



Из данных, приведенных в [10], следует, что моделированию пластического деформирования армированных КМ и конструкций посвящено небольшое количество работ. В [11, 12] рассматривалась проблема гомогенизации дисперсно-упрочненных эллипсоидальными включениями КМ при их неупругом деформировании. С использованием деформационной теории пластичности упругопластическое поведение пространственно-армированных КМ моделировалось в [7]. В [13] приведены общие соотношения для волокнистого КМ при больших деформациях, но определяющие соотношения пластического деформирования материалов композиции не конкретизированы и решения задач неупругого деформирования не получены. В [14] разработана модель упругопластического деформирования пространственно-армированных пластин, адаптированная для решения задач с помощью явной численной схемы типа “крест”. Используемые в [14] определяющие уравнения для компонентов композиции аналогичны уравнениям теории Прандтля — Рейсса — Хилла [15], поэтому не учитывают демпфирующие свойства реальных материалов при их циклическом деформировании [16]. Следовательно, модель, предложенная в [14], не позволяет рассчитывать остаточные прогибы, напряжения и деформации пластин из КМ. Демпфирующие свойства компонентов композиции учитываются с использованием соотношений вязкоупругого деформирования [17], т. е. с помощью модели вязкоупругопластического деформирования КМ [18]. Такая структурная модель в настоящее время отсутствует. Данная работа посвящена моделированию вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных пластин, при этом численное интегрирование соответствующей начально-краевой задачи осуществляется на основе метода шагов по времени с использованием явной схемы типа “крест”.

**1. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибкой пластины с пространственной структурой армирования.** Рассматривается изгибное деформирование пространственно-армированной пластины толщиной  $2h$  (рис. 1). Используется декартова прямоугольная система координат: ось  $Ox_3$  направлена в поперечном направлении, плоскость  $Ox_1x_2$  является срединной ( $|x_3| \leq h$ ). Пластина имеет плоскоперекрестную или пространственно-перекрестную структуру армирования, квазиоднородную в поперечном направлении. Конструкция усилена  $N$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . (На рис. 1,а показано ортогональное плоское армирование в двух направлениях при  $N = 2$ , на рис. 1,б — ортогональное пространственное армирование в трех направлениях при  $N = 3$  [1, 4], на рис. 1,в — неортогональное пространственное армирование в четырех направлениях при  $N = 4$  [2].) Объемную долю материала связующего в представительной ячейке композиции обозначим  $\omega_0$ . При этом выполняется условие нормировки [2]

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1. \quad (1)$$

(Здесь и далее суммирование по индексу  $k$  проводится от 1 до  $N$ .)

Поскольку определить реальное распределение напряжений, деформаций и их скоростей в КМ, связующее которого содержит многочисленные произвольно ориентированные жесткие включения, достаточно сложно даже в случае линейно-упругого деформирования [19] (особенно при неупругом деформировании материалов компонентов композиции), для построения применимых на практике определяющих соотношений вязкоупругопластического деформирования рассматриваемого КМ пластины примем допущения, аналогичные принятым в [7, 14, 19].

1. В представительной ячейке композиции армированный материал является макроскопически квазиоднородной анизотропной средой. (Это допущение справедливо при достаточно плотном и равномерном наполнении связующего материала тонкими волокнами [19].)

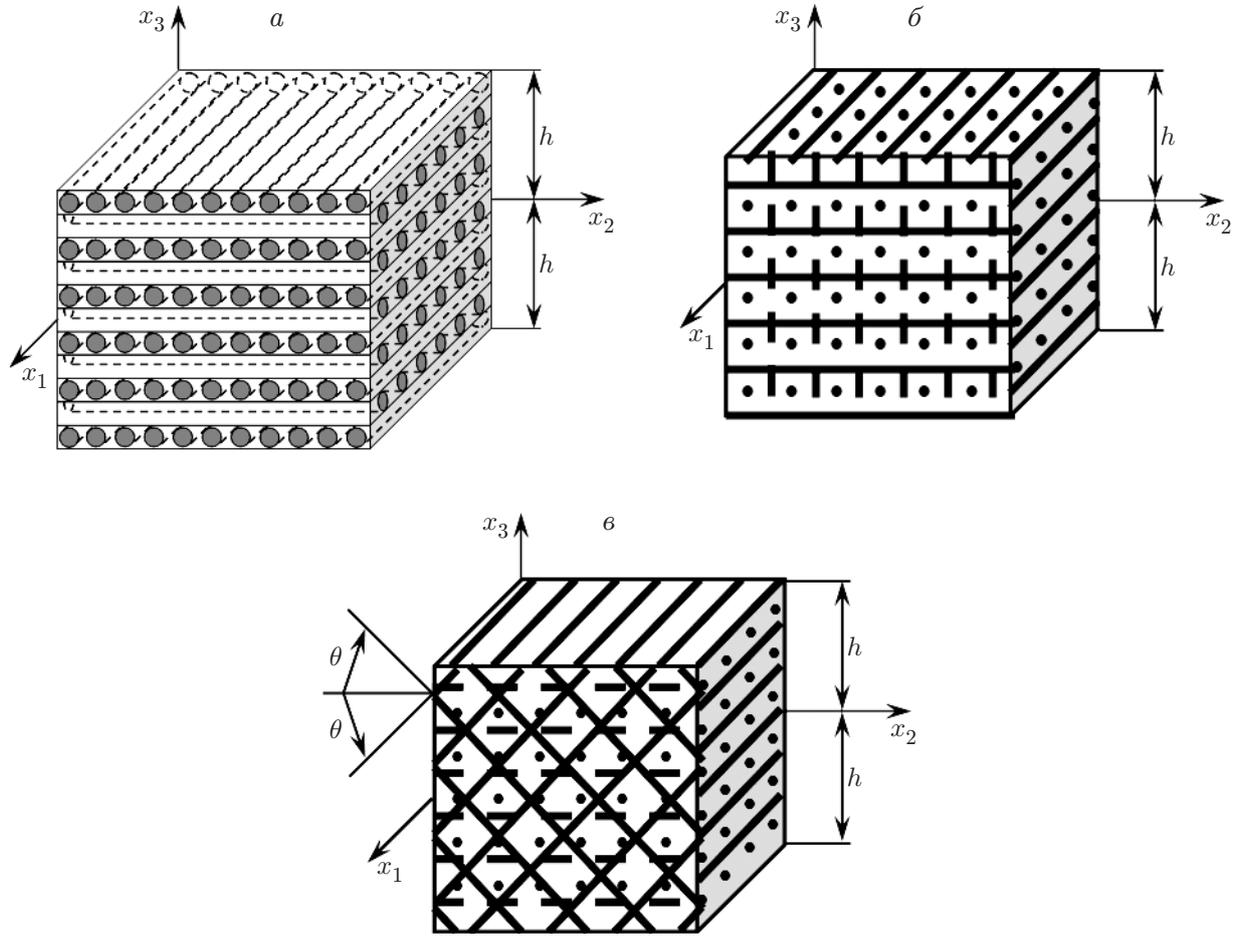


Рис. 1. Схемы элемента пластины из КМ:

*a* — ортогональное плоское армирование в двух направлениях, *б* — ортогональное пространственное армирование в трех направлениях, *в* — неортогональное пространственное армирование в четырех направлениях

2. Между арматурой и связующим реализуется идеальный механический контакт.

3. В представительной ячейке, выделенной в КМ на мини-уровне, напряжения, деформации и их скорости во всех компонентах композиции кусочно-постоянны. Влиянием полей напряжений и деформаций на микроуровне в малых окрестностях границ области контакта арматуры и связующего пренебрегается.

4. Поля напряжений, деформаций и их скоростей в композиции осредняются по объему представительной ячейки (согласно допущению 3 (по правилу простой смеси) пропорционально объемной доле  $\omega_k$  каждого компонента, например:  $\sigma_{ij} = \omega_0 \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_k \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}$ ).

5. Материалы компонентов композиции изотропны, а их вязкоупругопластическое деформирование определяется соотношениями [17, 20]

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \lambda^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - B^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} D^{(k)} \sigma_{ll}^{(k)} - A^{(k)} s_{ij}^{(k)} s_{ml}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ml}^{(k)}, \quad (2)$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N,$$

где

$$A^{(k)} = \frac{G^{(k)} \varkappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} (1 - \varkappa^{(k)}), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3} \left( B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right), \quad \varkappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}},$$

$$g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2\nu^{(k)})},$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(k)},$$

$\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензоров напряжений и малых деформаций;  $p_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензора пластических деформаций;  $E^{(k)}, \nu^{(k)}$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\eta^{(k)}, \mu^{(k)}$  — коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и объемном расширении-сжатии;  $\tau_s^{(k)}$  — функция упрочнения при чистом сдвиге, зависящая от параметра упрочнения  $\chi^{(k)}$  (параметра Одквиста [15, 17, 18]);  $\bar{G}^{(k)}$  — касательный модуль на диаграмме чистого сдвига  $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$ ;  $\gamma_p^{(k)}$  — пластическая составляющая полной угловой деформации при чистом сдвиге;  $\tau^{(k)}$  — касательное напряжение при чистом сдвиге;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера; индекс  $k$  — номер компонента композиции ( $k = 0$  — связующее,  $k \geq 1$  — арматура  $k$ -го семейства); точка означает производную по времени  $t$ .

Равенства (2) с учетом (3) получены в предположении, что деформации  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  могут быть представлены в виде суммы вязкоупругих  $e_{ij}^{(k)}$  и пластических  $p_{ij}^{(k)}$  ( $p_{ii}^{(k)} = 0$ ) составляющих. При этом пластические деформации определяются соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением [15, 18, 20], а вязкоупругие деформации описываются уравнениями тела Максвелла — Больцмана [17]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G^{(k)}} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta^{(k)}}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \dot{\varepsilon}_0^{(k)} = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K^{(k)}} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu^{(k)}}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon_0^{(k)} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ll}^{(k)}, \quad e_0^{(k)} = \frac{1}{3} e_{ll}^{(k)}, \quad \bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} e_0^{(k)}. \quad (5)$$

Если вязкостью в (4) с учетом (5) пренебрегается ( $\eta^{(k)} \rightarrow \infty, \mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$ ), то соотношения (4) сводятся к соотношениям закона Гука, а уравнения (2) — к определяющим равенствам теории Прандтля — Рейсса — Хилла, так как согласно (3)  $B^{(k)} = D^{(k)} = 0$ .

Соотношения (2) целесообразно записать в матричной форме [7, 14, 19]

$$\dot{\sigma}_k = Z_k \dot{\varepsilon}_k + V_k \sigma_k \quad (Z_k = \bar{Z}_k - \bar{\bar{Z}}_k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь

$$\sigma_k = \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T, \quad (7)$$

$$\varepsilon_k = \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T,$$

$Z_k = (z_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{Z}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{Z}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ ,  $V_k = (v_{ij}^{(k)})$  — симметричные матрицы размером  $6 \times 6$ , ненулевые элементы которых определяются следующим образом (см. (2), (3)):

$$\begin{aligned}
v_{ij}^{(k)} &= D^{(k)} - \delta_{ij}B^{(k)}, \quad v_{ll}^{(k)} = -B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G^{(k)} \\
&(i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \\
\bar{z}_{ij}^{(k)} &= A^{(k)}s_i^{(k)}s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}),
\end{aligned} \tag{8}$$

коэффициент  $A^{(k)}$  определяется выражением (3). С учетом (7) имеем

$$\begin{aligned}
T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \\
c^{(k)} &= \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad \mathbf{s}_k^T \dot{\mathbf{e}}_k \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad \mathbf{s}_k^T \dot{\mathbf{e}}_k > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \end{cases} \tag{9} \\
\mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T.
\end{aligned}$$

Равенства (7) определяют соответствие между шестью компонентами  $f_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) некоторого вектора  $\mathbf{f}_k$  и компонентами соответствующего симметричного тензора второго ранга  $f_{jl}^{(k)}$  ( $j, l = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq N$ ). В равенствах (8) по повторяющемуся индексу  $l$  суммирование не проводится.

Как и в [14], для численного интегрирования исследуемой задачи используем метод шагов по времени [14, 20, 21], определяя значения искомых функций в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta$  — шаг по времени. При этом предполагается, что в предыдущий момент времени  $t_{n-1}$  значения следующих функций известны:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1)}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(n-1)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}. \tag{10}$$

Так как в данной работе используется явная схема типа “крест” на трехточечном шаблоне по времени  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , имеющая второй порядок точности по  $\Delta$  [14], преобразуем второе слагаемое в правой части равенства (6), используя формулу трапеций, которая также имеет второй порядок точности по  $\Delta$  [22]. Для текущего момента времени  $t_n$  согласно формуле трапеций

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(n)} - \boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1)} = \Delta(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(n)} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(n-1)})/2, \quad 0 \leq k \leq N. \tag{11}$$

Выражая из (11) вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^{(n)}$  и подставляя в (6), при  $t = t_n$  получаем преобразованное определяющее матричное соотношение

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(n)} = B_k^{(n)} \dot{\mathbf{e}}_k^{(n)} + \mathbf{p}_k^{(n)}, \quad 0 \leq k \leq N, \tag{12}$$

где

$$B_k^{(n)} \equiv (\bar{V}_k^{-1})^{(n)} Z_k^{(n)}, \quad \mathbf{p}_k^{(n)} \equiv (\bar{V}_k^{-1})^{(n)} V_k^{(n)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1/2)}, \quad \bar{V}_k^{(n)} \equiv I - \Delta V_k^{(n)}/2; \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1/2)} = \boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1)} + \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{(n-1)}/2, \quad 0 \leq k \leq N, \tag{14}$$

$I$  — единичная матрица размером  $6 \times 6$ ;  $(\bar{V}_k^{-1})^{(n)}$  — матрица, обратная матрице  $\bar{V}_k^{(n)}$  размером  $6 \times 6$ . Согласно (14) с учетом (10) вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^{(n-1/2)}$  в (13) является известной величиной.

Компоненты матриц  $Z_k$  и  $V_k$  зависят от времени (см. (3), (6), (8), (9)), поэтому при  $t = t_n$  данные матрицы, а значит (согласно (13)), матрица  $B_k^{(n)}$  размером  $6 \times 6$  и шестикомпонентный вектор-столбец  $\mathbf{p}_k^{(n)}$  полагаются линеаризованными с использованием

метода, аналогичного методу переменных параметров упругости [23]. Следовательно, в момент времени  $t_n$  на каждой итерации вектор  $\mathbf{p}_k^{(n)}$  в (12) с учетом (13), (14) известен. При  $\mathbf{p}_k^{(n)} = \mathbf{0}$  соотношение (12) сводится к матричному определяющему уравнению теории Прандтля — Рейсса — Хилла (см. (3) в [14]).

Линеаризованное равенство (12) формально совпадает с соотношениями Дюамеля — Неймана для неоднородной анизотропной среды [7, 19], в которых компоненты вектора  $\mathbf{p}_k^{(n)}$  можно трактовать как известные на данной итерации скорости температурных напряжений. Так как допущения 1–5 аналогичны допущениям, принятым в [7, 14], то, выполняя преобразования, аналогичные приведенным в [7, 14], с учетом соотношений (1), (12) в текущий момент времени  $t_n$  на данной итерации получаем линеаризованное матричное равенство, описывающее вязкоупругопластическое деформирование КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = B^{(n)}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(n)} + \mathbf{p}^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B \equiv \left( \omega_0 B_0 + \sum_k \omega_k B_k E_k \right) H^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - B\mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_k \omega_k (\mathbf{p}_k + B_k \mathbf{r}_k), \\ H \equiv \omega_0 I + \sum_k \omega_k E_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_k \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv D_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad E_k \equiv D_k^{-1} C_k, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (16)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — шестикомпонентные вектор-столбцы скоростей осредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в композиции, имеющие структуру, аналогичную (7);  $B, E_k, C_k$  — матрицы размером  $6 \times 6$ ;  $D_k^{-1}, H^{-1}$  — матрицы, обратные матрицам  $D_k, H$  размером  $6 \times 6$ ;  $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\zeta}_k$  — шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы  $c_{ij}^{(k)}, d_{ij}^{(k)}$  матриц  $C_k, D_k$  и компоненты  $\zeta_i^{(k)}$  вектор-столбцов  $\boldsymbol{\zeta}_k$  определяются следующим образом:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \zeta_1^{(k)} = 0, \quad (17)$$

$$\zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$p_i^{(k)}$  — компоненты вектор-столбца  $\mathbf{p}_k$  (см. (12)). Не приведенные в (18) элементы  $g_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}$  матриц  $G_k, Q_k$  размером  $6 \times 6$  представлены в табл. 21.40 и 21.44 в [19]. Матрицы  $G_k$  и  $Q_k$  задают преобразование (см. (7) в [14]) вектор-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}_k$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  (см. (7)) при переходе от глобальной системы координат  $x_j$  к локальной системе  $x_i^{(k)}$ , связанной с волокном  $k$ -го семейства. При этом ось  $x_1^{(k)}$  направлена вдоль траектории волокна и ее направление определяется двумя углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$  (рис. 2). В этом

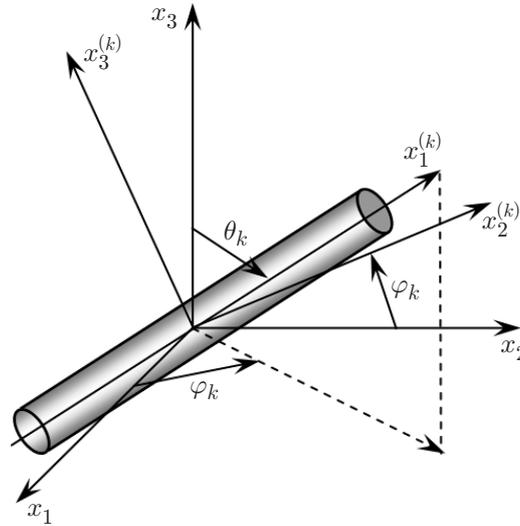


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном  $k$ -го семейства

случае направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) вычисляются по формулам (19). (В равенствах (16), (17) верхний индекс  $n$  опущен.)

Как и в [7, 14], при выводе равенств (15), (16) получают также линейаризованные матричные соотношения

$$\dot{\epsilon}_0^{(n)} = (H^{-1})^{(n)} \dot{\epsilon}^{(n)} - (H^{-1})^{(n)} \mathbf{g}^{(n)}, \quad \dot{\epsilon}_k^{(n)} = E_k^{(n)} \dot{\epsilon}_0^{(n)} + \mathbf{r}_k^{(n)}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (20)$$

В данный момент времени  $t_n$  на текущей итерации первое равенство (20) позволяет выразить скорости деформаций связующего  $\dot{\epsilon}_0$  через скорости осредненных деформаций композиции  $\dot{\epsilon}$ , второе равенство (20) — скорости деформаций волокон  $k$ -го семейства  $\dot{\epsilon}_k$  через скорости деформаций связующего материала  $\dot{\epsilon}_0$ .

Согласно (8), (9), (16)–(19) при  $t = t_n$  на данной итерации матрицы  $B$ ,  $H^{-1}$ ,  $E_k$  и вектор-столбцы  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$  в соотношениях (15), (20) известны. Если вязкоупругие свойства компонентов композиции не учитываются ( $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$ ,  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq k \leq N$ ), то согласно (3), (4), (8), (9), (16), (17) в равенстве (15)  $\mathbf{p}^{(n)} \equiv \mathbf{0}$  и оно сводится к определяющему матричному соотношению для пространственно-армированной композиции, полученному ранее в рамках теории Прандтля — Рейсса — Хилла (см. (10) в [14]). Таким образом, равенство (15) обобщает структурные соотношения, выведенные в [14].

Для описания возможного (например, в случае вариантов армирования, представленных на рис. 1, а, б) слабого сопротивления пластины из КМ поперечным сдвигам используем теорию Редди [14, 19, 24], а геометрическую нелинейность будем учитывать в приближении Кармана. Полагая, что на лицевых поверхностях ( $x_3 = \pm h$ ) конструкция нагружена только нормальными внешними распределенными силами, осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек пластины  $U_i$  аппроксимируем следующим образом [14]:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) (\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad (22)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $w$  — прогиб;  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ( $x_3 = 0$ ) в направлениях  $x_i$ ;  $\varepsilon_{i3}^0$  — деформации поперечных сдвигов в точках срединной плоскости;  $\partial_i$  — оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$ ;  $\Omega$  — область, занимаемая пластиной в плане. В соотношениях (21), (22) функции  $u_i$ ,  $w$ ,  $\varepsilon_{i3}^0$  ( $i = 1, 2$ ) неизвестны.

Для тонкой пластины выражение для напряжения  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для приложений точностью можно представить в виде [25]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (23)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — известные нормальные напряжения на верхней (знак “+”) и нижней (знак “-”) лицевых поверхностях, определяемые силовыми граничными условиями, заданными на этих поверхностях.

Используя обозначения, аналогичные обозначениям (7), из третьего уравнения системы шести алгебраических уравнений (15) при  $t = t_n$  можно определить скорость деформации

$$\dot{\varepsilon}_{33}^{(n)} \equiv \dot{\varepsilon}_3^{(n)} = (b_{33}^{(n)})^{-1} \left( \dot{\sigma}_3^{(n)} - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^{(n)} \dot{\varepsilon}_i^{(n)} - p_3^{(n)} \right). \quad (24)$$

Здесь  $b_{3i}$ ,  $p_3$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — компоненты матрицы  $B$  и вектора  $\mathbf{p}$  в (15); величина  $\dot{\sigma}_3$  определена в (23). Скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_i$ , входящие в правую часть (24), можно получить путем дифференцирования по времени  $t$  соотношений (21), т. е. выразить через функции  $w$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{u}_l$ ,  $\varepsilon_{l3}^0$  ( $l = 1, 2$ ).

Уравнения движения гибкой пластины с учетом (22), (23) имеют вид [14, 19]

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left( F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, & \frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}, \\ 2h\rho\ddot{u}_i &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w, & i &= 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\rho = \omega_0 \rho_0 + \sum_k \omega_k \rho_k, \quad F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad (26)$$

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv 8\varepsilon_{i3}^0/5 - \partial_i w, \quad \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) = 5(\gamma_i + \partial_i w)/8, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0; \quad (27)$$

$\rho_0$ ,  $\rho_k$  — объемная плотность материала связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $\gamma_i$  — функции, введенные для упрощения расчетов;  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$ ,  $M_{ij}$  — внутренние силы и моменты.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи к системе уравнений (25) необходимо добавить граничные и начальные условия. Если при  $t = t_0$  конструкция покоится, то начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(t_0, \mathbf{x}) = w(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \gamma_i(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) = \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = 0, \\ \dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (28)$$

В случае жесткого закрепления точек кромки пластины кинематические граничные условия определяются равенствами

$$u_i(t, \mathbf{x}) = w(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \gamma_i(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

где  $\Gamma$  — контур, ограничивающий область  $\Omega$ . Возможны также другие граничные условия [19, 24, 25], которые в данной работе не приводятся.

**2. Метод расчета.** Как отмечено в п. 1, для численного интегрирования исследуемой задачи предполагается использовать метод шагов по времени [14, 20, 21, 23]. Поэтому будем считать, что в дискретные моменты времени  $t_m$  помимо величин в (10) определены значения следующих функций:

$$\begin{aligned} u_l^{(m)}(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & w^{(m)}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & \gamma_i^{(m)}(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_i(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_k^{(m)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), & l = 1, 2, & i, j = \overline{1, 3}, \\ m = n - 1, n, & & 0 \leq k \leq N, & & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| \leq h. \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда с использованием (26) в момент времени  $t_n$  можно вычислить силы и моменты  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$ ,  $M_{ij}$ , а также внешние нагрузки в правых частях уравнений (25).

Так же как и в [14], для аппроксимации производных по времени  $t$  используем центральные разности на трехточечном шаблоне. Это позволяет построить явную схему численного интегрирования рассматриваемой задачи. Заменяя вторые производные по  $t$  в левых частях равенств (25) их конечно-разностными аналогами, с учетом обозначений, аналогичных обозначениям в (10), (30), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} (w^{(n+1)} - 2w^{(n)} + w^{(n-1)}) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left( F_{l3}^{(n)} + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^{(n)} \partial_j w^{(n)} \right) + (\sigma_{33}^{(+)}(n) - (\sigma_{33}^{(-)}(n)), \\ \frac{2h\rho}{\Delta^2} (u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij}^{(n)} - F_{j3}^{(n)} \partial_j w^{(n)}) - \\ &\quad - ((\sigma_{33}^{(+)}(n) - (\sigma_{33}^{(-)}(n)) \partial_i w^{(n)}), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} (\gamma_i^{(n+1)} - 2\gamma_i^{(n)} + \gamma_i^{(n-1)}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^{(n)} - F_{i3}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку правые части в уравнениях (31) известны, из данных уравнений определяем функции  $w^{(n+1)}$ ,  $u_i^{(n+1)}$ ,  $\gamma_i^{(n+1)}$ . Зная эти функции, по формулам (21), (27) вычисляем осредненные деформации  $\varepsilon_{ij}^{(n+1)}$ . Поскольку при  $t = t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{(n-1)}$  известны (см. (21), (27), (30)), используя формулы численного дифференцирования и (24), определяем скорости осредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$ . Затем по формулам (20) с учетом (7) последовательно определяем скорости деформаций компонентов композиции  $\dot{\varepsilon}_k^{(n)}$ , а по формулам (12) — скорости напряжений в компонентах композиции  $\dot{\sigma}_k^{(n)}$ . Далее на основе формул конечно-разностного дифференцирования по известным  $\dot{\sigma}_k^{(n)}$ ,  $\sigma_k^{(n-1)}$  определяем  $\sigma_k^{(n+1)}$  ( $0 \leq k \leq N$ ), после чего все функции, указанные в (30), становятся известными при  $m = n, n + 1$ , поэтому по предложенной схеме можно построить решение в следующий момент времени  $t_{n+2}$  и т. д.

С учетом структуры левых частей равенств (31), для того чтобы начать вычисления по предложенной численной схеме, необходимо знать значения функций  $w^{(m)}$ ,  $u_i^{(m)}$ ,  $\gamma_i^{(m)}$  ( $m = 0, 1$ ). Функции  $w^{(0)}$ ,  $u_i^{(0)}$ ,  $\gamma_i^{(0)}$  задаются начальными условиями (28). Если при  $t = t_0$  конструкция покоится (см. (28)) и внешняя нагрузка отсутствует:  $(\sigma_{33}^{(+)}(0) - (\sigma_{33}^{(-)}(0)) = 0$ , то с точностью порядка  $\Delta^3$  имеем  $w^{(1)} \approx u_i^{(1)} \approx 0$ ,  $\gamma_i^{(1)} \approx 0$ ,  $i = 1, 2$  [14].

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [26, 27]

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_s$ , ГПа	$\eta$ , МПа · с	$\mu$ , МПа · с
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114	50	$\infty$
Стекловолокно марки S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	200	$\infty$

Заменяя в системе (31) производные  $\partial_i(\cdot)$  их конечно-разностными аналогами и добавляя к ней необходимые граничные условия (например, (29)), получаем явную численную схему типа “крест”.

**3. Обсуждение результатов расчетов.** Рассмотрим изгиб прямоугольных пластин толщиной  $2h = 2$  см с размерами в плане  $a = 60$  см,  $b = 20$  см ( $\Omega: |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq b/2$ ). Кромки пластин жестко закреплены (см. (29)). Пластины, покоящиеся в начальный момент времени  $t_0 = 0$  (см. (28)), нагружаются снизу давлением, возникающим вследствие воздействия воздушной взрывной волны [21]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}. \end{cases} \quad (32)$$

Здесь

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (33)$$

$t_{\max}$  — момент времени, в который давление  $p(t)$  достигает максимума  $p_{\max}$ ;  $t_{\min}$  — момент времени, после достижения которого нагрузку  $p(t)$  можно считать пренебрежимо малой по сравнению с  $p_{\max}$  (согласно (33) предполагается  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). На основе экспериментальных данных [21] в расчетах принято  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс.

Пластины изготовлены из эпоксидной смолы и армированы стеклянными волокнами марки S-994 [26, 27]. Мгновенное упругопластическое деформирование материалов компонентов композиции на стадии активного нагружения описывается билинейной диаграммой растяжения-сжатия, определяемой уравнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где  $\sigma_s^{(k)}, E_s^{(k)}$  — предел текучести и модуль линейного упрочнения материала  $k$ -й фазы композиции. Физико-механические характеристики материалов компонентов рассматриваемой композиции приведены в таблице. Согласно данным, приведенным в таблице,  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ , поэтому объемная вязкость материалов не учитывается (см. (3), (4)).

Структуры армирования полагаются однородными и прямолинейными:  $\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}, \omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq N$  (см. (1), (19)). Рассматриваются структуры армирования трех типов: 1) ортогональное плоское армирование в двух направлениях (см. рис. 1,а): два ( $N = 2$ ) семейства волокон укладываются в плоскости пластины по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  с плотностями армирования  $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$ ; 2) ортогональное пространственное армирование в трех направлениях (см. рис. 1,б): три ( $N = 3$ ) семейства волокон укладываются по направлениям  $Ox_1, Ox_2$  и  $Ox_3$  с плотностями армирования  $\omega_1 = \omega_3 = 0,1, \omega_2 = 0,2$ ; 3) пространственное армирование в четырех направлениях (см. рис. 1,в): первые два семейства волокон укладываются по направлениям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , третье и четвертое — по направлениям, определяемым углами  $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2, \theta = \pi/4$  (см. рис. 1,в). В последнем случае плотности армирования имеют значения  $\omega_1 = 0,1, \omega_2 = 0,2, \omega_3 = \omega_4 = 0,05$ . Во всех структурах армирования суммарный расход арматуры является фиксированным.

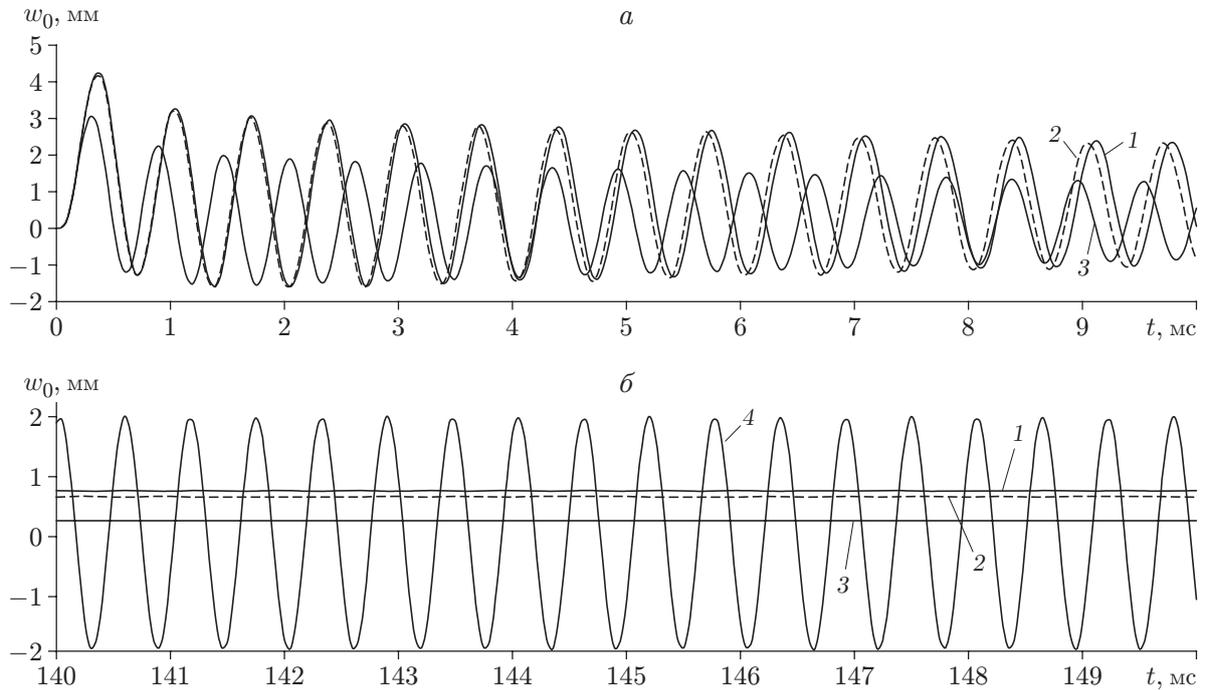


Рис. 3. Зависимость прогибов в центральных точках пластин из КМ от времени:  $a$  —  $t = 0 \div 10$  мс,  $b$  —  $t = 140 \div 150$  мс; 1–3 — расчет с учетом вязкоупругопластических деформаций (1 — армирование в двух направлениях, 2 — армирование в трех направлениях, 3 — армирование в четырех направлениях), 4 — расчет с учетом упругопластических деформаций при структуре армирования в четырех направлениях

На рис. 3 приведены зависимости прогибов в центральных точках рассматриваемых пластин из КМ от времени ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), на рис. 4 — зависимость максимальных значений интенсивности деформаций материалов компонентов композиции  $\varepsilon_*^{(k)}$  от времени ( $\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$ ,  $|x_1| \leq a/2$ ,  $|x_2| \leq b/2$ ,  $|x_3| \leq h$ ). На рис. 3,  $a$ , 4,  $a$  представлены зависимости, полученные при  $p_{\max} = 6$  МПа (см. (32)) и малых значениях времени ( $t = 0 \div 10$  мс), на рис. 3,  $b$ , 4,  $b$  — при  $140 \text{ мс} \leq t \leq 150 \text{ мс}$ .

Поведение кривых 4 на рис. 3,  $b$ , 4,  $b$  свидетельствует о том, что в расчетах с использованием теории Прандтля — Рейсса — Хилла армированная пластина в течение неограниченного времени осциллирует в окрестности положения, определяемого величиной остаточного прогиба, однако точно рассчитать величину остаточного прогиба и остаточных деформаций материалов компонентов композиции в рамках этой теории невозможно. Поведение кривых 1–3 на рис. 3,  $a$  показывает, что согласно расчетам с помощью разработанной модели вязкоупругопластического деформирования пластины из КМ ее осцилляции со временем затухают и к моменту времени  $t = 150$  мс практически прекращаются. Это позволяет определить остаточные прогибы и остаточные деформации материалов компонентов композиций рассматриваемых конструкций из КМ.

Результаты сравнения кривых 3, 4 на рис. 4,  $b$  показывают, что на основе расчетов с использованием теории Прандтля — Рейсса — Хилла невозможно даже приближенно оценить величину остаточных деформаций связующего пластины со структурой армирования в четырех направлениях. Действительно, даже если осреднить величины локальных максимумов и минимумов на кривой 4, полученная кривая будет расположена существенно выше линии 3. В результате осреднения локальных экстремумов на кривой 4 на рис. 3,  $b$  получаем остаточные прогибы, меньшие ординат точек линии 3 на рис. 3,  $b$ .

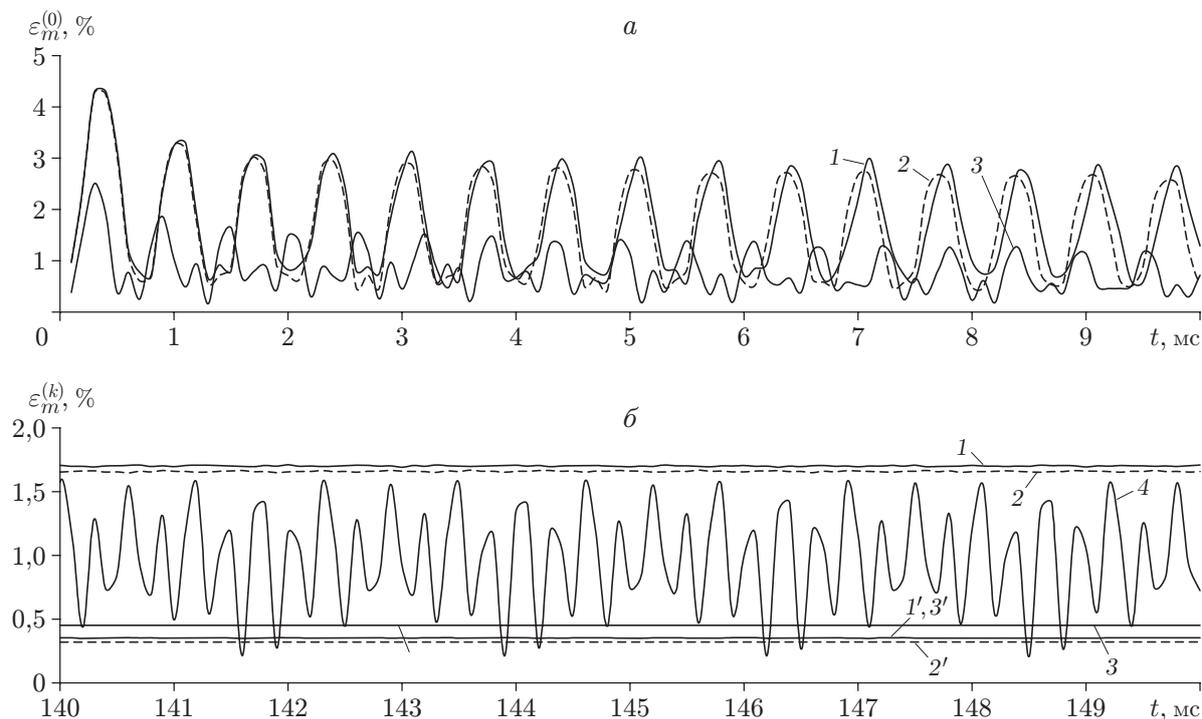


Рис. 4. Зависимость максимальной интенсивности деформаций материалов компонентов композиций пластин от времени:

$a$  —  $t = 0 \div 10$  мс,  $b$  —  $t = 140 \div 150$  мс; 1–3 — связующий материал при вязкоупругопластическом деформировании (1 — армирование в двух направлениях, 2 — армирование в трех направлениях, 3 — армирование в четырех направлениях), 4 — связующий материал при упругопластическом деформировании и структуре армирования в четырех направлениях; 1'–3' — волокна второго семейства при вязкоупругопластическом деформировании (1' — армирование в двух направлениях, 2' — армирование в трех направлениях, 3' — армирование в четырех направлениях)

Поведение кривых 1, 1' и 2, 2' на рис. 3, 4 свидетельствует о том, что замена плоской структуры армирования (кривые 1, 1') на пространственную структуру армирования в трех направлениях (кривые 2, 2') приводит к незначительному уменьшению значений максимального и остаточного прогибов, а также остаточных деформаций материалов компонентов композиции. Результаты сравнения кривых 1 и 3 показывают, что замена структуры армирования в двух направлениях на пространственную структуру армирования в четырех направлениях (кривые 3) приводит к существенному (на 27 %) уменьшению максимального прогиба пластины из КМ (первые локальные максимумы на кривых 1, 3 на рис. 3,  $a$ ), при этом остаточный прогиб уменьшается более чем в два раза (кривые 1, 3 на рис. 3,  $b$ ). При такой замене структуры почти в два раза уменьшается максимальное значение  $\varepsilon_m^{(0)}$  (первые локальные максимумы на кривых 1, 3 на рис. 4,  $a$ ) и более чем в три раза уменьшается остаточная величина  $\varepsilon_m^{(0)}$  (кривые 1, 3 на рис. 4,  $b$ ), при этом остаточные деформации волокон второго семейства практически не изменяются (кривые 1', 3' на рис. 4,  $b$ ).

Выше рассматривались относительно толстые пластины ( $2h/\min(a, b) = 1/10$ ). Дополнительные расчеты показали, что в случае относительно тонких конструкций из КМ ( $2h/\min(a, b) \leq 1/20$ ) замена плоской структуры армирования в двух направлениях на пространственные структуры не приводит к уменьшению максимальных и остаточных

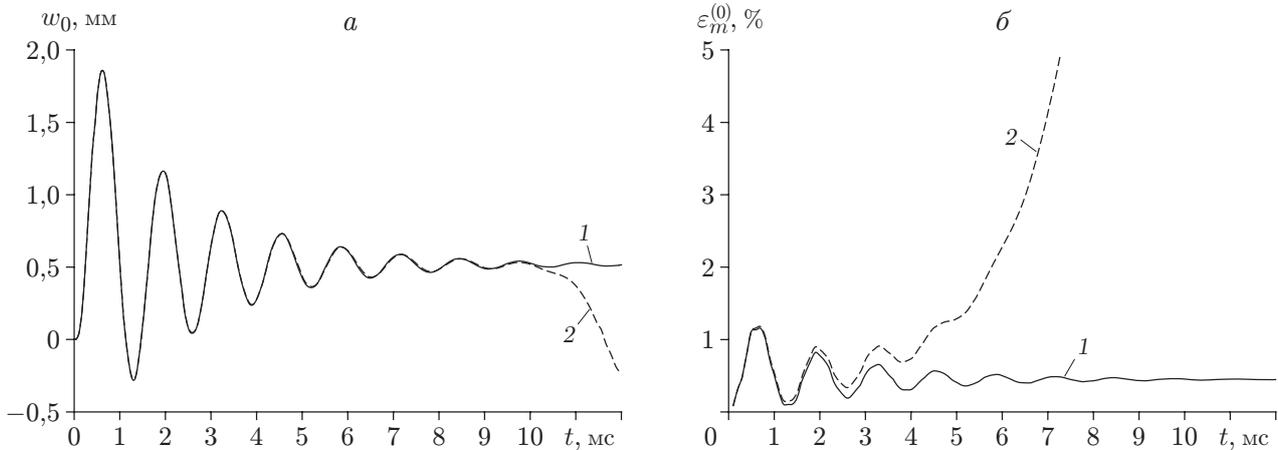


Рис. 5. Зависимости прогиба в центральной точке (а) и максимальной интенсивности деформаций (б) от времени для изотропной пластины из эпоксидной смолы:

1 — расчет с использованием определяющего уравнения (12) с учетом (13), (14), 2 — расчет с использованием определяющего уравнения (12) с учетом (34)

величин прогибов пластины и интенсивности деформаций материалов компонентов композиции.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Преобразование матричных определяющих уравнений (6) к виду (12) с использованием (10), (11), (13), (14) представляется излишним, так как соотношения (6) при  $t = t_n$  можно сразу записать в форме (12), если вместо (13) использовать выражения

$$B_k^{(n)} \equiv Z_k^{(n)}, \quad \mathbf{p}_k^{(n)} \equiv V_k^{(n)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(n)}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (34)$$

Однако при использовании соотношений (12) с учетом (34) численная схема типа “крест”, предложенная в п. 2, оказалась неустойчивой, несмотря на то что необходимое условие устойчивости этой схемы (условие Куранта) выполняется. На рис. 5 представлены зависимости  $w_0(t)$  и  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , полученные для однородной пластины из эпоксидной смолы с размерами, указанными выше, при  $p_{\max} = 0,6$  МПа,  $\eta^{(0)} = 1$  МПа·с (остальные характеристики материала конструкции приведены в таблице). Результаты анализа кривых 2 на рис. 5 показывают, что численная схема типа “крест”, в которой используется формула (34), неустойчива.

**Закключение.** Разработана структурная модель вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных пластин, позволяющая рассчитывать их затухающие осцилляции, вызванные действием кратковременных интенсивных нагрузок, и определять остаточные перемещения, а также остаточные деформации и напряжения в материалах компонентов композиции.

Расчеты показали, что величины остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций материалов компонентов композиции существенно зависят от структуры армирования. Так, в случае стеклопластиковой композиции замена плоской структуры армирования в относительно толстой пластине на пространственную структуру армирования в четырех направлениях позволяет уменьшить остаточный прогиб более чем в два раза, а максимальную величину интенсивности остаточных деформаций связующего — более чем в три раза. В случаях относительно тонких пластин из КМ такая замена структуры армирования, как правило, неэффективна. Вследствие больших значений пределов текучести высокопрочная арматура при деформировании запасает значительное количество

упругой энергии, поэтому амплитуда колебаний конструкции из КМ на начальном этапе деформирования в несколько раз больше величины остаточного прогиба. Аналогичные закономерности характерны и для интенсивности деформаций материалов компонентов композиции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Жигун И. Г., Душин М. И., Поляков В. А., Якушин В. А.** Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров*. 1973. № 6. С. 1011–1018.
2. **Тарнопольский Ю. М.** Пространственно-армированные композиционные материалы: Справ. / Ю. М. Тарнопольский, И. Г. Жигун, В. А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987.
3. **Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., et al.** A new generation of 3D woven fabric performs and composites // *SAMPE J.* 2001. V. 37, N 3. P. 3–17.
4. **Шустер Й., Гейдер Д., Шарп К., Глования М.** Измерение и моделирование теплопроводности трехмерных тканых композитов // *Механика композит. материалов*. 2009. Т. 45, № 2. С. 241–254.
5. **Тарнопольский Ю. М., Поляков В. А., Жигун И. Г.** Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 853–860.
6. **Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А.** Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно-армированных композитов // *Механика композит. материалов*. 1982. № 1. С. 14–22.
7. **Янковский А. П.** Определение термоупругих характеристик пространственно-армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Механика композит. материалов*. 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
8. **Соломонов Ю. С.** Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю. С. Соломонов, В. П. Георгиевский, А. Я. Недбай, В. А. Андрияшин. М.: Физматлит, 2014.
9. **Kazanci Z.** Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2011. V. 46. P. 807–817.
10. **Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benrdictus R.** Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates: A review // *Intern. J. Impact Engng.* 2014. V. 67. P. 27–38.
11. **Vena P., Gastaldi D., Contro R.** Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Intern. J. Plasticity.* 2008. V. 24. P. 483–508.
12. **Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.** Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Intern. J. Plasticity.* 2012. V. 36. P. 86–112.
13. **Ахундов В. М.** Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Механика композит. материалов*. 2015. Т. 51, № 3. С. 539–558.
14. **Янковский А. П.** Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // *ПМТФ*. 2018. Т. 59, № 6. С. 112–122.
15. **Зубчанинов В. Г.** Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010.
16. **Писаренко Г. С.** Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справ. / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. Киев: Наук. думка, 1971.
17. **Фрейденталь А.** Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. М.: Физматгиз, 1962.

18. **Коларов Д.** Механика пластических сред / Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. М.: Мир, 1979.
19. **Малмейстер А. К.** Сопротивление жестких полимерных материалов / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. Рига: Зинатне, 1972.
20. **Иванов Г. В.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел / Г. В. Иванов, Ю. М. Волчков, И. О. Богульский, С. А. Анисимов, В. Д. Кургузов. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002.
21. **Houlston R., DesRochers C. G.** Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Structures. 1987. V. 26, N 1/2. P. 1–15.
22. **Деккер К.** Устойчивость методов Рунге — Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. М.: Мир, 1988.
23. **Хажинский Г. М.** Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Науч. мир, 2011.
24. **Reddy J. N.** Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.
25. **Богданович А. Е.** Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987.
26. **Справочник** по композитным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988.
27. **Композиционные материалы:** Справ. / Под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985.

*Поступила в редакцию 14/III 2019 г.,  
после доработки — 29/VII 2019 г.  
Принята к публикации 30/IX 2019 г.*

---