее значениям на границах. В теории потенциала доказывается, что такое решение возможно и единственно. Этот результат применим и к нашему случаю, так как задание температуры на границе полностью определяет функцию $\Phi(T, 0)$, и задача решается.

Смешанная задача, соответствующая в теории теплопроводности задаче с граничными условиями третьего рода [8], состоит в отыскании гармонической функции, удовлетворяющей на границах области условию [9]

$$\left[\frac{du(N)}{dn} \right]_i + p(N)u = f(N) \quad (1.6)$$

Здесь u — искомая функция, $(du/dn)_i$ — градиент функции по внешней нормали к области, $p(N)$ и $f(N)$ — непрерывные функции координат (N) .

Применительно к решению задач теплопроводности (при постоянном коэффициенте теплопроводности) это условие имеет вид

$$\frac{dT}{dn} + \alpha \frac{T}{\lambda} = \alpha \frac{T_*}{\lambda} \quad (1.7)$$

Здесь T — искомая температура, а T_* и α — соответственно температура внешней среды и коэффициент теплоотдачи, которые в общем случае будут функциями координат границ области.

Ясно, что это условие (1.7) ничем не отличается от условия (1.6).

В связи с отличием решаемого здесь случая от классического, исследуемого в общей теории уравнений эллиптического типа, приведем доказательство единственности решения для анализируемой задачи¹.

Условие (1.7) при коэффициенте теплопроводности, зависящем от температуры, запишется как

$$\frac{d\Phi}{dn} + \alpha\psi(\Phi) = \alpha T_* \quad (1.8)$$

где в отличие от (1.6) и (1.7) вместо искомой гармонической функции Φ находится однозначно с ней связанная величина — температура поверхности — для общности обозначенная здесь как $T = \psi(\Phi)$.

Если предположить, что уравнению Лапласа в рассматриваемом случае удовлетворяют две функции Φ_1 и Φ_2 , то их разность (также гармоническая функция) должна удовлетворять условию

$$\frac{d(\Phi_1 - \Phi_2)}{dn} + \alpha[\psi(\Phi_1) - \psi(\Phi_2)] = 0 \quad (1.9)$$

Применяя к гармонической функции $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ формулу Грина и используя (1.8), получим

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dv = - \iint \alpha \Delta\Phi [\psi(\Phi_1) - \psi(\Phi_2)] ds \quad (1.10)$$

Здесь dv — элемент объема, ds — элемент поверхности. Учитывая, что при $\lambda > 0$

$$\operatorname{sign} \Delta\Phi = \operatorname{sign} [\psi(\Phi_1) - \psi(\Phi_2)]$$

приходим к противоречию: положительный интеграл, находящийся в левой части (1.10), должен равняться отрицательной правой части.

¹ Доказательство единственности необходимо в связи с применением графических методов решения.

Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_2$ и, следовательно, решение уравнения (1.5), удовлетворяющее (1.8), должно быть единственным.

Также доказывается единственность уравнения Пуассона: разность функций, удовлетворяющих уравнению Пуассона, удовлетворяет уравнению Лапласа. Это для дальнейшего важно, так как в ряде случаев решение уравнения Пуассона облегчается при помощи графических методов.

2. Решение некоторых задач. Применение функции $\Phi(T, 0)$ и использование уже известных результатов решения обычных задач стационарной теплопроводности позволяют рассчитывать тепловые потоки и строить температурные поля при $\lambda = \lambda(T)$ для всех случаев¹, проанализированных ранее при $\lambda = \text{const}$.

Для примера рассмотрим здесь бесконечно протяженную пластину и полый цилиндр, представленные на фиг. 1.

Случай 1. Известны температуры на границах (верхняя половина фиг. 1).

Выражения для теплового потока:

а) пластина

$$Q = \frac{1}{\delta} \Phi(T_1, 0) \quad (2.1)$$

б) полый цилиндр

$$Q = \frac{2\pi}{\ln(r_2/r_1)} \Phi(T_1, 0) \quad (2.2)$$

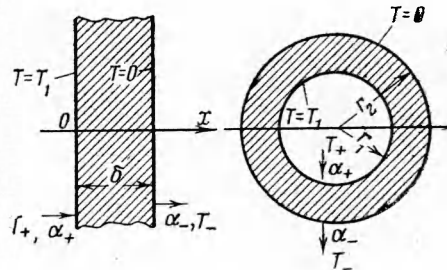
Уравнения для температурного поля:

а) пластина

$$\Phi(T, 0) = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \Phi(T_1, 0) \quad (2.3)$$

б) полый цилиндр

$$\Phi(T, 0) = \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)} \Phi(T_1, 0) \quad (2.4)$$



Фиг. 1

Случай 2. Известны температуры на границах и соответствующие коэффициенты теплоотдачи (нижняя половина фиг. 1).

Эти задачи сложнее предыдущих, так как в процессе решения для построения температурного поля и расчета тепловых потоков необходимо найти температуры на границах и по этим температурам определить остальные величины.

Так же, как и в предыдущих случаях, решение следует искать соответственно для пластины и цилиндра в форме

$$\Phi = C_1 x + C_2, \quad \Phi = C_1 \ln r + C_2 \quad (2.5)$$

Константы для пластины определяются из граничных условий

$$\alpha_+ [T_+ - \psi(C_2)] = -C_1, \quad \alpha_- [\psi(C_1 \delta + C_2) - T_-] = -C_1 \quad (2.6)$$

Константы для полого цилиндра определяются из условий

$$\begin{aligned} \alpha_+ [T_+ - \psi(C_1 \ln r_1 + C_2)] &= -C_1 / r_1 \\ \alpha_- [\psi(C_1 \ln r_2 + C_2) - T_-] &= -C_1 / r_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

В выражениях (2.6) и (2.7) температуры среды и соответствующие коэффициенты теплоотдачи (фиг. 1) обозначены через T_+ , T_- , α_+ , α_- .

В этих выражениях функцией $\psi(\Phi)$ обозначена температура, определяемая аналитически или графически из уравнения $\Phi = \Phi[\psi(\Phi), T_0]$ по

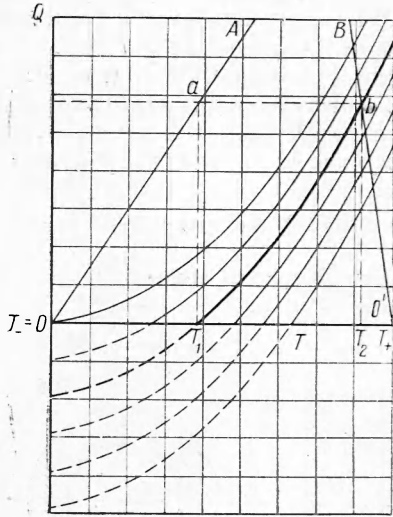
¹ Точнее для всех случаев, когда на границах заданы температуры, и для многих, когда заданы условия теплообмена.

заданному значению функции Φ и известному нижнему пределу, который во всех случаях целесообразно считать за условный нуль отсчета. Как правило, за эту точку следует выбирать самую низкую температуру в системе (скажем, температуру охлаждающей жидкости T_- в уравнениях (2.6) и (2.7)).

Следует указать на то, что при сложной зависимости $\lambda = \lambda(T)$ уравнения (2.6) и (2.7) решить аналитически не всегда возможно. В этом случае следует прибегать к простому графоаналитическому приему, сущность которого будет описана ниже, в конце этого раздела работы.

Сейчас же решается система (2.6) при применяемой часто в расчетах линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры $\lambda = \lambda_0 + bT$.

Текущая температура для этого случая от функции $\Phi(T, 0)$ будет зависеть следующим образом:



Фиг. 2

$$T = \frac{\lambda_0}{b} \left(\sqrt{1 + 2b \frac{\Phi}{\lambda_0^2}} - 1 \right) \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_+ \left\{ T_+ - \frac{\lambda_0}{b} \left[\sqrt{1 + 2b \frac{C_2}{\lambda_0^2}} - 1 \right] \right\} &= -C_1 \\ \alpha_- \left\{ \frac{\lambda_0}{b} \left[\sqrt{1 + \frac{2b}{\lambda_0^2} (C_1 \delta + C_2)} - 1 \right] - T_- \right\} &= -C_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из этой системы для определения C_1 получается уравнение

$$\begin{aligned} C_1^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) - 2C_1 \left[\alpha_-^2 \alpha_+ T_+ + \alpha_- \alpha_+^2 T_- + (\alpha_- \alpha_+^2 + \alpha_-^2 \alpha_+) \frac{\lambda_0}{b} + \alpha_-^2 \alpha_+^2 \frac{\delta}{b} \right] - \\ - \alpha_-^2 \alpha_+^2 \left[T_+^2 - T_-^2 + 2 \frac{\lambda_0}{b} (T_+ - T_-) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) заметно упрощается, если температуру T_- считать равной нулю

$$\begin{aligned} C_1^2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) - 2C_1 \left[\alpha_-^2 \alpha_+ T_+ + (\alpha_- \alpha_+^2 + \alpha_-^2 \alpha_+) \frac{\lambda_0}{b} + \alpha_-^2 \alpha_+^2 \frac{\delta}{b} \right] - \\ - \alpha_-^2 \alpha_+^2 \left(T_+ + 2 \frac{\lambda_0}{b} \right) T_+ = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как тепловой поток $Q = -d\Phi / dn$ равен величине $Q = -C_1$, то выражение (2.10) или (2.11) совместно с (2.8) и (2.9) дают, таким образом, все для решения поставленной задачи.

Аналогично этому решается и задача об охлаждении полого цилиндра.

Графоаналитический метод, существенно упрощающий решение задач этого рода, состоит в следующем.

На диаграмму (фиг. 2), по горизонтальной оси которой отложен температурный перепад, характерный для решаемой задачи, а по вертикальной — тепловые потоки, наносят семейство одинаковых линий $Q = \Phi(T, 0) / \delta$, получающихся одна из другой параллельным смещением в вертикальном направлении, и построенных по известной для данного материала зависимости $\lambda = \lambda(T)$ (участки кривой, находящиеся ниже горизонтальной оси, можно не наносить на номограмму).

Затем через вершину O левого угла диаграммы проводят прямую линию OA , тангенс угла наклона которой пропорционален коэффициенту теплоотдачи α_- , а через вершину O' правого угла диаграммы проводят прямую $O'B$, тангенс угла наклона которой пропорционален коэффициенту теплоотдачи α_+ , умноженному на -1 .

Искомые температуры T_1 и T_2 на ограничивающих плоскостях будут соответствовать такому взаимному расположению правильно выбранной кривой ¹ и прямых OA и $O'B$, при котором точка a пересечения горизонтали, проведенной через точку b пересечения луча $O'B$ с кривой, будет в качестве проекции иметь точку T_1 (фиг. 2). Это построение ² позволяет определить не только температуры, но и тепловые потоки, равные

$$Q = \alpha_- T_1 = \frac{1}{\delta} \Phi(T_2, T_1) = \alpha_+(T_+ - T_2)$$

Известные величины T_1 и T_2 позволят, в случае необходимости, построить температурные поля.

При учете излучения прямые OA и $O'B$ заменяются соответствующими кривыми линиями. Метод нахождения граничных температур T_1 и T_2 останется неизменным.

Замечания. Если заданы для расчета более сложные конфигурации, чем рассмотренные нами, то в случае задания на границах температур (пусть даже неодинаковых на каждой из границ) решение по своей сложности совершенно не будет отличаться от решения при $\lambda = \text{const}$.

Только после нахождения величины $\Phi(T, 0)$ необходимо будет по построенным или вычисленным значениям этой функции найти температуру. Вычисление же тепловых потоков, переносимых в теле или передаваемых на границах, как и обычно, сведется к расчету $dQ = -\text{grad } \Phi ds$ по найденному решению.

Пусть, например, требуется рассчитать температурное поле в параллелепипеде, ограниченном гранями: $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$, причем на грани $x = 0$ поддерживается температура T_1 , на грани $x = a$ — температура T_2 , на остальных гранях температура равна нулю.

Для нахождения функции Φ берется решение, уже найденное для случая $\lambda = \text{const}$, и вместо T в решение подставляется Φ .

Поле функции Φ описывается [10] уравнением

$$\Phi(T, 0) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Phi_1 \text{sh } l(a-x) + \Phi_2 \text{sh } lx}{\text{sh } la} \times \\ \times \frac{1}{(2p+1)} \sin \frac{(2p+1)y}{b} \frac{1}{(2q+1)} \sin \frac{(2q+1)z}{c}$$

Здесь

$$\Phi_1 = \Phi(T_1, 0), \quad \Phi_2 = \Phi(T_2, 0) \\ \frac{l^2}{\pi^2} = \frac{(2p+1)^2}{b^2} + \frac{(2q+1)^2}{c^2}$$

При задании граничных условий типа $-d\Phi / dx = \alpha_+(T_+ - T)$ воспользоваться решением, найденным для случая $\lambda = \text{const}$, будет трудно. Задачу в таких случаях при сложных конфигурациях следует решать графически.

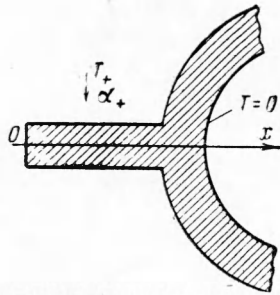
¹ Можно не проводить большого числа кривых, а пользоваться скользящим лекалом.

² Ясно, что подобным образом можно решить задачу и для многослойной стенки.

При решении аналогичной задачи для полого цилиндра в качестве кривых приводят линии $Q = \Phi(T, 0) / \ln(r_2/r_1)$, а OA и $O'B$ имеют тангенсы наклона, пропорциональные соответственно величинам $\alpha_- r_2$ и $-\alpha_+ r_2$.

Но и здесь использование функции теплового потока $\Phi(T, 0)$ облегчает задачу построения сетки, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, трансформируемому в этом случае в уравнение Лапласа.

3. Расчет плоского ребра. В качестве дальнейших приложений применения тепловой функции $\Phi(T, 0)$ покажем, как решаются задачи, связанные с расчетом ребер. Для примера рассмотрим плоские ребра.



Фиг. 3

При обычных предположениях относительно равномерности по сечению температурного поля получают для распределения температуры по длине уравнение

$$\delta \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \alpha_+ \Pi [\psi(\Phi) - T_+] \quad (3.1)$$

Здесь Π — периметр ребра, δ — толщина ребра, T_+ — температура среды, α_+ — коэффициент теплоотдачи (начало координат расположено у торцового конца ребра (фиг. 3)).

Обычные преобразования позволяют получить первый интеграл этого уравнения в виде

$$d \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{2\alpha_+ \Pi}{\delta} [\psi(\Phi) - T_+] d\Phi \quad (3.2)$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0}^2 = \frac{2\alpha_+ \Pi}{\delta} \int_{\Phi_0}^{\Phi} [\psi(\Phi) - T_+] d\Phi \quad (3.3)$$

Дальнейшие преобразования приводят к выражению

$$x = - \int_{\Phi_0}^{\Phi} \left\{ \frac{2\alpha_+ \Pi}{\delta} \int_{\Phi_0}^{\Phi} [\psi(\Phi) - T_+] d\Phi + \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0}^2 \right\}^{-1/2} d\Phi \quad (3.4)$$

Если рассматривать короткое ребро, то величиной $d\Phi / dx$ в (3.4) при $x = 0$ нельзя пренебрегать, в этом случае из условий теплообмена на торце ребра имеем

$$-\left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_{x=0} = \alpha_+ [T_+ - \psi(\Phi_0)] \quad (3.5)$$

Здесь Φ_0 — значение функции $\Phi(T, 0)$ у торца ребра.

Рассмотренная схема расчета позволяет в принципе решить поставленную задачу при любых связях между λ и T , т. е. найти количество тепла, транспортируемое через корень ребра, и построить распределение температуры по его длине.

Следует, однако, указать на то, что даже простейшая линейная связь между коэффициентом теплопроводности и температурой уже приводит к решению уравнения в эллиптических интегралах. Менее простые связи приводят, естественно, и к соответствующим усложнениям в решении задачи. В таких случаях следует прибегать к помощи счетных машин.

Учитывая конкретный интерес к задачам при связи типа $\lambda = \lambda_0 + bT$ далее приведем решение для этого случая.

Уравнение (3.2) преобразуется в

$$d \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{2\alpha_+ \Pi}{\delta} \left[\frac{\lambda_0}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2b\Phi}{\lambda_0^2}} - 1 \right) - T_+ \right] d\Phi \quad (3.6)$$

решение которого приводит к выражению

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}^2 = \frac{k_1}{\Phi_m} \left[\frac{2}{3} \frac{k_1}{k_2 \Phi_m} (1 + k_2 \Phi_m \theta)^{3/2} - k_3 \theta \right]_{\theta_0}^{\theta} \quad (3.7)$$

Здесь $\Phi_m = \Phi(T_+, 0)$ — максимальное значение функции $\Phi(T, 0)$, соответствующее интервалу температур от условного нуля (у корня ребра) до температуры окружающей среды

$$\theta = \frac{\Phi(T, 0)}{\Phi(T_+, 0)}, \quad k_1 = \frac{2\alpha_+ \Pi}{\delta} \frac{\lambda_0}{b}, \quad k_2 = \frac{2}{\lambda_0^2} b, \quad k_3 = \frac{b}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{b} + T_+ \right)$$

θ_0 — значение функции θ у открытого конца ребра.

Решение (3.7) приводит к интегралу

$$x = - \int_{\theta_0}^{\theta} \left[\frac{k_1}{\Phi_m} \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{k_2 \Phi_m} [(1 + k_2 \Phi_m \theta)^{3/2} - (1 + k_2 \Phi_m \theta_0)^{3/2}] - k_3 (\theta - \theta_0) \right\} + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}^2 \right]^{-1/2} d\theta \quad (3.8)$$

Здесь $(d\theta/dx)_{x=0}^2$ определяется из (3.5)

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0}^2 = \left(\frac{\alpha_+ \lambda_0}{b} \right)^2 \Phi_m^2 (\sqrt{1 + k_2 \Phi_m \theta_0} - k_3)^2$$

Интеграл (3.8) при помощи подстановки $Y = \sqrt{1 + k_2 \Phi_m \theta}$ преобразуется в

$$x = - \frac{2}{k_2 \Phi_m} \int_{Y_0}^Y Y \left[\frac{k_1}{\Phi_m} \left\{ \frac{2}{3k_2 \Phi_m} (Y^3 - Y_0^3) - \frac{k_3}{k_2 \Phi_m} [(Y^2 - 1) - (Y_0^2 - 1)] \right\} + \frac{4}{k_2^2 \Phi_m^2} \left(Y \frac{dY}{dx} \right)_{x=0}^2 \right]^{-1/2} dY \quad (3.9)$$

Интеграл (3.9) подстановкой $Y = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi$ сводится к сумме эллиптических интегралов

$$x = \sqrt{\frac{6}{k_1 k_2}} \left\{ \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{2(\beta - \alpha)}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right\} \quad (3.10)$$

в которых γ , β и α — соответственно большой, средний и меньший действительные корни многочлена третьей степени, стоящего под корнем в знаменателе выражения (3.9)

$$k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}, \quad \sin^2 \varphi_1 = \frac{Y_{x=l} - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \sin^2 \varphi_2 = \frac{Y_{x=0} - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Нижний предел интегрирования выражения (3.10) соответствует заданной температуре корня ребра.

Для большинства практически важных случаев при $x=0$ можно считать $dY/dx=0$, а у корня ребра величину $Y=1$; поэтому углы φ_1 и φ_2 будут соответственно равны

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Для этого случая корни будут¹

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(5k_2 - Y_0 + \sqrt{2.25 k_3^2 + 3k_3 Y_0 - 3Y_0^2} \right), \quad \beta = Y_0 \quad (3.11)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(5k_2 - Y_0 - \sqrt{2.25 k_3^2 + 3k_3 Y_0 - 3Y_0^2} \right)$$

В качестве практического приложения разработанного метода анализа тепловой работы ребра был рассчитан режим плоского ребра, выполнен-

¹ Легко показать, что корни многочлена третьей степени, находящегося в знаменателе (3.9), вещественны.

ного из стали типа Н28 с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 12.6 + 0.012 T$ [11], толщиной $\delta = 0.01$ м, длиной $l = 0.121$ м, обтекаемого потоком, имеющим температуру $T_+ = 1500^\circ \text{C}$; коэффициент теплоотдачи равен: $\alpha = 50$ ккал / м²°С, температура у корня равна 100°C .

Результаты анализа приведены на фиг. 4. Там же для сравнения нанесены данные расчета, проведенного при постоянном коэффициенте теплопроводности, равном среднеарифметическому для определенного в основном расчете диапазона температур.

Количество тепла, переданное через корень ребра и равное $Q'_k = -\delta(d\Phi/dx)_l$ (на 1 пог. м ребра), отличается от тепла, подсчитанного при постоянном λ , на 5%.

Опишем решение задачи для произвольной зависимости $\lambda(T)$ методом численного интегрирования.

- 1) Задаем значение T на торце ребра ¹.
- 2) Из (3.5) определяем величину $d\Phi/dx$ при $x = 0$.
- 3) По известной на элементе ребра температуре T при $x = 0$ находим изменение

$$-\delta \Delta \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \alpha_+ \Pi (T_+ - T) \Delta x \quad (3.12)$$

(если по условиям задачи необходимо учитывать излучение, то к правой части этого равенства и равенства (3.5) прибавляем элементарную алгебраическую функцию четвертых степеней температур стенки и окружающей среды).

- 4) После этого по средней на протяжении элемента Δx величине производной

$$\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_m = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_0 + \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_{\Delta x} \right] \quad (3.13)$$

находим значение функции $\Phi_{\Delta x}$ в конце элемента Δx

$$\Phi_{\Delta x} = \Phi_0 + \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta x}\right)_m \Delta x \quad (3.14)$$

5) по найденному значению $\Phi_{\Delta x}$ и известной зависимости $T = \psi(\Phi)$ рассчитываем значение температуры $T_{\Delta x}$ в сечении Δx и после этого все операции повторяем для второго элемента, считая, при этом, что на его поверхности температура равна $T_{\Delta x}$ и т. д.

В результате этой последовательности операций доходим до корня ребра и рассчитываем его температуру.

Если определенная таким образом температура корня отличается от известной по условиям задачи, принимаем другое значение начальной температуры и повторяем всю последовательность операций до совпадения рассчитанной и заданной температур.

Таким же способом решаем задачи для ребер другой формы, например, круглых при любом законе изменения сечений.

В этом случае уравнение (3.12) преобразуется в

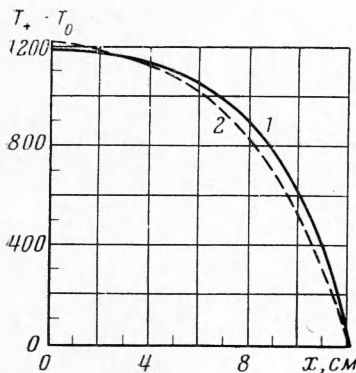
$$-\delta \Delta \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \alpha_+ \Pi(x) (T_+ - T) \Delta x \quad (3.15)$$

так как δ и Π будут функциями x .

Ясно, что применение функции $\Phi(T, 0)$ и здесь существенно упрощает решение задачи.

Как и в предыдущем разделе работы в (3.15) не учитывалось излучение.

¹ Первое значение можно получить из приближенного решения при $\lambda = \lambda_0 + bT$ или из еще более «грубого» решения при $\lambda = \text{const}$.



Фиг. 4

Если принять его во внимание, то аналитическое решение усложняется и даже в простейшем случае ($\lambda = \text{const}$) приводит к интегралам, которые приходится вычислять приближенными методами. При численных же методах учет излучения практически не усложняет решения.

4. Решение стационарных задач при наличии равномерно распределенных источников тепла. Применение функции $\Phi(T, 0)$ для этого случая приводит к уравнению Пуассона

$$\text{div grad } \Phi + q = 0 \quad (4.1)$$

Естественно, что решение его зависит от граничных условий. В тех случаях, когда на границах заданы температуры и, следовательно, значения функции $\Phi(T, 0)$, задача решается элементарно.

Рассмотрим для примера задачу о полом цилиндре бесконечной длины при нескольких вариантах граничных условий¹. Уравнение (4.1) для этого случая запишется в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + q = 0 \quad (4.2)$$

Здесь q — объемное тепловыделение в единицу времени.

Интеграл (4.2) запишется

$$\Phi = -\frac{qr^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4.3)$$

Примем в качестве первого варианта охлаждения трубы такой, при котором на границах ее устанавливаются одинаковые температуры, условно принятые за начало отсчета функции $\Phi(T, 0)$. Тогда

$$-\frac{qr_2^2}{4} + C_1 \ln r_2 + C_2 = 0, \quad -\frac{qr_1^2}{4} + C_1 \ln r_1 + C_2 = 0 \quad (4.4)$$

Отсюда получаем

$$\Phi(T, 0) = -\frac{q}{4} \left[r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln(r_2/r_1)} \ln r - \frac{r_1^2 \ln r_2 - r_2^2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)} \right] \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) по r , можно найти сечение, в котором устанавливается максимальное значение $\Phi(T, 0)$ и, следовательно, температуры.

Определение температуры при сложной зависимости $\lambda(T)$ целесообразнее всего производить графически².

Рассмотрим второй вариант граничных условий: на внешнем периметре трубки тепловод отсутствует, т. е. $d\Phi/dr = 0$ при $r = r_2$; на внутреннем имеет место теплообмен с рабочим телом известной температуры T_-' , коэффициент теплоотдачи задан и равен α_-' .

Условия запишутся следующим образом:

$$-\frac{qr_2}{2} + \frac{c_1}{r_2} = 0, \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{qr_2^2}{2} \quad (4.6)$$

$$q(r_2^2 - r_1^2) = 2r_1\alpha_-'(T_1 - T_-') \quad (4.7)$$

Здесь T_1 — температура на внутренней границе.

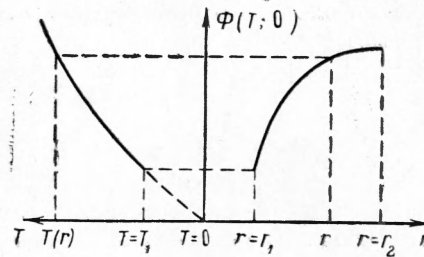
Определение величины T_1 позволяет найти константу C_2 .

Общее решение для этого случая будет представлено равенством

$$\Phi(T, 0) = \frac{1}{4} q \left(r_1^2 - r^2 + 2r_2^2 \ln \frac{r}{r_1} \right) + \Phi(T_1, 0) \quad (4.8)$$

¹ Решений задач о пластине и шаре здесь не приводится. Общие интегралы их хорошо известны. Применение изложенного метода для этих задач аналогично применению его для полого цилиндра.

² Примерно так, как это сделано дальше (выражение (4.8) и фиг. 5).



Фиг. 5

Температуру в общем случае следует находить графически, сравнивая правую часть (4.8) с интегралом $\Phi = \Phi(T, 0)$ (фиг. 5).

При теплообмене на внешней границе и отсутствии теплоотвода на внутренней имеют соответственно

$$-\frac{qr_1^2}{2} + \frac{C_1}{r_1} = 0, \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{qr_1^2}{2} \quad (4.9)$$

$$q(r_2^2 - r_1^2) = 2\alpha_- r_2(T_2 - T_-) \quad (4.10)$$

Здесь T_2 — температура на внешней границе.

Текущие значения функции $\Phi(T, 0)$ и, следовательно, температуры находятся из уравнения

$$\Phi(T, 0) = \frac{1}{4} q (r_2^2 - r + 2r_1^2 \ln \frac{r}{r_2}) + \Phi(T_2, 0) \quad (4.11)$$

Наиболее сложным будет задание условий теплообмена по обоим периметрам, т. е.

$$-\frac{1}{2} qr_1^2 + C_1 = 2r_1 \left[\psi \left(-\frac{1}{4} qr_1^2 + C_1 \ln r_1 + C_2 \right) - T_- \right] \alpha_- \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{2} qr_2^2 - C_1 = 2r_2 \left[\psi \left(-\frac{1}{4} qr_2^2 + C_1 \ln r_2 + C_2 \right) - T_- \right] \alpha_- \quad (4.13)$$

где T_-' и α_-' — соответственно температура рабочего тела и коэффициент теплоотдачи с внутренней стороны трубки, T_-'' и α_-'' — те же параметры с внешней стороны трубки.

Для случая линейной зависимости коэффициента теплопроводности равенства (4.12), (4.13) могут быть решены алгебраически.

Однако как для этого, так и для других более сложных случаев зависимости $\lambda = \lambda(T)$ следует прибегать к помощи графоаналитического метода, основанного на том физически ясном факте, что при двустороннем охлаждении трубки (или пластины) в середине слоя имеется цилиндрическая поверхность максимальной температуры, где, следовательно, производная $d\Phi/dr = 0$.

Распределение функции $\Phi(T, 0)$ во внутреннем кольцевом слое представлено выражением (4.8), во внешнем — (4.11).

При рассмотрении граничной поверхности, соответствующей $d\Phi/dr = 0$, как внешней границы внутреннего слоя для значения функции $\Phi(T_m, 0)$, будем иметь выражение

$$\Phi(T_m, 0) = \frac{1}{4} q \left(r_1^2 - r_m^2 + 2r_m^2 \ln \frac{r_m}{r_1} \right) + \Phi(T_1, 0) \quad (4.14)$$

где T_m определяется при помощи равенства

$$q(r_m^2 - r_1^2) = 2r_1 \alpha_- (T_1 - T_m) \quad (4.15)$$

Индексом m отмечены величины, относящиеся к поверхности с максимальным значением температуры.

При рассмотрении поверхности с максимальным значением функции $\Phi(T_m, 0)$ как внутренней границы внешнего слоя получим выражение

$$\Phi(T_m, 0) = \frac{1}{4} q \left(r_2^2 - r_m^2 + 2r_m^2 \ln \frac{r_m}{r_2} \right) + \Phi(T_2, 0) \quad (4.16)$$

где T_2 определяется при помощи равенства

$$q(r_2^2 - r_m^2) = 2r_2 \alpha_- (T_2 - T_m) \quad (4.17)$$

Выражения (4.14) и (4.16) будут однозначными функциями r_m . Единственным значением r_m , отвечающим рассматриваемой задаче, будет то, при котором осуществится равенство значений $\Phi(T_m, 0)$, находимых по (4.14) и (4.16).

Все операции, связанные с определением поверхности с $d\Phi/dr = 0$ и построением температурного поля, можно существенно упростить, приме-

няя графические построения, аналогичные предложенным выше (например, фиг. 2 и 5).

Ясно, что вся приведенная методика решения задач с источником тепла пригодна и для случая, когда q будет функцией координат.

Учет излучения на граничных поверхностях, не меняя метода решения задачи, приводит лишь к некоторой модификации граничных условий и, следовательно, к другим выражениям для определения температур T_1 и T_2 .

5. Применение функции $\Phi(T, 0)$ к решению задач нестационарной теплопроводности. При исследовании задач нестационарной теплопроводности применение функции $\Phi(T, 0)$ упрощает исходное уравнение и позволяет использовать при его решении известные способы приближенного расчета теплового прогрева.

Уравнение теплопроводности для нестационарного прогрева при подстановке $\Phi(T, 0)$ запишется как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (5.1)$$

В связи с тем, что при заданной зависимости $\lambda = \lambda(T)$ известна также и функция $T = \psi(\Phi)$, производная от температуры по времени может быть выражена следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \psi'(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \quad (5.2)$$

Величины c и γ обычно являются функциями температуры, а следовательно, и функциями $\Phi(T, 0)$. Уравнение (5.2) может быть записано как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \xi(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad (\xi(\Phi) = c\gamma\psi'(\Phi)) \quad (5.3)$$

Таким образом, исходное уравнение (5.1) преобразовано в нелинейное уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом перед производной, зависящим от искомой функции.

Следует указать на то, что рекомендуемое преобразование уравнения упрощает доказательство единственности решения.

Для одномерного случая уравнение (5.3) запишется как

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \xi(\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \quad (5.4)$$

Решать такое уравнение можно при помощи метода конечных разностей, который позволяет заменить исходное уравнение системой приближенных уравнений типа

$$\frac{\Delta \Phi_i}{\Delta \tau} = \frac{1}{\xi(\Phi)} \frac{\Phi_{i+1} + \Phi_{i-1} - 2\Phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (5.5)$$

В уравнении (5.5) значения Φ_{i-1} , Φ_i , Φ_{i+1} будут значениями функций Φ в последовательно расположенных точках прямой Ox , отделенных одна от другой интервалами Δx .

Естественно, что эти значения соответствуют «замороженной» эпюре температур для определенного момента времени τ .

На протяжении элемента $\Delta \tau$ величины Φ_i считаются неизменными. Это дает возможность определить значения функции в следующий момент времени и, следовательно, приближенно решить задачу.

Таким образом, преобразование $\Phi(T, 0)$ позволяет и в случае $\lambda(T)$ применить для решения задачи теплопроводности метод, примененный к решению задачи этого типа Э. Шмидтом.

Соотношение между величинами $\Delta \tau$ и Δx , при которых изменение функции Φ за элемент времени $\Delta \tau$ не выходит за допустимые пределы, может быть определено при помощи выражений

$$\Delta \tau \leq \frac{1}{2a / (\Delta x)^2} \quad (5.6)$$

для толщи слоя и

$$\Delta\tau \leq \frac{1}{2} \left[\frac{a}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{c\gamma\Delta x} \right]^{-1} \quad (5.7)$$

на границе его с жидкой или газообразной средой.

Приближенный вывод соотношений (5.6) и (5.7) производится при помощи соображений, сформулированных в свое время А. П. Ваничевым [12]: максимальное количество тепла, переданное (или отнятое) слою толщиной $\frac{1}{2} \Delta x$ (фиг. 6) за элемент времени $\Delta\tau$, не должно изменять его температуру больше чем на максимальную разность температур, определяющую теплоподвод к слою (или теплоотвод от него)¹.

Так как тепловой баланс слоя запишется как

$$\left[\alpha_+ (T_+ - T_1) + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta x} \right] \Delta\tau = \frac{c\gamma (T_1 - T_1') \Delta x}{2}$$

или

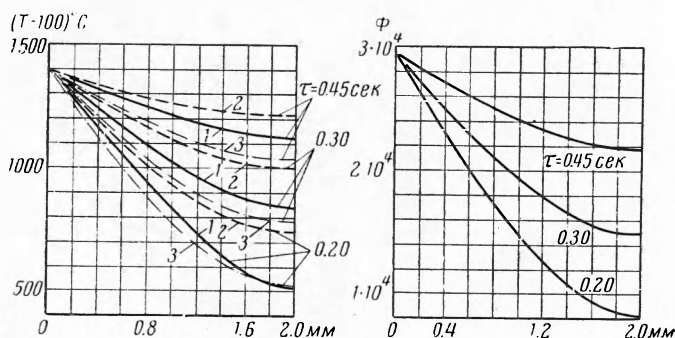
$$\left[\alpha_+ (T_+ - T_1) + \frac{\lambda_m (T_2 - T_1)}{\Delta x} \right] \Delta\tau = \frac{c\gamma (T_1 - T_1') \Delta x}{2}$$

Фиг. 6

где λ_m — средний коэффициент теплопроводности в интервале температур $T_2 \div T_1$, то при $T_2 - T_1 < T_+ - T_-$ и $T_1' - T_1 \leq T_+ - T_1$ получаем (5.7). Здесь T_1, T_2 — температуры стенки в начальный момент времени; T_1' — температура поверхности стенки по истечении времени $\Delta\tau$.

Более строгий вывод (5.6) и (5.7), распространяющийся на различные случаи, проанализирован в работе А. П. Ваничева [4].

В рассматриваемом случае следует рассчитывать $\Delta\tau$ по максимальному значению коэффициента теплопроводности.



Фиг. 7

Для случая зависимости $\lambda = \lambda_0 + bT$ и при постоянных значениях c и γ уравнение (5.3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{2b\Phi}{\lambda_0^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \quad \left(a_0 = \frac{\lambda_0}{c\gamma} \right) \quad (5.8)$$

На фиг. 7 представлены результаты расчета величин Φ и T при нестационарном прогреве плоской стенки толщиной 4 мм, температура на обеих сторонах которой внезапно поднялась до 1500°. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры дается выражением $\lambda = 12.6 + 0.012 T$ ° удельный вес материала $\gamma = 7900 \text{ кг/м}^3$; теплоемкость $C = 0.13 \text{ ккал/кг}^\circ\text{C}$; начальная температура стенки 100° C.

¹ Рассматривается случай на границе.

Расчет температур произведен при трех предположениях относительно коэффициента теплопроводности: 1) $\lambda = \lambda(T)$; 2) коэффициент теплопроводности равен максимальному значению; 3) коэффициент теплопроводности равен среднеарифметической величине крайних значений.

Следует указать на то, что при более сложных законах $\lambda = \lambda(T)$ (и к тому же при учете связи s и γ с температурой) далеко не всегда можно найти явную аналитическую связь функций $\psi(\Phi)$ и $\xi(\Phi)$ с Φ . В этих случаях следует пользоваться специально рассчитанными таблицами.

В последнее время для расчета нестационарных прогревов получил большое и вполне заслуженное распространение так называемый метод элементарных тепловых балансов, предложенный А. П. Ваничевым [12]. Этот метод используется и для расчета температурного режима конструкций, выполненных из материалов с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности.

При определении тепловых потоков, «транспортируемых» в этих условиях к контрольному объему, умножают усредненный градиент температуры (частное от деления разности температур в контрольных сечениях на расстояние между этими сечениями) на коэффициент теплопроводности, рассчитанный по среднеарифметическому значению температур, определяющих градиент. При линейной зависимости $\lambda(T)$ этот метод расчета теплового потока будет точным. Однако при значительных перепадах температур и при зависимости $\lambda(T)$, отличающейся от линейной, такой метод может привести к погрешностям. Для того чтобы избежать их, следует при использовании метода элементарных тепловых балансов иметь построенную (или рассчитанную) зависимость $\Phi(T, 0)$ и в тех случаях, о которых здесь говорилось, тепловой поток рассчитывать по усредненному градиенту функции $\Phi(T, 0)$.

В заключение можно указать на то, что при рассмотрении задач с граничными условиями третьего рода (а также задач с многослойными стенками) при анализе условий на границах приходится прибегать к переходу от функции $\Phi(T, 0)$ к температуре. Для основной толщи слоя этот переход не обязателен и может быть произведен на последнем этапе решения.

Рассмотренный метод может быть применен и к решению задач о прогреве цилиндрических и шаровых стенок.

Из приведенного материала ясно, что применяемое преобразование облегчает решение стационарных и нестационарных задач.

Поступила 14 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Варшавский Г. А. Определение тепловых потоков в твердом теле. ЖЭТФ, 1936, т. 6, вып. 3.
2. Гребер Г., Эрк С. и Григуль У. Основы учения о теплообмене. ИИЛ, 1958.
3. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. ИИЛ, 1960.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Машгиз, 1958.
5. Кутателадзе С. С., Боршанский В. М. Справочник по теплопередаче. Госэнергоиздат, 1959.
6. Капинос В. М. Решение задач стационарной теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры методом Э.Т.А.. «Теплоэнергетика», 1960, № 11.
7. Зельдович Я. Б. и Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. ЖТФ, 1950, Сб., посвященный А. Ф. Иоффе.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1958, т. IV.
10. Карлслюу Г. С. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1947.
11. Сб. под редакцией Варгафтик Н. Б. Теплофизические свойства веществ. Госэнергоиздат, 1956.
12. Ваничев А. П. Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах. Изд. бюро новой техники, 1947.