ПМТФ, № 1, 1973

УДК 532.529

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СЛАБОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ ЖЕСТКИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Ю. В. Придатченко, Ю. И. Шмаков

(Киев)

В работах [1–4] с позиций структурно-континуального подхода получены реологические уравнения состояния разбавленных суспензий жестких эллипсоидальных частиц (эллипсоид вращения) с учетом наряду с вращательным броуновским движением частиц их инерции и внешних силовых полей. В этих работах в силу малой концентрации взвешенных частиц не учитывается их взаимодействие.

В данной работе результаты [1–4] обобщаются на бóльшие концентрации. Учет влияния гидродинамического взаимодействия частиц на реологическое поведение суспензии проводится с помощью подхода Симха [5].

Для получения реологических уравнений состояния слабоконцентрированных суспензий жестких эллипсоидальных частиц используем модель структурного континуума [6, 7] при фиксированной длине вектора ориентации n_i

$$t_{ij} = (a_0 + a_1 d_{km} n_k n_m)\,\delta_{ij} + a_2 n_i n_j + a_3 d_{km} n_k n_m n_i n_j + a_4 d_{ij} + a_5 d_{ik} n_k n_j + a_6 d_{jk} n_k n_i + a_7 n_i N_j + a_8 n_j N_i \tag{1}$$

$$\varepsilon\,(\ddot{n}_i + \dot{n}_k \dot{n}_k n_i) = \gamma\,[N_i - \lambda\,(d_{ij} n_j - d_{jk} n_j n_k n_i)] + \varepsilon_{ijk} M_j n_k \tag{2}$$

Здесь t_{ij} — тензор напряжений, d_{ij} — тензор скоростей деформации, $N_i = \dot{n}_i - \omega_{ij} n_j$, ω_{ij} — тензор вихря скорости, M_j — момент сил, действующий на элемент подструктуры, a_i, ε, γ, λ — реологические постоянные, δ_{ij}, ε_{ijk} — симметричные и кососимметричные символы Кронекера.

В качестве вектора ориентации n_i примем единичный вектор, направленный по оси вращения эллипсоидальной частицы. Тогда реологические постоянные, входящие в (1), (2), можно определить для рассматриваемого случая, обобщая результаты Джеффри [8] с использованием подхода Симха [5].

В соответствии с [5] рассмотрим «стесненное» обтекание эллипсоидальной частицы внутри сферы с центром, совпадающим с центром частицы и радиусом $R = (ab^2 / V)^{1/3}$, где $2a$, b — ось вращения и экваториальный радиус частицы соответственно, V — объемная концентрация взвешенных частиц. Решение настоящей гидродинамической задачи в приближении Стокса, удовлетворяющее условию «прилипания» на поверхности частицы и условию обращения в нуль возмущений скорости на поверхности рассматриваемой сферы, будем искать методом последовательных приближений.

В качестве первого приближения примем решение Джеффри [8], которое в подвижной системе координат x_i с началом в центре частицы и осями, совпадающими по направлению с направлениями главных осей эллипсоидальной частицы, имеет вид

$$u_i = u_{0i} + \frac{4}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^3 r^3}(A_{ki} - A_{ik})x_k - 4x_i\frac{R^5 - r^5}{R^5 r^5}\Phi_0 + 5\frac{R^2 - r^2}{R^5}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$p = p_0 - \frac{8\mu}{r^5}\Phi_0 - \frac{42\mu}{R^5}\Phi_0$$

где u_i — скорость, u_{0i} — скорость невозмущенного потока, p — давление, p_0 — давление в невозмущенном потоке, r — модуль радиус-вектора, μ — динамический коэффициент вязкости растворителя, A_{ki} — величины, определенные в [2], $\Phi_0 = A_{pq}x_p x_q$. Это решение точно удовлетворяет граничным условиям на поверхности сферы; на поверхности эллипсоида возмущение скорости не превышает величины порядка $O(R^{-3})$.

Найдем второе приближение рассматриваемой задачи так, чтобы возмущение скорости на поверхности эллипсоида не превышало величины порядка $O(R^{-6})$. Для этого к (3) добавляем следующее решение, полученное методом, использованным в [8],

$$u_i^* = \frac{4}{3}\frac{1}{r^3}(B_{ki} - B_{ik})x_k - \frac{4x_i}{r^5}\Phi + U_i, \qquad p^* = P - \frac{8\mu}{r^5}\Phi \quad (4)$$

где $\Phi = B_{pq}x_p x_q$

$$B_{11} = \frac{5d_{11}}{18\beta_0''^2 R^3}$$

$$B_{22} = \frac{5d_{22}}{8b^4\alpha_0'^2 R^3} + \frac{5(\beta_0'' - \alpha_0'')(2b^2\alpha_0' + 3\beta_0'')d_{11}}{72b^4\alpha_0'^2\beta_0''^2 R^3} \quad (5)$$

$$B_{33} = \frac{5d_{33}}{8b^4\alpha_0'^2 R^3} + \frac{5(\beta_0'' - \alpha_0'')(2b^2\alpha_0' + 3\beta_0'')d_{11}}{72b^4\alpha_0'^2\beta_0''^2 R^3}$$

$$B_{12} = \{[15\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) - 4b^2\beta_0'(\beta_0 - \alpha_0)]d_{12} + [4b^2(a^2 + b^2)\beta_0'^2 - 15(a^2 - b^2)\alpha_0\beta_0'](\omega_{12} + \omega_3)\} / 12\beta_0'^2 B^2 R^3$$

$$B_{21} = \{[15\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) + 4a^2\beta_0'(\beta_0 - \alpha_0)]d_{21} + [4a^2(a^2 + b^2)\beta_0'^2 + 15(a^2 - b^2)\beta_0\beta_0'](\omega_{21} - \omega_3)\} / 12\beta_0'^2 B^2 R^3$$

$$B_{13} = \{[15\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) - 4b^2\beta'_0(\beta'_0 - \alpha_0)]d_{13} + [4b^2(a^2 + b^2)\beta_0'^2 - 15(a^2 - b^2)\alpha_0\beta_0'](\omega_{13} - \omega_2)\} / 12\beta_0'^2 B^2 R^3$$

$$B_{31} = \{[15\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) + 4a^2\beta_0'(\beta_0 - \alpha_0)]d_{31} + [4a^2(a^2 + b^2)\beta_0'^2 + 15(a^2 - b^2)\beta_0\beta_0'](\omega_{31} + \omega_2)\} / 12\beta_0'^2 B^2 R^3$$

$$B_{23} = \frac{5d_{23}}{8b^4\alpha_0'^2 R^3}, \qquad B_{32} = \frac{5d_{32}}{8b^4\alpha_0'^2 R^3}$$

$B = a^2\alpha_0 + b^2\beta_0$, α_0, β_0, α_0', β_0', α_0'', β_0'' — функции a / b, определенные в [8], ω_i — угловая скорость частицы, U_i, P — последующие члены разложения решения Джеффри, имеющие на поверхности сферы следующие порядки величин: U_i — $O(R^{-4})$, P — $O(R^{-5})$.

Добавление к (3) решения (4) позволяет точно удовлетворить граничные условия на поверхности эллипсоида, однако построенное таким образом решение не удовлетворяет граничным условиям на поверхности сферы.

Находя еще одно частное решение, позволяющее совместно с решениями (3) и (4) точно удовлетворить граничным условиям на поверхности сферы, получим окончательно решение рассматриваемой задачи во втором приближении

$$
\begin{gathered}
u_i = u_{0i} + \frac{4}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^3 r^3}(A_{ki} + B_{ki} - A_{ik} - B_{ik})x_k - \\
- 4x_i\frac{R^5 - r^5}{R^5 r^5}(\Phi_0 + \Phi) + 5\frac{R^2 - r^2}{R^5}\frac{\partial(\Phi_0 + \Phi)}{\partial x_i} + U_i + U_i' \qquad (6) \\
p = p_0 - \frac{8\mu}{r^5}(\Phi_0 + \Phi) - \frac{42\mu}{R^5}(\Phi_0 + \Phi) + P + P'
\end{gathered}
$$

где U_i', P' — частное решение задачи, удовлетворяющее следующему граничному условию на поверхности сферы: $U_i' = -U_i$. В силу громоздкости выражения U_i, U_i', P и P' не выписываются. Как показывает исследование, эти выражения не дают вклада в осредненный тензор напряжений, построенный ниже для рассматриваемой среды.

По возмущению скорости и давления можно найти в подвижной системе координат x_i тензор напряжений σ_{ij} для рассматриваемой среды [9]. Осредняя по объему сферы тензор напряжений, определяемый решением (6) с переходом от интегрирования по объему к интегрированию по поверхности сферы [9,10,2], получим

$$
\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \frac{8\mu V}{ab^2}(A_{ij} + B_{ij}) \qquad (7)
$$

Уравнения ориентации для эллипсоидальной частицы при пренебрежении моментом инерции относительно оси вращения частицы (вытянутые эллипсоиды) в подвижной системе координат x_i имеют вид

$$
\begin{gathered}
0 = M_1^* + M_1^0, \quad I(\dot\omega_2 - \omega_1\omega_3) = M_2^* + M_2^0 \qquad (8) \\
I(\dot\omega_3 + \omega_1\omega_2) = M_3^* + M_3^0
\end{gathered}
$$

где I — момент инерции эллипсоида относительно оси, лежащей в экваториальной плоскости, M_i^0 — момент внешних сил, M_i^* — момент гидродинамических сил, компоненты которого в рассматриваемом случае имею вид

$$
\begin{aligned}
M_1^* &= -\frac{16\pi\mu}{3\beta_0}\left(1 + \frac{2V}{3ab^2\beta_0}\right)(\omega_{23} + \omega_1) \\
M_2^* &= -\frac{32\pi\mu}{3}(A_{31} + B_{31} - A_{13} - B_{13}) \qquad (9) \\
M_3^* &= -\frac{32\pi\mu}{3}(A_{12} + B_{12} - A_{21} - B_{21})
\end{aligned}
$$

Рассматривая соотношения (1) и (2) в подвижной системе координат $x_i(n_1 = 1,\ n_2 = n_3 = 0,\ \dot n_1 = 0,\ \dot n_2 = \omega_3,\ \dot n_3 = -\omega_2,\ \ddot n_1 = -\omega_2^2 - \omega_3^2,$ $\ddot n_2 = \dot\omega_3 + \omega_2\omega_1,\ \ddot n_3 = -\dot\omega_2 + \omega_3\omega_1)$ и сравнивая (1) с (7), а (2) с (8), (9), найдем реологические постоянные, входящие в (1), (2)

$\varepsilon = I$

$$
\begin{gathered}
\gamma = -\frac{16\pi\mu}{3B}\left[(a^2 + b^2) + \frac{15(a^2 - b^2)^2 + 4(a^2 + b^2)^2}{6ab^2B}V\right] \\
\lambda = \left[a^2 - b^2 + \frac{15(a^2 - b^2)(\alpha_0 + \beta_0) + 4(a^2 + b^2)(\beta_0 - \alpha_0)}{6ab^2\beta_0'B}V\right] \times \\
\times\left[a^2 + b^2 + \frac{15(a^2 - b^2)^2 + 4(a^2 + b^2)^2}{6ab^2B}V\right]^{-1} \qquad (10) \\
a_0 = -p_0, \qquad a_2 = 0 \\
a_1 = \frac{2\mu V(\beta_0'' - \alpha_0'')}{3ab^4\beta_0''\alpha_0'} + \frac{5\mu V^2(\beta_0'' - \alpha_0'')(2b^2\alpha_0' + 3\beta_0'')}{9a^2b^8\beta_0''^2\alpha_0'^2}
\end{gathered}
$$

$$a_3 = \frac{2\mu V}{ab^2}\left[\frac{\alpha_0'' + \beta_0''}{b^2\alpha_0'\beta_0''} - \frac{2(\alpha_0+\beta_0)}{\beta_0' B}\right] +$$
$$+ \frac{2\mu V^2}{3a^2b^4}\left[\frac{5(\beta_0''^2 + \beta_0''\alpha_0'' + \alpha_0''^2)}{b^4\alpha_0'^2\beta_0''^2} - \frac{15(\alpha_0+\beta_0)^2 + 4\beta_0'^2(a^2-b^2)^2}{\beta_0'^2B^2}\right]$$
$$a_4 = 2\mu\left(1 + \frac{V}{ab^4\alpha_0'} + \frac{5V^2}{2a^2b^8\alpha_0'}\right)$$
$$a_5 = \frac{4\mu V}{ab^2}\left(\frac{\beta_0}{\beta_0' B} - \frac{1}{2b^2\alpha_0}\right) +$$
$$+ \frac{2\mu V^2}{a^2b^4}\left[\frac{15\beta_0(\alpha_0+\beta_0) + 4a^2\beta_0'(\beta_0-\alpha_0)}{3\beta_0'^2B^2} - \frac{5}{2b^4\alpha_0'^2}\right]$$

$$a_6 = \frac{4\mu V}{ab^2}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0' B} - \frac{1}{2b^2\alpha_0'}\right) + \frac{2\mu V^2}{a^2b^4}\left[\frac{15\alpha_0(\alpha_0+\beta_0) - 4b^2\beta_0'(\beta_0-\alpha_0)}{3\beta_0'^2B^2} - \frac{5}{2b^4\alpha_0'^2}\right]$$
$$a_7 = \frac{4b^2\mu V}{ab^2B} + \frac{2\mu V^2[4b^2(a^2+b^2)\beta_0' - 15(a^2-b^2)\alpha_0]}{3a^2b^4\beta_0' B^2}$$
$$a_8 = -\frac{4a^2\mu V}{ab^2B} - \frac{2\mu V^2[4a^2(a^2+b^2)\beta_0' + 15(a^2-\beta^2)\beta_0]}{3a^2b^4\beta_0' B^2}$$

Поскольку вектор ориентации характеризует поведение подструктуры (микрочастицы, макромолекулы), при построении реологических уравнений состояния в соотношении (1) необходимо произвести осреднение с помощью функции распределения угловых положений оси вращения взвешенной частицы F, которая наряду с детерминированными силами, действующими на частицу (гидродинамические силы, внешние силовые поля), может включить в рассмотрение и силы, обусловленные вращательным броуновским движением. При этом, как показано в [3], необходимо в соотношении (2) в M_j включить момент

$$M_j^0 = -kT\varepsilon_{jik}n_i\frac{\partial \ln F}{\partial x_k}$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Таким образом, в качестве реологических уравнений состояния слабоконцентрированных суспензий жестких эллипсоидальных частиц примем сотношение (1) с коэффициентами a_i, связанными с параметрами, которые характеризуют геометрию и концентрацию взвешенных частиц соотношениями (10). Соотношение (1) осредняется с помощью функции распределения F, удовлетворяющей уравнению

$$\partial F / \partial t = \mathrm{Dr}\Delta F - \mathrm{div}\,(F\omega) \qquad (11$$

где t — время, $\mathrm{Dr} = -kT / \gamma$, ω — угловая скорость частицы, определяемая из уравнения (2)

$$T_{ij} = \langle t_{ij}\rangle = (a_0 + a_1d_{km}\langle n_kn_m\rangle)\,\delta_{ij} + a_3d_{km}\langle n_kn_mn_in_j\rangle + \qquad (12)$$
$$+ a_4d_{ij} + a_5d_{ik}\langle n_kn_j\rangle + a_6\,d_{jk}\langle n_kn_i\rangle + a_7\langle n_iN_j\rangle + a_8\langle n_jN_i\rangle$$

Так как γ получено с учетом «стесненного» обтекания, $\mathrm{Dr} = -kT / \gamma$ учитывает влияние гидродинамического взаимодействия взвешенных частиц на их вращательное броуновское движение.

Отметим в заключение, что при учете гидродинамического взаимодействия взвешенных частиц по предлагаемой в работе методике реологические уравнения состояния слабоконцентрированных суспензий эллипсоидальных частиц по форме совпадают с уравнениями состояния разбавленных суспензий эллипсоидальных частиц. Гидродинамическое взаимодействие взвешенных частиц проявляется в изменении функции распределения F и реологических постоянных.

Поступила 24 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмаков Ю. И., Таран Е. Ю. Структурно-континуальный подход в реологии полимерных материалов. Инж.-физ. ж., 1970, т. 18, № 6.
2. Придатченко Ю. В., Шмаков Ю. И. Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами. ПМТФ, 1972, № 2.
3. Шмаков Ю. И., Бегоулев П. Б., Придатченко Ю. В. Структурно-континуальный подход в реологии дисперсных и полимерных систем. Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3, Минск, 1972.
4. Бегоулев П. Б., Шмаков Ю. И. Реологические уравнения состояния слабых растворов полимеров с жесткими эллипсоидальными макромолекулами при наличии электрического поля. Инж.-физ. ж., 1972, т. 23, № 1.
5. Simha R. A treatment of the viscosity of concentrated suspensions. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 9.
6. Ericksen J. L. Anisotropic fluid. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1960, vol. 4, No. 3.
7. Ericksen J. L. Some magnetohydrodynamic effects in liquid crystals. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1966, vol. 23, No. 4.
8. Jeffery G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1922, vol. 102, No. 715.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
10. Hand G. L. A theory of dilute suspensions. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1961, vol. 7, No. 1.