УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ «ХОЛОДНОГО» УГЛА

И. Б. Семенова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Численно исследовано поле скоростей в окрестности точки контакта свободной и твердой границ в задаче о бестигельной зонной плавке, рассмотренной в модельной двумерной постановке. Отмечены четко выраженные пограничный слой Прандтля на твердой границе и пограничный слой Марангони на свободной границе, большие градиенты продольной скорости вдоль свободной границы в непосредственной близости от «холодного» угла. Впервые обнаружено, что эпюра скорости при удалении от твердой границы имеет максимум, что не характерно для обычного течения вблизи твердой границы.

Введение. Последние годы большой научный и практический интерес представляло изучение проблем, связанных с бестигельной зонной плавкой, которую можно описать следующим образом: кристалл (обычно цилиндрической формы) помещается внутри нагревателя, в результате чего в нем создается жидкая зона. Работы, посвященные этим проблемам, можно разделить на три группы: работы, нацеленные на качественный анализ гидродинамических явлений [1], экспериментальные [2] и численные исследования. Их цель — нахождение полей скоростей и температур во всей области течения [3]. Во многих трудах рассматривались вопросы устойчивости жидкой зоны (см., например, [4, 5]). Асимптотические методы решения до сих пор не разработаны. При численных методах решения, хорошо отражающих ситуацию в центральной области течения, возникают затруднения в работе с угловыми областями. Это связано со всплесками поверхностной скорости вблизи «холодных» стенок из-за разгона жидкости вдоль свободной границы вследствие эффекта Марангони и последующего торможения на твердой границе. Один из подходов к преодолению этих трудностей предложен в [3], другой — в данной работе. Задача исследуется в двумерной постановке: непосредственно вблизи точки контакта используется асимптотика Моффатта [6], в ядре течения — схема Прандтля — Бэтчелора [7], а в промежуточной области производится численный расчет.

1. Постановка задачи. Пусть жидкая фаза занимает прямоугольную область, ограниченную двумя твердыми прямолинейными параллельными границами раздела твердой и жидкой фаз и двумя ортогональными к ним прямолинейными свободными границами раздела жидкой фазы и газа. Жидкость предполагается вязкой и несжимаемой, движение — установившимся. На свободных границах задается постоянный температурный градиент A, который в задаче рассматривается как параметр.

Характерное значение скорости движения жидкости может быть оценено [8] по формуле

$$U = (h\nu)^{1/3}\left(\frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu}\right)^{2/3},$$

где h — характерная длина зоны расплава (высота прямоугольника); ν — коэффициент кинематической вязкости; σ_T — коэффициент в линейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры; ρ — плотность.

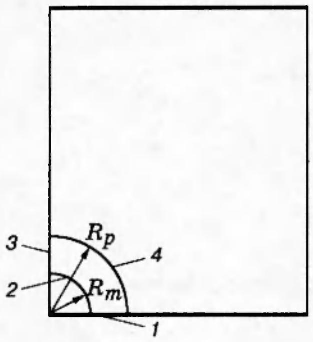

Рис. 1. Область течения:
1 — твердая граница, *2* — граница радиуса R_m (на ней применимо решение Моффатта), *3* — свободная граница, *4* — граница радиуса R_p (на ней применимо решение Прандтля — Бэтчелора)

Если градиент температуры A достаточно велик, а перечисленные выше физические параметры соответствуют расплавленному полупроводнику, то значение скорости достигает нескольких сантиметров в секунду. Это движение жидкости с большими числами Рейнольдса, так как по определению $\mathrm{Re} = Uh/\nu$.

Таким образом, предполагая все линии тока в прямоугольной области замкнутыми, правомерно применить схему Прандтля — Бэтчелора [7]. Однако непосредственно в «холодном» угле эта схема не пригодна. Руководствуясь предположением о возникновении интересных эффектов в непосредственной близости от угла, выделяем сектор в угле, его радиус принимаем за новый характерный размер. Рассматривая движение жидкости в этом секторе (предполагая радиус достаточно малым) при выполнении условий прилипания на твердой границе (см. п. **2**) и непрерывности скорости, можно применить в этой области аппроксимацию Стокса [9]:

$$\nabla p - \Delta \mathbf{v} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

где p — давление; $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Здесь правомерно использовать решение Моффатта [6].

Область исследования выбрана так, чтобы на одной из границ кольцевого сектора было справедливо решение Моффатта, на другой — Прандтля — Бэтчелора, третья граница была свободной, четвертая — твердой (рис. 1).

В полученной области решаются полные уравнения Навье — Стокса, записанные в полярных координатах (r, φ) в терминах завихренности ω и функции тока ψ:

$$\nu\Big(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2}\Big) + \frac{1}{r}\Big(-\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\omega.$$

2. Вывод граничных условий. На твердой неподвижной границе *1* условие прилипания [8]

$$u = 0, \quad v = 0, \tag{2.1}$$

где u, v — компоненты скорости по осям x, y соответственно, в терминах функции тока имеет вид

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0. \tag{2.2}$$

На свободной границе *3* кинематическое условие [8]

$$u = 0 \tag{2.3}$$

в терминах функции тока имеет вид

$$\psi = 0. \tag{2.4}$$

Динамическое условие эквивалентно двум скалярным условиям [8]. Одно из них (равенство разности нормального напряжения и атмосферного давления капиллярному давлению) считаем выполненным на плоской свободной границе в первом приближении благодаря малости капиллярного числа $\mathrm{Ca} = \sigma_T A/\sigma_0$, а второе условие необходимо удовлетворить:

$$2\rho\nu \mathbf{s} \cdot D \cdot \mathbf{n} = p - p_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{s}} \Longrightarrow P_{xy} = \rho\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = A|\sigma_T|, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{s}$ — касательный вектор; D — тензор деформации; $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к свободной поверхности; $p_0 = \mathrm{const}$ — среднее значение давления; P_{xy} — компонента тензора напряжений; $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0)$ — поверхностное натяжение; $\sigma_0 = \mathrm{const}$ — среднее значение поверхностного натяжения; T — температура; $T_0 = \mathrm{const}$ — среднее значение температуры.

Уравнение (2.5) в терминах завихренности имеет вид

$$\omega = \frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu}. \tag{2.6}$$

Граница *2* выбирается из соображений пригодности решения Моффатта, т. е. из условия малости числа Рейнольдса. Для этого в прямоугольной области рассматриваются уравнения

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}p_y + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

с граничными условиями: на твердой границе (2.1), на свободной границе (2.3), (2.5) и $T = Ay$, где p_x, p_y — компоненты градиента давления.

Пусть V — приращение скорости в пограничном слое, δ — толщина пограничного слоя. Тогда из уравнений и граничных условий следует

$$\frac{\rho\nu V}{\delta} = A|\sigma_T|, \qquad \frac{V^2}{h} = \frac{\nu V}{\delta^2},$$

откуда можно оценить толщину пограничного слоя Марангони:

$$\delta = \left(\frac{\rho\nu^2 h}{A|\sigma_T|}\right)^{1/3},$$

и из оценки числа Рейнольдса через оценку для приращения скорости V

$$\mathrm{Re} = \left(\frac{A|\sigma_T|h^2}{\rho\nu^2}\right)^{2/3}, \qquad V = (h\nu)^{1/3}\left(\frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu}\right)^{2/3}$$

можно оценить величину радиуса границы *2* ($\mathrm{Re} = (VR_m/\nu) \ll 1$):

$$R_m \ll \frac{1}{h^{1/3}}\left(\frac{\nu^2\rho}{2A|\sigma_T|}\right)^{2/3}$$

(R_m бралось порядка $3 \cdot 10^{-5}$ см).

Переходим к построению решения типа Моффатта. Решение уравнения $\Delta\Delta\psi = 0$, эквивалентного системе Стокса, в плоском случае ищется в виде ряда

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} r^k g_k(\varphi). \tag{2.7}$$

После подстановки решения (2.7) в известные формулы [9] для компонент тензора напряжений получим

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu\Big(-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r}\Big) = -p + 2\rho\nu(-r^{k-2}g_k'(\varphi) + kr^{k-2}g_k'(\varphi)),$$

$$P_{r\varphi} = \rho\nu\Big(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) = \rho\nu(r^{k-2}g_k''(\varphi) - r^{k-2}g_k(\varphi)k(k-1) + kr^{k-2}g_k(\varphi)), \quad (2.8)$$

$$P_{\varphi\varphi} = -p + 2\rho\nu\Big(-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\Big) = -p + 2\rho\nu(-kr^{k-2}g_k'(\varphi) + r^{k-2}g_k'(\varphi))$$

(P_{rr}, $P_{r\varphi}$, $P_{\varphi\varphi}$ — компоненты тензора напряжений). Из (2.8) видно, что члены с $k < 2$ дадут бесконечные напряжения при $r \to 0$, чего в данной задаче быть не может, значит, остаются только члены с $k \geqslant 2$. Решение находится в виде $g_k(\varphi) = B\sin k\varphi + C\cos k\varphi + D\sin(k-2)\varphi + E\cos(k-2)\varphi$. Функция тока и завихренность должны удовлетворять граничным условиям (2.2), (2.4) и (2.6), которые дадут условия для $g_k(\varphi)$:

$$g_k(0) = 0, \qquad g_k'(0) = 0, \qquad g_k\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0,$$

$$g_k''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu} \quad \text{при} \quad k = 2, \quad g_k''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 2.$$

Откуда следует система из четырех уравнений на четыре неизвестных коэффициента B, C, D, E, совместная при целых значениях k, что определяется из решения уравнения

$$k^2(k-2)\sin\frac{k\pi}{2}\cos(k-2)\frac{\pi}{2} + k(k-2)^2\cos\frac{k\pi}{2}\sin(k-2)\frac{\pi}{2} =$$
$$= k^3\sin(k-2)\frac{\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2} + (k-2)^3\cos(k-2)\frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2},$$

полученного при занулении определителя соответствующей матрицы. Наличие действительных решений обеспечивает отсутствие периодической структуры решения типа цепочки вихрей [6]. Проще говоря, это следует непосредственно из [6], так как угол контакта твердой и свободной границ в данной задаче равен 90°, что превышает критический угол 78°.

В результате малости r правомерно пренебречь всеми членами с $k > 2$, и решение будет иметь вид

$$\psi = r^2\frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu}\Big(\frac{1}{2\pi}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi - \frac{1}{\pi}\varphi + \frac{1}{4}\Big).$$

Далее с учетом того, что $\omega = -\Delta\psi$, условие для завихренности записывается в виде

$$\omega = \frac{A|\sigma_T|}{\rho\nu}\Big(\frac{4}{\pi}\varphi - 1\Big).$$

На границе *4* предполагается верным решение Прандтля — Бэтчелора [7]. Для его построения в определенной выше прямоугольной области решается уравнение

$$\Delta\psi = -\Omega \qquad (2.9)$$

с граничным условием $\psi = 0$. Здесь Ω — это постоянная завихренность, рассматриваемая как второй параметр задачи (первый параметр — температурный градиент A). Решение неоднородного уравнения (2.9) ищется в виде суммы двух решений $\psi = \hat\psi + \Phi$: частного в виде $\hat\psi = (\Omega/2)x(l-x)$ для неоднородного уравнения (2.9) с граничными условиями

$\psi = 0$ при $x = 0$, $x = l$ и общего — для однородного $\Delta\Phi = 0$ с граничными условиями $\Phi = 0$ при $x = 0$, $x = l$, $\Phi = -(\Omega/2)x(l-x)$ при $y = 0$, $y = h$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$. В свою очередь, однородное уравнение решаем методом разделения переменных с дальнейшим использованием разложения в ряд Фурье по синусам, продолжая нечетным образом функцию $f(x) = -(\Omega/2)x(l-x)$ (на «область» $-l \leqslant x \leqslant 0$, где l — длина прямоугольника). Это решение не приводится. Таким образом, условия на границе *4* будут иметь вид

$$\omega = \Omega, \qquad \psi = \frac{\Omega}{2} R_p \cos\varphi (l - R_p \cos\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi R_p \cos\varphi}{l},$$

где $a_k = 0$ при k четном,

$$a_k = -4\frac{\Omega l^2}{\pi^3 k^3}\left(\operatorname{ch}\frac{k\pi R_p \sin\varphi}{l} + \frac{1 - \operatorname{ch}(k\pi h/l)}{\operatorname{sh}(k\pi h/l)} \operatorname{sh}\frac{k\pi R_p \sin\varphi}{l}\right) \tag{2.10}$$

при k нечетном (через R_p обозначен радиус внешней границы области, на которой справедливо решение Прандтля — Бэтчелора).

Отсюда видно, что на границах *2–4* имеются условия как для ψ, так и для ω, а на границе *1* условия для ω нет. Для его получения можно воспользоваться приближенным условием [10], основной идеей которого является численное представление условия для ω через условия для ψ с использованием разложения в ряд Тейлора. Легко видеть, что в «верхнем» угле, т. е. в точке контакта *3*-й и *4*-й границ, условия для ω не стыкуются. но известно, что при термокапиллярном движении жидкости при $\mathrm{Re} \gg 1$ на свободной ее поверхности образуется пограничный слой Марангони. С его помощью можно сгладить условия в «верхнем» угле [8]. Аналогичная ситуация возникает и в «нижнем» угле, т. е. в точке контакта *1*-й и *4*-й границ, где сглаживание производится с помощью пограничного слоя Прандтля. Таким образом, задача полностью поставлена.

3. Метод численного решения. Введение полярных координат позволило перейти к прямоугольной сетке для нахождения численного решения, которое было проведено методом установления, т. е. путем введения фиктивного времени. Использовалась схема Писмана — Рэкфорда (уравнения расщеплялись по направлениям) с шаблоном «крест». Разностный аналог уравнений для ψ:

$$\frac{\psi_{k,j}^{n+1/2} - \psi_{k,j}^{n}}{\tau/2} r_j^2 = r_j^2 \frac{\psi_{k,j+1}^{n+1/2} - 2\psi_{k,j}^{n+1/2} + \psi_{k,j-1}^{n+1/2}}{h_r^2} + r_j^2 \omega_{k,j}^{n} +$$
$$+ r_j \frac{\psi_{k,j+1}^{n+1/2} - \psi_{k,j-1}^{n+1/2}}{2h_r} + \frac{\psi_{k+1,j}^{n} - 2\psi_{k,j}^{n} + \psi_{k-1,j}^{n}}{h_\varphi^2},$$

$$\frac{\psi_{k,j}^{n+1} - \psi_{k,j}^{n+1/2}}{\tau/2} r_j^2 = r_j^2 \frac{\psi_{k,j+1}^{n+1/2} - 2\psi_{k,j}^{n+1/2} + \psi_{k,j-1}^{n+1/2}}{h_r^2} +$$
$$+ r_j \frac{\psi_{k,j+1}^{n+1/2} - \psi_{k,j-1}^{n+1/2}}{2h_r} + \frac{\psi_{k+1,j}^{n+1} - 2\psi_{k,j}^{n+1} + \psi_{k-1,j}^{n+1}}{h_\varphi^2}.$$

Для ψ схема абсолютно устойчива [11].

Так же запишется разностный аналог уравнений для ω, где для конвективных членов использована схема с разностями против потока [11]. Схема остается условно устойчивой. Все четыре уравнения легко сводятся к виду

$$a_j f_{k,j}^{n+1/2} + b_j f_{k,j+1}^{n+1/2} + c_j f_{k,j-1}^{n+1/2} + A_j = 0, \quad a_k f_{k,j}^{n+1} + b_k f_{k+1,j}^{n+1} + c_k f_{k-1,j}^{n+1} + A_k = 0.$$

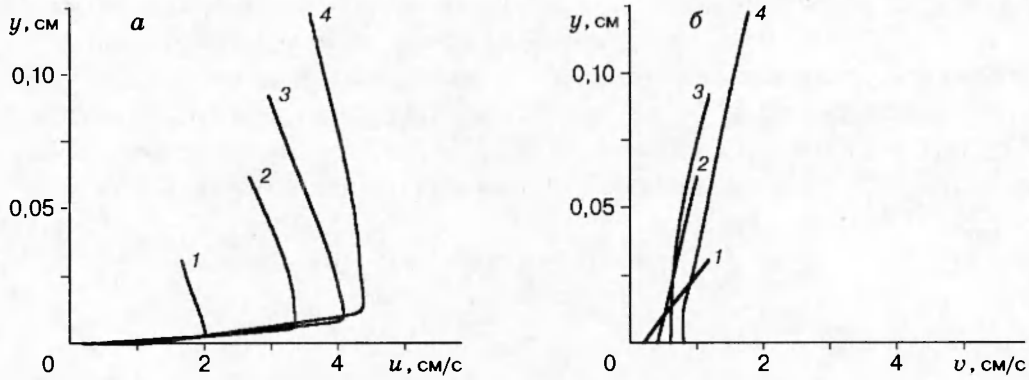

Рис. 2. Эпюры компонент скорости u и v (*а* и *б*) для четырех близких расстояний от «холодного» угла (линии *1–4*) вблизи твердой границы ($A = 5$ град/см; $\Omega = 6{,}649$ с$^{-1}$)

Решение проводится диагональной прогонкой. Необходимо следить за выполнением условия диагонального преобладания $|a_j| \geqslant |b_j| + |c_j|$. Заметим, что для $\psi^n_{k,j}$ оно всегда имеет место.

Для выполнения этой оценки в программе шаг по фиктивному времени τ на каждом временном слое подстраивается под решение. Численные значения параметров выбраны для расплава германия: $\rho = 5{,}571$ г/см^3; $\nu = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$ см^2/с; $|\sigma_T| = 0{,}2$ г/(с^2·град); $R_m = 10^{-7}$ см; $R_p = 0{,}4$ см; $l = 3$ см; $h = 4$ см; $5 \leqslant A \leqslant 10$ град/см; $A|\sigma_T|/(20\rho\nu) \leqslant \Omega \leqslant A|\sigma_T|/(4\rho\nu)$ с$^{-1}$. В силу малости кинематической вязкости ν удобно провести масштабирование, приняв R_p за единицу.

4. Результаты расчетов. Для задачи о стационарном термокапиллярном движении вязкой несжимаемой жидкости вблизи «холодного» угла численно решены полные уравнения Навье — Стокса в указанной выше области, ограниченной свободной, твердой и двумя специально выбранными границами, на которых поставлены граничные условия. Анализируя полученное поле скоростей, следует отметить четко выраженный пограничный слой Прандтля на твердой границе и четко выраженный пограничный слой Марангони на свободной границе. Кроме того, обнаружены большие градиенты продольной скорости вдоль свободной границы в непосредственной близости от «холодного» угла, что отмечено в [3] как основная сложность при работе с «холодным» углом.

На рис. 2 изображены эпюры обеих компонент скорости вблизи твердой границы для четырех малых значений x в интервале $10^{-3} \div 10^{-2}$ см, т. е. на четырех близких расстояниях от «холодного» угла.

На рис. 2,*а* видно, что при удалении от твердой границы имеется максимум, нехарактерный для обычного течения вблизи твердой границы. Этот факт еще не описан в литературе. С точки зрения физики это явление аналогично процессам, происходящим в пристенной струе [12], где эпюры скоростей имеют похожий вид.

Эпюры скоростей вблизи свободной границы для четырех малых значений y (в интервале $10^{-3} \div 10^{-2}$ см) показаны на рис. 3. Здесь вызывает интерес поведение компоненты скорости, направленной параллельно свободной границе и имеющей максимум на свободной границе (рис. 3,*б*).

Заметим, что с увеличением как температурного градиента A, так и завихренности Ω модуль максимальной скорости на свободной границе в указанной области возрастает. При этом качественная картина течения не меняется, что видно из рис. 2,*а* и 3,*в*, на которых представлены результаты, полученные для одного значения параметра A и двух крайних значений параметра Ω.

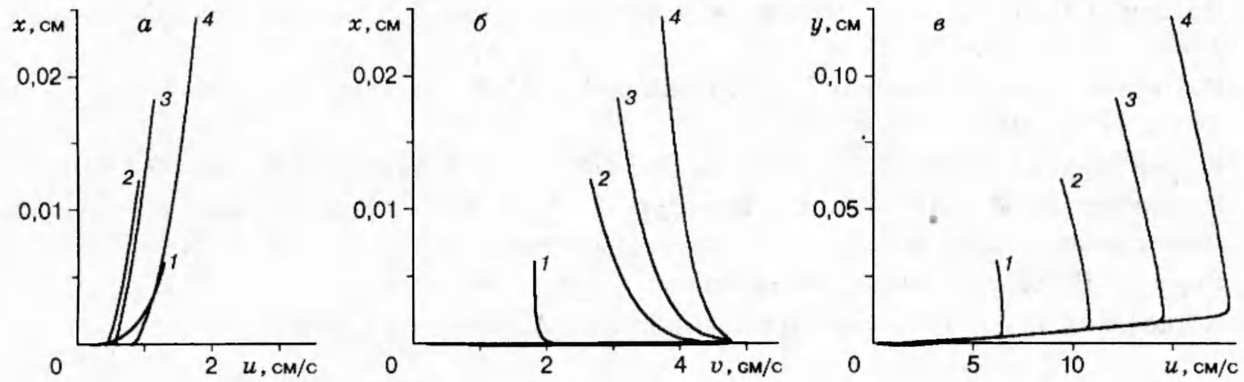

Рис. 3. Эпюры компонент скорости ($A = 5$ град/см):
а и *б* — вблизи свободной границы ($\Omega = 6{,}649$ с$^{-1}$), *в* — вблизи твердой границы ($\Omega = 33{,}245$ с$^{-1}$); обозначения соответствуют рис. 2

Заключение. Рассмотренную задачу можно назвать «слишком модельной» из-за предположения о «плоскости» свободной поверхности. Однако примененная к ней схема решения одинаково пригодна для задачи с цилиндрической свободной поверхностью в предположении осесимметричности течения без закрутки. При изучении области, расположенной в непосредственной близости от линии трехфазного контакта, можно применять решение Моффатта, а во всей области течения — решение Прандтля — Бэтчелора, в аналогично выделенной области — проводить численный расчет. Заметим, что схема Прандтля — Бэтчелора теперь предполагает рассмотрение уравнения $w_t = kr$, где $k = \mathrm{const}$ (k — новый параметр, w — единственная ненулевая компонента вихря). При этом изменятся лишь представления a_k в решении Прандтля — Бэтчелора (2.10), где вместо гиперболических функций будут использованы функции Бесселя, т. е. в граничном условии для ψ на границе *4*: $r = R_p$.

Автор благодарит В. В. Пухначева за внимание к работе и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00818).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лесков Л. В., Савичев В. В.** Исследование физических особенностей технологических процессов на космических кораблях / Гидромеханика и теплообмен в невесомости. М.: Наука, 1982. С. 173–186.
2. **Chun Ch. H.** Marangoni convection in a floating zone under reduced gravity // J. Crystal Growth. 1980. V. 48. P. 600–610.
3. **Shevtsova V. M., Kuhlmann H. C., Rath H. J.** Thermocapillary convection in liquid bridges with a deformed free surface // Materials and Fluids under Low Gravity: Proc. 9th Eur. Symp. on Gravity Dependent Phenomena in Phys. Sci., Berlin, 2–5 May, 1995. P. 323–329.
4. **Neitzel G. P., Chang K. T., Jankowski D. F., Mittelmann H. D.** Linear-stability theory of thermocapillary convection in a model of the float-zone crystal-growth process // Phys. Fluids. 1993. V. 5, N 1. P. 108–114.
5. **Wanschura M., Shevtsova V. M., Kuhlmann H. C., Rath H. J.** Convective instability mechanisms in thermocapillary liquid bridges // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 5. P. 912–925.
6. **Moffatt H. K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18, N 1. P. 1–18.

7. **Batchelor G. K.** On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. N 1. P. 177–190.
8. **Batischev V. A., Kuznetsov V. V., Pukhnachov V. V.** Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.
9. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика М.: ГИФМЛ, 1963.
10. **Полежаев В. И., Бунэ А. В., Верезуб Н. А. и др.** Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987.
11. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
12. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960.

Поступила в редакцию 24/X 1996 г.,
в окончательном варианте — 30/I 1997 г.