

ВОЛНЫ НАГРУЗКИ ПРИ ПОДЗЕМНОМ ВЗРЫВЕ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Н. С. Медведева, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

Рассматривается задача о распространении волн нагрузки в горных породах, поведение которых при нагружении описывается нелинейной зависимостью напряжений и деформаций и некоторым условием «пластичности». Полученные интегралы позволяют указать структуру формул, определяющих затухание амплитуд напряжений и скоростей частиц в волнах напряжений при подземных взрывах.

§ 1. 1. Рассмотрим сферически-симметричную задачу о распространении волн напряжений в сплошной среде.

Уравнения движения и неразрывности в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь σ_r, σ_φ — главные нормальные напряжения, u — скорость частиц, ρ — плотность, r — координата, t — время.

Поведение среды при нагружении будем описывать уравнениями

$$-\sigma = K \left(1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon)^n} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_r + 2\sigma_\varphi), \quad \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} - 1, \quad K = \text{const} > 0, \quad n = \text{const} > 0$$

Здесь σ — среднее напряжение, ε — объемная деформация, K, n — положительные постоянные.

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = k + m (\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad (k, m = \text{const}) \quad (1.4)$$

Уравнение (1.3) описывает свойство объемной сжимаемости среды при всестороннем сжатии и аппроксимирует зависимость $\sigma(\varepsilon)$, указанную на фиг. 1, при $\varepsilon \leq \varepsilon_*$. При этом положительные значения параметра n обеспечивают выполнение дифференциальных неравенств

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} < 0, \quad \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} > 0 \quad (1.5)$$

Произведение параметров Kn может быть определено из уравнения

$$-\sigma = Kn\varepsilon \quad \left(Kn = \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \quad (1.6)$$

полученного при $\varepsilon \ll 1$ из (1.3). Здесь λ, μ — параметры Ляме, $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ — модуль объемного сжатия среды.

Второе уравнение связано с «пластическим» поведением среды при больших деформациях, имеющих место при взрывных процессах. На основе данных [2, 3] можно заключить, что горные породы при высоких

давлениях имеют гиперболическую огибающую кругов Мора на диаграмме

$$\left(\tau_n = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{2}, \quad \sigma_n = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2} \right)$$

Мы предлагаем для описания предельного состояния горной породы при высоких нагружениях уравнение (1.4), представляющее собой асимптоту для гиперболической огибающей кругов Мора. Уравнение (1.4) определяет линейную связь между главными напряжениями σ_r и σ_φ

$$\sigma_\varphi = \alpha \sigma_r + m_1, \quad \alpha = \frac{1+m}{1-m}, \quad m_1 = \frac{k}{1-m} \quad (1.7)$$

Имея ввиду изучение решения при сравнительно больших $|\sigma_r|$, будем пренебрегать величиной m_1 , применяя условие

$$\sigma_\varphi = \alpha \sigma_r \quad (1.8)$$

О значении параметра m_1 удобнее будет высказаться в § 3. Уравнение (1.4) известно в теории сыпучих сред как условие Прандтля или условие Мора в общей теории пластических сред [10]. Параметр m и связанный с ним параметр α обычно определяются через угол внутреннего трения и в динамических процессах для горных пород неизвестны.

Система уравнений (1.1), (1.2), (1.3) и (1.7) полностью определяет процесс динамического нагружения горной породы, находящейся в предельном состоянии, и позволяет определить функции $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\varphi(r, t)$, $u(r, t)$ и $\varepsilon(r, t)$ для выбранных краевых условий. При разгрузке уравнения (1.3) и (1.7), вообще говоря, должны иметь иной вид [4], но рассмотрение разгрузки не является предметом настоящей статьи.

2. При помощи (1.7) и (1.3) можно определить зависимость $\sigma_r(\varepsilon)$, представляющую в задаче большой интерес

$$-\sigma_r = \kappa K [1 - (1 + \varepsilon)^{-n}] \quad \left(\kappa = \frac{3}{1 + 2\alpha} \right) \quad (1.9)$$

Рассмотрим некоторые основные особенности диаграммы $\sigma_r(\varepsilon)$, связанные со структурой распространяющихся волн напряжений. Для волн нагрузки в стержне с диаграммой такого же вида, что и на фиг. 1, задача рассматривалась в [12].

Как следует из уравнений (1.1) и (1.9), величина a — местная скорость звука в среде определяется уравнением

$$-\frac{d\sigma_r}{\rho_0 d\varepsilon} = a^2 \quad (1.10)$$

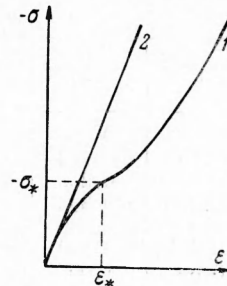
При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $a \rightarrow a_0$, где a_0 известна и равна скорости продольных волн в горных породах $a_0^2 = \lambda + 2\mu / \rho_0$, так что

$$-\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \lambda + 2\mu \quad (1.11)$$

Местная скорость звука a имеет в точке перегиба $(-\sigma_{r*}, \varepsilon_*)$ наименьшее значение $a_* < a_0$, а затем, при возрастании ε , увеличивается.

Отметим следующую связь диаграмм $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_r(\varepsilon)$. Если предположить непрерывность этих функций вместе с произвольными вплоть до $\varepsilon = 0$, то из сравнения (1.6) и (1.11) можно получить важное соотношение

$$\kappa = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \quad (1.12)$$



Фиг. 1

Последнее позволяет определить параметр α , если известны коэффициенты Ляме λ и μ при $\varepsilon = 0$. Так, из (1.12) следует

$$\alpha = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad (1.13)$$

где σ — коэффициент Пауссона для горной породы.

Величина σ может быть найдена, если в горной породе измерены скорости распространения продольных и поперечных волн [8], точнее говоря, их отношение $\gamma = V_s / V_p$; величина κ связана с γ простой формулой

δ	α	κ	γ
0	0	3.0	0.707
0.15	0.173	2.44	0.667
0.20	0.250	2.00	0.613 ¹
0.25	0.333	1.80	0.577
0.30	0.430	1.61	0.540
0.35	0.540	1.44	0.480
0.50	1.00	1.00	0

$$\kappa = \frac{1}{1 - 4/\sigma\gamma^2}$$

Сетка значений σ , α и κ , γ приведена в таблице.

Способ определения α через σ с помощью (1.13), следующую из непрерывности функций $\sigma(\varepsilon)$ и $\sigma_r(\varepsilon)$ с первыми производными в диапазоне $\varepsilon \geq 0$, предполагает постоянство величины σ для прочных горных пород в широком диапазоне нагрузок.

На основании результатов [12] можно отметить следующие три области развития волнового процесса, отмеченные на фиг. 2.

Первая область определяется неравенством $\varepsilon > \varepsilon_0$ и охватывает диапазон расстояний, на которых волна напряжений имеет ударный характер нагружения. Величины $-\sigma_{r0}$, ε_0 при этом определяются из условия пересечения линий $-\sigma_r = Kn\varepsilon$, $\sigma_r = \sigma_r(\varepsilon)$.

Вторая область охватывает диапазон напряжений (σ_{r*} , $-\sigma_{r0}$) и описывает волну напряжений сложной структуры: напряжения в точке с течением времени сначала нарастают непрерывно, а затем изменяются скачком. Такая ударная волна напряжений является неустойчивой в том смысле, что при переходе от области 1 к 3 ударная волна вырождается в непрерывную.

Третья область характеризуется непрерывным изменением напряжения в волне и является предметом детального обсуждения в статье.

Опытные данные по измерению параметров волн напряжений при взрывах в прочных горных породах (диабаз, гранит, мрамор, известняк) свидетельствуют о том, что в значительном диапазоне расстояний волны напряжений характеризуются конечным временем нарастания напряжения до максимума [1]. В то же время, как показывают расчеты, эти опытные данные в наблюдаемом диапазоне расстояний не укладываются в рамки представлений о горной породе как об идеально-упругой среде. Эти факты и заставляют обратиться к постановке задачи о нелинейном поведении горной породы при динамических нагружениях и ввести условие пластичности.

3. На основе сейсмических измерений и определения параметров Ляме λ и μ можно вычислить величину параметра Kn ; для прочных горных пород со скоростями распространения продольных волн 4000—6000 м/сек и $\gamma = 0.5—0.6$ [1, 8], параметр Kn оценивается величиной 10^5 кг/см².

Например, для мраморизованного известняка со скоростью продольных волн 6200 м/сек, $\gamma = 0.5—0.6$ и $\rho_0 = 2.7$ г/см³ величина $Kn \approx 5 \div 7 \cdot 10^5$ кг/см², что превосходит давления в волне детонации при подземном взрыве конденсированных ВВ.

Если обратиться к уравнению (1.9), то естественно воспользоваться приближением теории слабых волн. Будем считать волны напряжения слабыми, если выполнено неравенство

$$\frac{|\sigma|}{K} = \frac{|\sigma_r|}{\kappa K} < 1 \quad (1.14)$$

Отсюда для $\sigma_r(\varepsilon)$ и $a(\sigma_r)$ получаем соотношения

$$\varepsilon = -\frac{\sigma_r}{\kappa K n} + \frac{n+1}{2} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa K n} \right)^2 + \dots$$

$$\frac{a}{a_0} = 1 + \frac{n+1}{2} \frac{\sigma_r}{\kappa K n} + \dots$$
(1.15)

Ниже мы воспользуемся формулами (1.15) при упрощении основной системы дифференциальных уравнений задачи.

§ 2. 1. Математическая постановка задачи и методы построения приближенных решений близки к таковым работы [5]. Это позволяет избежать подробных выкладок и изложить только основные этапы вычислений.

Перепишем систему уравнений (1.1) и (1.2) с помощью (1.7) и (1.9) для неизвестных функций σ_r , u , ε и исключим σ_r и ε , введя неизвестные функции u и a .

Система дифференциальных уравнений для определения u и a примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2a}{n+1} \frac{\partial a}{\partial r} - \frac{3(\kappa-1)K}{\rho_0 r} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2}{n+1}} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 \right] = 0$$

$$-\frac{2}{n+1} \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{n+1} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{2ua}{r} = 0$$
(2.1)

Система уравнений (2.1) является точной. Введем малую величину (см. (1.13))

$$\beta = -\frac{n+1}{2} \frac{\sigma_r}{\kappa K n} \quad (0 < \beta < 1)$$
(2.2)

с помощью которой запишем (1.14) в виде

$$a = a_0(1 - \beta)$$
(2.3)

а систему (2.1) перепишем для слабых волн напряжений следующим образом:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} + (1 + M - \beta) \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{4\beta(1-\alpha)}{r(n+1)} \left(1 - \frac{2\beta}{n+1} \right) + \frac{2M(1-\beta)}{r} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} - (1 - M - \beta) \frac{\partial F_2}{\partial r} + \frac{4\beta(1-\alpha)}{r(n+1)} \left(1 - \frac{2\beta}{n+1} \right) - \frac{2M(1-\beta)}{r} = 0$$
(2.4)

Здесь введены обозначения для инвариантов

$$F_1 = M + \frac{2}{n+2} \beta, \quad F_2 = M - \frac{2}{n+1} \beta \quad \left(M = \frac{u}{a_0}, \quad z = a_0 t \right)$$
(2.5)

Характеристики системы (2.4) вещественны и определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dz} = 1 + M - \beta, \quad \frac{dz}{dr} = -(1 - M - \beta)$$
(2.6)

Первое семейство в (2.6) отвечает инварианту F_1 (волна, расходящаяся от центра), а второе — инварианту F_2 (к центру системы координат). Перейдем в (2.4) к характеристическим переменным ξ , η

$$(1 + \mu) d\xi = dr - (1 + M - \beta) dz$$

$$(1 + \gamma) d\eta = dr + (1 - M - \beta) dz$$
(2.7)

Здесь μ и γ — интегрирующие множители. Система (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta}{1+\gamma} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{1}{r} \left(\frac{2\beta(1-\alpha)}{n+1} \left(1 - \frac{1\beta}{n+1} \right) + M(1-\beta) \right) &= 0 \\ -\frac{1-\beta}{1+\mu} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \left[\frac{2\beta(1-\alpha)}{n+1} \left(1 - \frac{2\beta}{n+1} \right) - M(1-\beta) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для исключения множителей μ и γ воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \xi} &= \frac{(1+\mu)(1-M-\beta)}{2(1-\beta)}, & \frac{\partial z}{\partial \xi} &= -\frac{1+\mu}{2(1-\beta)} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} &= \frac{(1+\gamma)(1+M-\beta)}{2(1-\beta)}, & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \frac{2+\gamma}{2(2-\beta)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

с помощью которых система уравнений для определения F_1 и F_2 принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} &= - \left[1 - \frac{n-1}{4} F_1 + \frac{n+3}{4} F_2 \right]^{-1} \left[(F_1 + F_2) \left(1 - \frac{n+1}{4} F_1 + \frac{n+1}{4} F_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha)(F_1 - F_2) \left(1 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} F_2 \right) \right] \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi} &= - \left[1 + \frac{n+3}{4} F_1 - \frac{n-1}{4} F_2 \right]^{-1} \left[(F_1 + F_2) \left(1 - \frac{n+1}{4} F_1 + \frac{n+1}{4} F_2 \right) - \right. \\ &\quad \left. - (1-\alpha)(F_1 - F_2) \left(1 - \frac{1}{2} F_1 - \frac{1}{2} F_2 \right) \right] \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Присоединяя к этой системе уравнения двух семейств характеристик (2.6) и краевые условия

$$-\sigma_r|_{r=r_0} = -\Sigma f(t), \quad f(t) \neq 0 \quad \text{при } t \geq 0 \quad (\Sigma = \text{const}) \quad (2.11)$$

обычные в задаче о распространении волн в покоящейся среде, получаем полную систему уравнений и краевых условий в задаче.

2. Для изучения слабых ударных волн, распространяющихся в покоящейся среде, в [6] была разработана теория коротких волн, конструктивным предложением которой является различие величин инвариантов F_1 и F_2 при движении в глубину волны

$$F_2 \ll F_1 \quad (2.12)$$

Напомним, что инвариант F_1 вблизи фронта слабой ударной волны отличен от нуля и является малой первого порядка в задаче, а F_2 с этой же точностью равен нулю, как это следует из условий динамической совместности на фронте ударной волны [5, 7].

Теория коротких волн позволяет строить эффективные решения в непосредственной окрестности фронта слабой ударной волны.

В задаче при изучении волн напряжений с амплитудами $\varepsilon < \varepsilon_*$, распространяющихся в покоящейся среде, волны напряжения вследствие (2.3) будут непрерывными.

Это означает, что на нулевой характеристике (в первом вступлении волны) оба инварианта F_1 и F_2 равны нулю.

Это обстоятельство заставило нас обратиться к исследованию системы (2.10) вместо более простой системы, играющей ту же роль, что и (2.10), в задаче [5].

Воспользуемся предположением (2.12), т. е. будем считать, что инварианты F_1 и F_2 , равные нулю на нулевой характеристике, по-разному растут при движении в глубину волны напряжений.

В этом предположении в первом из уравнений (2.10) можно пренебречь всюду F_2 по сравнению с F_1 , а также пренебречь малыми величинами высшего порядка:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \eta} = -(2 - \alpha) \frac{\partial \ln r}{\partial \eta} \quad (2.13)$$

Последнее уравнение имеет простой интеграл

$$F_1 = \frac{G'(\xi)}{r^{2-\alpha}}. \quad (2.14)$$

Здесь $G'(\xi)$ — произвольная функция от характеристической переменной ξ ; штрих означает производную по аргументу ξ .

С помощью (2.14) можно дать явное представление первому семейству характеристик (2.6), установленное с той же точностью, что и (2.14).

$$\xi = r \left[1 + \frac{n-1}{2(1-\alpha)} \frac{\sigma_r}{\kappa K n} \right] - a_0 t \quad (2.15)$$

Нулевая характеристика первого семейства $\xi_0 = r - a_0 t$, а поправочный член является малой первого порядка.

Для оценки F_2 следует воспользоваться вторым уравнением системы (2.10), интегралом (2.14) и выражением (2.9) для $\partial r / \partial \xi$.

В прежнем приближении ($F_2 \ll F_1$, $F_1^2 \approx 0$) второе уравнение (2.10) принимает вид

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi} = -\alpha F_1 \frac{\partial \ln r}{\partial \xi} \quad (2.16)$$

Отсюда следует с той же точностью, которая принята при выводе (2.14),

$$F_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{G(\xi)}{r^{3-\alpha}} \quad (2.17)$$

Здесь $G(\xi)$ — прежняя произвольная функция и при выводе пренебрежено членами

$$-\frac{\alpha}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{G(\xi)}{r^{4-\alpha}} d\xi \quad (2.18)$$

Сравнение первых членов в (2.14) и (2.17) показывает, что в представлении F_2 порядок разрыва функции от ξ на единицу ниже, а порядок убывания с ростом r на единицу выше.

Завершение первого этапа исследования системы требует определения F_1 с точностью до членов, имеющих тот же порядок, что и F_2 . Это можно выполнить, если подставить в первое уравнение (2.10) F_2 из (2.17) и пренебречь нелинейными членами, а также оценить $\partial r / \partial \eta$ из (2.9). Не останавливаясь на подробных выкладках и оценках, выпишем окончательный результат, уточняющий (2.14),

$$F_1 = \frac{G'(\xi)}{r^{2-\alpha}} - \frac{\alpha^2 G(\xi)}{2 r^{3-\alpha}} \quad (2.19)$$

при выводе этой формулы пренебрежено членами порядка (2.18).

Приближенное решение системы (2.17) и (2.19), как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнениям (2.10) с линейными относительно F_1 и F_2 правыми частями, при этом (2.19) является точным решением своего уравнения, а второе уравнение в (2.10) удовлетворяется с точностью до слагаемого

$$-\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{2} \frac{G(\xi)}{r^{4-\alpha}} \quad (2.20)$$

Интегралы (2.17) и (2.19) с оценочными членами записаны для нестационарной задачи о распространении волн напряжений в покоящейся среде. Этим обстоятельством и вызвано отсутствие произвольных функций от η .

Наконец, возвращаясь к физическим величинам, найдем с помощью (2.2), (2.5) и (2.17), (2.19)

$$-\frac{\sigma_r}{\kappa Kn} = \frac{G'(\xi)}{r^{2-\alpha}} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \frac{G(\xi)}{r^{3-\alpha}}, \quad u = \frac{G'(\xi)}{r^{2-\alpha}} - \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} \frac{G(\xi)}{r^{3-\alpha}} \quad (2.21)$$

3. В заключение параграфа сделаем несколько замечаний о формулах (2.21).

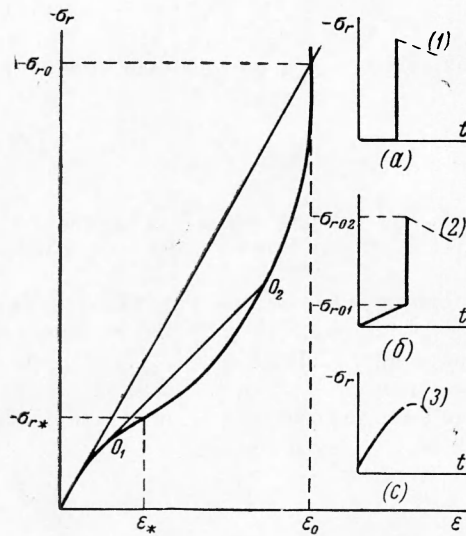
Приближенные формулы для амплитуд напряжений и скоростей частиц в слабых волнах напряжений позволяют для заданного сигнала (2.11) уточнить понятие короткой волны напряжений: волна напряжений называется короткой, если в (2.21) можно пренебречь оценочными членами по сравнению с главными.

Второе замечание связано с предельным переходом $\alpha \rightarrow 1$. Значение $\alpha = 1$ в рамках принятой постановки задачи означает переход от твердого тела с условием предельного состояния (1.7) к жидкости, для которой $\sigma_r = \sigma_\varphi = -p$. Как следует из (2.21), в этом случае для линейной задачи ($\varepsilon \rightarrow 0$) предельный переход $\alpha \rightarrow 1$ приводит к точным формулам акустики.

В приближенном анализе § 2 вместо условия (1.4) было использовано условие (1.8). Нетрудно показать, что учет постоянного члена m_1 в условии (1.7) приводит к главному члену в (2.25)

$$\sigma_r = G'(\xi) r^{-(2-\alpha+\frac{m_1}{\kappa Kn})}$$

Добавочный член в показателе r является малой величиной. В самом деле, по данным [2] величина m_1 оценивается значением, равным прибли-



Фиг. 2

Отметим в заключение, что в рамках поставленной задачи можно рассмотреть слабые ударные волны напряжений, отвечающие первой области, отмеченной на фиг. 2. В этом случае уравнение (1.3) следует заменить уравнением

$$-\sigma = K_1 [(1 + \varepsilon)^{n_1} - 1] \quad (K_1 > 0, n_1 > 1) \quad (2.23)$$

записанным по аналогии с уравнением состояния для жидкости и газа, и считать, что в малой окрестности скачка среда находится в предельном состоянии с условием пластичности (1.7).

женно предельному значению напряжения на растяжение для данной горной породы δ^* ; в то же время для всех горных пород δ^* на несколько порядков меньше значения модуля объемного сжатия κn .

Необходимо отметить также, что постановка задачи, избранный метод решения и результаты (2.21) позволяют сразу же указать решение аналогичной задачи для цилиндрических волн. Главные члены в (2.21) в этом случае примут вид

$$-\frac{\sigma_r}{\kappa Kn} = \frac{Q(\xi)}{r^{1-\alpha/2}}, \quad u = \frac{Q(\xi)}{r^{1-\alpha/2}} \quad (2.22)$$

где $Q(\xi)$ — произвольная функция аргумента, а

$$\xi = r \left[1 + \frac{n-1}{\alpha} \frac{\sigma_r}{\kappa Kn} \right] - a_0 t$$

Решение, описывающее напряженное состояние среды за скачком, имеет вид (2.21), где n следует заменить на $-n_1$, а K на K_1 . В частности, при $\alpha \rightarrow 1$ главный член в (2.21) совпадает с аналогичным интегралом гидродинамической задачи, полученным в [5].

Определим закон затухания максимальных амплитуд напряжений на фронте ударной волны. Продифференцируем $\sigma_r r^{2-\alpha} = G'(\xi)$ по r полным образом и воспользуемся определением скорости перемещения скачка для слабой ударной волны

$$N = \frac{dr}{dt} = a_1 \left(1 - \frac{n_1 + 1}{4} \frac{\sigma_r}{\kappa K_1 n_1} \right), \quad a_1^2 = \frac{\kappa K_1 n_1}{\rho_0} \quad (2.24)$$

Пропуская промежуточные выкладки, приходим к уравнению

$$\frac{dx}{x} = - \frac{n_1 + 1}{4} G''(\xi) r^{-(2-\alpha)} \left[1 - \frac{n_1 + 1}{2(1-\alpha)} \frac{G'(\xi)}{r^{1-\alpha}} \right]^{-1} dr, \quad x = - \sigma_r r^{2-\alpha}$$

а $G''(\xi)$ считаем постоянной

$$G''(\xi) = C_1$$

Отсюда следует

$$- \frac{\sigma_r}{\kappa k_1 n_1} = \frac{c_2}{r^{2-\alpha}} \left(1 - \frac{n_1 + 1}{2(1-\alpha)} \frac{c_1}{r^{1-\alpha}} \right)^{-1/2} \quad (c_1, c_2 = \text{const}) \quad (2.25)$$

Условия применимости (2.25) были в основном указаны выше. Отметим только, что:

1) в случае плавного спада напряжений за ударной волной $G'(\xi) = C_1 \approx 0$, и закон затухания максимальных напряжений совпадает с законом затухания амплитуды короткой волны на характеристике (см. (2.21) — главный член); при $C_1 \neq 0$ затухание амплитуд напряжений происходит быстрее, чем $r^{-(2-\alpha)}$;

2) формулу (2.25) следует применять для горных пород с характеристикой $\sigma(\varepsilon)$ при сравнительно небольших значениях σ_* ; в противном случае необходимо воспользоваться при выводе (2.25) аппроксимацией уравнения состояния

$$-(\sigma_r - \sigma_{r*}) = K_1 \left[\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_*} \right)^{n_1} - 1 \right]$$

вместо (2.23).

По данным динамических измерений для мрамора в диапазоне $50 \div 140 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{см}^2$ [9] можно определить K_1 и n_1 ; при этом

$$K_1 = 4.2 \cdot 10^5 \text{ кг} / \text{см}^2, \quad n = 7.20$$

В этой работе отсутствуют сведения о величинах σ_* и v_p , v_s при $\varepsilon = 0$, что затрудняет выбор более точной зависимости $\sigma(\varepsilon)$ и определение α . Тем не менее результаты измерений [9] позволяют указать диапазон напряжений в мраморе, в котором волны напряжений являются слабыми

$$|\sigma| \ll 4.2 \cdot 10^5 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Если учесть, что давление детонации на границе «тротил-кварц» при взрыве заряда по некоторым данным оценивается величиной $\sim 1.70 \cdot 10^5 \text{ кг} / \text{см}^2$ [8], то волны напряжений в кварце (и в прочных горных породах с близкими характеристиками) можно считать слабыми практически от стенки заряда, во всяком случае с расстояний $\sim 2-3 R_z$, где R_z — радиус сферического заряда тротила.

4. При пересчете амплитуд от напряжений к скоростям частиц и обратно к первой области можно воспользоваться условием динамической совместности на скачке

$$-\sigma_r = \rho_0 u N$$

где $N \neq a_1$ определяется формулой (2.24), хотя различие N и a_1 может быть и незначительным при $\sigma_r \sim \sigma_{r0}$.

§ 3. Обратимся к физическим следствиям решения (2.21) и (2.25).

1. Как следует из (2.21) и (2.25), скачок напряжений с амплитудой, меньшей, чем $-\sigma_{r_*}$, заданный при $r = r_0$, исчезает, а волна напряжений всюду при $r > r_0$ становится непрерывной; появляется конечное время нарастания напряжений до максимума.

Вместе с тем затухание амплитуд напряжений на участке нарастания напряжения происходит по закону (2.21) и может быть установлено для каждого конкретного сигнала $f(t)$ из (2.11), лишь бы роль второго слагаемого в формуле напряжений в (2.21) не превосходила заданной доли первого.

Если волна напряжения является короткой, то между σ_r и u на участке нарастания напряжения до максимума существует связь

$$-\sigma_r \approx \rho_0 u a_0$$

На основании (2.21) и (2.25) в непосредственной окрестности заряда в прочной горной породе типа гранит, кварц можно указать приближенные формулы для затухания максимальных напряжений с расстоянием

$$-\sigma_{r\max} = \frac{C}{R^{2-\alpha}}, \quad R = \frac{r}{R_3} \quad (3.1)$$

где C определяется как давление детонации, а α при помощи таблицы Так, для гранита или кварца с помощью данных [8] следует формула

$$-\sigma_{r\max} = \frac{1.70 \cdot 10^5}{R^{1.75}} \quad \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right) \quad (3.2)$$

2. В статье не рассмотрена подробно промежуточная область II (фиг. 2), но из результатов следует с очевидностью, что и при амплитудах напряжений, превосходящих $|\sigma_{r_*}|$, в качестве времени нарастания напряжения может быть взята разность прихода возмущений со скоростью a_0 и скачка со скоростью N^1 .

Для вычисления времени нарастания, если известна зависимость $\sigma_r(\epsilon)$, можно воспользоваться следующей схемой расчета, основанной на исследовании [12] и справедливой в объемном случае для слабых коротких волн.

Пусть на некотором расстоянии от заряда максимальное напряжение, рассчитанное по (3.2), равно напряжению в точке O_2 диаграммы $\sigma_r(\epsilon)$ — фиг. 2. Волна напряжений характеризуется эпюрой фиг. 2б с плавным участком нарастания напряжения от нуля до напряжения в точке O_1 диаграммы $\sigma_r(\epsilon)$. Последнее определится как ордината точки касания прямой O_1O_2 к кривой $\sigma_r(\epsilon)$ на участке $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_*$. Эпюра напряжений в диапазоне $(0, -\sigma_{rO_1})$ строится по формулам (2.25) и характеризуется почти прямолинейным нарастанием напряжений, затем напряжение изменяется скачком от $-\sigma_{rO_1}$ до $-\sigma_{rO_2}$. Время нарастания в волне напряжений определяется как разность времен прихода амплитуд нулевой и $-\sigma_{rO_1}$.

Таким образом, из пп. 1 и 2 следует, что причиной появления конечного времени нарастания напряжений является существование участка $0 > \sigma_r > \sigma_{rO_1}$ диаграммы $\sigma_r(\epsilon)$, содержащего внутри точку перегиба $(-\sigma_{r_*}, \epsilon_*)$.

3. Остановимся в заключение на задаче об излучении звуковых волн при подземном взрыве. Можно считать очевидным, что участие нелинейных факторов и влияние «пластичности» горных пород проявляется в некоторой ближней зоне взрыва и не распространяется на большие расстояния, где волновые процессы происходят практически по упругим законам (если не учитывать трещиноватости и микронеоднородностей горных пород).

¹ В опытах эпюра напряжений $-\sigma_r(t)$ в области 2 может быть трудно различима от эпюры в области 3, если измерительная аппаратура не обладает достаточной разрешающей способностью.

При этом факторы нелинейности и пластичности, каждый в отдельности, могут иметь свою зону проявления. В непосредственной близости от заряда даже в прочных горных породах объемные деформации могут достигать порядка 0.1 [8, 9], что не позволяет пренебрегать изменением $d\sigma / d\epsilon$ на диаграмме $\sigma(\epsilon)$: необходимо учитывать нелинейность в уравнениях состояния движения и неразрывности, например, так, как это указано в § 2. Деформации сдвига также могут достигать значительных величин, что заставляет обратиться к условиям предельного состояния типа (1.4). Само же предельное состояние наступает, как только деформация сдвига γ достигает [10] предельного упругого значения γ_e , которое будет постоянным для данной породы. В упругой области главный сдвиг определяется через главные напряжения по формуле

$$\gamma = \frac{\sigma_\phi - \sigma_r}{2\mu}$$

так что на границе упругой зоны и зоны с условием (1.7) или (1.7') должно быть выполнено соотношение

$$-\sigma_r = \frac{2\mu\gamma_e - m_1}{1 - \alpha} \quad (3.3)$$

или

$$-\sigma_r = \frac{2\mu\gamma_e}{1 - \alpha} \quad (3.4)$$

где μ — модуль сдвига.

Предельные значения напряжения на границе зон оказываются постоянными, поскольку γ_e , μ , α — постоянные параметры среды.

Мы не будем останавливаться на подробном изучении задачи об излучении звука зоной предельных состояний, ограничиваясь этим замечанием и ссылкой на [11].

Поступила 2 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ханукаев А. Н., Ваянги И. Ф., Гоголев В. И., Мыркин В. Г. О распространении волн напряжений при взрыве в твердых породах. Зап. Ленингр. горн. ин-та им. Г. В. Плеханова, 1961, т. XIV, вып. 1.
2. Руппштейн К. В., Либерман Ю. М. Введение в механику горных пород. Госгортехиздат, 1960.
3. Талобр Ж. Механика горных пород. Госгортехиздат, 1960.
4. Рахматулин Х. А. О распространении волн разгрузки. ПММ, 1945, т. IX, вып. 1.
5. Христианович С. А. Ударная волна на больших расстояниях от места взрыва. ПММ, 1956, № 6.
6. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
7. Губкин Е. К. Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
8. Броберг К. Б. Ударные волны в упругой и упруго-пластической среде. Госгортехиздат, 1959.
9. Дремин А. Н. Исследование ударного сжатия мрамора и кварца. Тр. Ученого Совета по народнохозяйственному использованию взрыва СО АН СССР, 1960, № 16.
10. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Госгортехиздат, 1956.
11. Зволинский Н. В. Об излучении упругой волны при сферическом взрыве в грунте. ПММ, 1960, т. XXIV, № 1.
12. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 3.