УДК 539.374:537.321/322

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА НА ОБРАЗОВАНИЕ ШЕЙКИ В РАСТЯГИВАЕМОМ СТЕРЖНЕ

А. А. Бычков, Д. Н. Карпинский

Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики
при Ростовском государственном университете, 344090 Ростов-на-Дону

Исследованы условия шейкообразования в растягиваемом термовязкопластичном стержне в условиях пропускания через него переменного электрического тока. Моделирование учитывает сложные определяющие соотношения для материала стержня, теплопередачу в стержне и распределение тока по сечению стержня в зависимости от его частоты (скин-эффект). Исследована устойчивость однородного растяжения с помощью линейного анализа возмущений на основе теории Раусса — Гурвица, результаты уточнялись с помощью нелинейного анализа с учетом влияния амплитудной зависимости возмущений на устойчивость пластического деформирования.

Введение. В [1] выполнен расчет условий образования шейки при растяжении стержня на основе модели (см. библиографию в [1]), которая предполагает на раннем этапе развития локализации деформации мгновенное возникновение и стабилизацию локальных утонений на образце, устойчивая локализация формоизменения наступает в связи с увеличением числа спонтанно возникающих шеек при достаточно больших деформациях. По мнению авторов, дальнейшее развитие исследований шейкообразования необходимо связать с разработкой методов управления условиями деформирования образца. Одним из таких методов является электропластическая обработка образцов с целью понижения энергозатрат и предупреждения появления шейки, в частности при волочении проволоки [2, 3].

В [3] предполагается, что влияние электрического тока на механические свойства нагруженного твердого тела обусловлено действием джоулева тепла, пондеромоторными силами, создаваемыми магнитным полем тока и «электронным ветром», связанным с рассеянием электронов на дислокациях (электронно-пластический эффект). Эти механизмы способствуют облегчению пластической деформации в местах концентрации механических напряжений, что позволяет считать электрообработку образцов перспективным технологическим приемом. Расчет влияния джоулева тепла на условия роста трещины выполнен в [4, 5]. Что касается влияния электрического тока на условия образования шейки в растягиваемом стержне, то авторам известна только работа [6], в которой на основании расчета сделан вывод о том, что импульсный электрический ток не влияет на образование шейки, а оказывает лишь общее пластифицирующее действие на деформируемый образец. Однако, по нашему мнению, в [6] не представлены убедительные аргументы, подтверждающие справедливость сделанных выводов, а сама задача требует дополнительного исследования.

В настоящей работе ограничимся оценкой условий образования шейки в сплошном стержне из термовязкопластичного материала при различных величинах и частотах переменного электрического тока, протекающего через стержень.

1. Постановка задачи. Постановка задачи о шейкообразовании при одноосном растяжении сплошного стержня с плотностью ρ_0 дана в [7]. Дополним предположения [7] об условиях деформирования стержня условием воздействия переменного электрического тока на стержень в режиме постоянной разности потенциалов U на его концах, учитывая при этом нагрев образца джоулевым теплом и эффект Томсона [8]. Полагая начальное поперечное сечение стержня A_0 однородным вдоль длины, получим следующую систему уравнений, описывающую поведение образца при больших пластических деформациях:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \mathrm{e}^{-\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial X}, \qquad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} (\sigma \mathrm{e}^{-\varepsilon}), \qquad C \frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda j \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma j^2 + \beta \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}. \tag{1}$$

Здесь v — скорость перемещения; ε — деформация; θ — температура; C — теплоемкость; k — удельная теплопроводность; β — доля пластической работы, преобразующаяся в тепло; λ — коэффициент Томсона [8]; $\gamma = \gamma_0(1 + \alpha(\theta - 273))$; γ_0 — начальное удельное сопротивление; α — температурный коэффициент электросопротивления; j — плотность тока в режиме постоянного напряжения $U = U_0$ на образце:

$$j = j_0 \mathrm{e}^{\varepsilon} l_0 k_\omega(0, \theta^*) \Big/ \int\limits_0^{l_0} k_\omega(\varepsilon, \theta)\, dX,$$

где $k_\omega(\varepsilon, \theta) = (\gamma/\gamma_0)\,\mathrm{e}^{2\varepsilon}(1 + (A_0 \mathrm{e}^{-\varepsilon}\omega/(10^7\gamma))^2/12)$ в случае слабого скин-эффекта [8] и

$$k_\omega(\varepsilon, \theta) = \frac{\gamma}{\gamma_0}\, \mathrm{e}^{2\varepsilon}(0{,}277 + 0{,}997(A_0 \mathrm{e}^{-\varepsilon}\omega/(2 \cdot 10^7\gamma))^{1/2})$$

в случае сильного скин-эффекта [8]; j_0 и U_0 — плотность тока и напряжение на образце в начальный момент времени; l_0 — начальная длина образца.

Связь между эйлеровой координатой x и лагранжевой X задана выражением

$$x = X + \int\limits_0^t v(X, \tau)\, d\tau. \tag{1a}$$

Функция $\sigma = F_t^{-1}\psi(\theta, \varepsilon, \dot\varepsilon)$ задает нелинейное определяющее соотношение материала стержня. Множитель Бриджмена $F_t^{-1} = (1 + 2R_c/R)\lg(1 + R/(2R_c))$ учитывает трехосность напряженного состояния в шейке, а локальный радиус сечения стержня R и радиус шейки R_c связаны соотношением $R_c = (1 + (\partial R/\partial x)^2)^{3/2}/(\partial^2 R/\partial x^2)$ [1].

Выберем определяющее соотношение аналогично [7]:

$$\sigma = \mu F_t^{-1} \varepsilon^n \dot\varepsilon^m \theta^\nu, \tag{2}$$

где μ, n, m, ν — постоянные. При этом для (1) предполагаются следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{gathered} t = 0\colon \quad \varepsilon = 0, \quad \dot\varepsilon = \frac{V}{l_0} = \dot\varepsilon^*, \quad v = \frac{V}{l_0} X = \dot\varepsilon^* X, \quad \theta = \theta^*, \\ X = 0\colon \quad v = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \qquad X = l_0\colon \quad v = V, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где V, θ^*, $\dot\varepsilon^*$ — постоянные.

2. Линейный анализ. Рассмотрим в момент времени t_0 однородное зависящее от времени решение ε_0, σ_0, v_0, θ_0, F_{t0} уравнений (1), (2) с начальными и граничными условиями (3). Аналогично [7] представим малое возмущение этого решения (неоднородное решение) в следующей форме:

$$\begin{gathered} \varepsilon(X, t) = \varepsilon_0(t) + \delta\varepsilon(X, t) = \varepsilon_0(t) + \delta\varepsilon_0 \mathrm{e}^{\eta(t - t_0)} \mathrm{e}^{i\xi X}, \\ \sigma(X, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma(X, t) = \sigma_0(t) + \delta\sigma_0 \mathrm{e}^{\eta(t - t_0)} \mathrm{e}^{i\xi X}, \\ v(X, t) = v_0(X, t) + \delta v(X, t) = v_0(X, t) + \delta v_0 \mathrm{e}^{\eta(t - t_0)} \mathrm{e}^{i\xi X}, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\theta(X,t) = \theta_0(t) + \delta\theta(X,t) = \theta_0(t) + \delta\theta_0 \mathrm{e}^{\eta(t-t_0)}\mathrm{e}^{i\xi X},$$

$$F_t(X,t) = F_{t0}(t) + \delta F_t(X,t) = F_{t0}(t) + \delta F_{t0}\mathrm{e}^{\eta(t-t_0)}\mathrm{e}^{i\xi X},$$

где $\delta\varepsilon$, $\delta\sigma$, δv, $\delta\theta$, δF_t — амплитуды возмущений; $\eta = \delta\dot{\varepsilon}/(\delta\varepsilon)$ — мера роста возмущения; ξ — волновое число. Выбор неоднородного решения (4) основан на предположении малости амплитуды возмущения по сравнению с ε_0, σ_0, v_0, θ_0, F_{t0}, тогда разложение в ряд Фурье неоднородного решения может быть ограничено первым слагаемым ряда. Обычно этот метод используется, когда возмущаемое решение стационарно, однако его используют также для исследования устойчивости решения, зависящего от времени [7], но в этом случае предполагают, что скорость роста возмущения много больше скорости роста однородного решения [9].

Подставляя (4) в (1), (2) и учитывая, что $F_{t0} = 1$, $\delta F_{t0} = -(A_0/(2\pi))\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\delta\sigma_0$, получим систему линейных уравнений с неизвестными $\delta\varepsilon_0$, $\delta\sigma_0$, δv_0, $\delta\theta_0$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} + \eta\,\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\varepsilon}} + \frac{A_0}{2\pi}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\sigma_0\right)\delta\varepsilon_0 - \delta\sigma_0 + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\delta\theta_0 = 0,$$

$$-\sigma_0\mathrm{e}^{-\varepsilon_0}i\xi\delta\varepsilon_0 + \mathrm{e}^{-\varepsilon_0}i\xi\delta\sigma_0 - \eta\rho_0\delta v_0 = 0, \qquad (\eta + \dot{\varepsilon}_0)\delta\varepsilon_0 - i\xi\mathrm{e}^{-\varepsilon_0}\delta v_0 = 0,$$

$$\left(\eta\beta\sigma_0 + 2\gamma_0\bar{j}_0^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0}s^2(1 + \alpha(\theta_0 - 273))\right)\delta\varepsilon_0 +$$

$$+\beta\dot{\varepsilon}_0\delta\sigma_0 + \left(\lambda\bar{j}_0\mathrm{e}^{\varepsilon_0}i\xi s + \alpha\gamma_0\bar{j}_0^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0}s^2 - C\eta - k\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\right)\delta\theta_0 = 0,$$

где $s = k_\omega(0,\theta^*)/k_\omega(\varepsilon_0,\theta_0)$. Корни характеристического уравнения данной системы определяют устойчивость решения задачи, соответствующего равномерному растяжению стержня (однородное решение). Характеристическое уравнение для данной системы имеет следующий вид:

$$\eta^3 + (a_1' + ia_1'')\eta^2 + (a_2' + ia_2'')\eta + a_3' + ia_3'' = 0,$$

где

$$a_1' = \frac{1}{\rho_0 C}\left[\xi^2\left(\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}C\,\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\varepsilon}} + k\rho\right) + \dot{\varepsilon}_0\rho\left(C - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\beta\right) - \rho_0\alpha\gamma_0\bar{j}_0^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0}s^2\right], \quad a_1'' = -\frac{1}{C}\,\lambda\bar{j}_0\xi\mathrm{e}^{\varepsilon_0}s,$$

$$a_2' = \frac{1}{\rho_0 C}\left\{\xi^4\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\left(\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\sigma_0 C\,\frac{A_0}{2\pi} + k\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\varepsilon}}\right) + \xi^2\left[\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\left(\sigma_0\beta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + C\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} - \sigma_0\right)\right) + \dot{\varepsilon}_0 k\rho\right] -\right.$$

$$\left. -\beta\rho\dot{\varepsilon}_0^2\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\varepsilon}}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon} + \rho_0\dot{\varepsilon}_0\right)\alpha\gamma_0\bar{j}_0^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0}s^2\right\},$$

$$a_2'' = -\frac{1}{\rho_0 C}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\varepsilon}}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon} + \rho_0\dot{\varepsilon}_0\right)\lambda\bar{j}_0\xi\mathrm{e}^{\varepsilon_0}s,$$

$$a_3' = \frac{1}{\rho_0 C}\left[\xi^6\mathrm{e}^{-4\varepsilon_0}\sigma_0\,\frac{A_0}{2\pi}\,k + \xi^4\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}k\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} - \sigma_0\right) + \xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\sigma_0\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\dot{\varepsilon}_0\beta +\right.$$

$$\left. +2\gamma_0\bar{j}_0^2 s^2(1 + \alpha(\theta_0 - 273))\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} + \frac{A_0}{2\pi}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\sigma_0 - \sigma_0\right)\alpha\gamma_0\bar{j}_0^2\xi^2 s^2\right],$$

$$a_3'' = -\frac{1}{\rho_0 C}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} + \frac{A_0}{2\pi}\,\xi^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}\sigma_0 - \sigma_0\right)\lambda\bar{j}_0 s\xi^3\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0}.$$

Согласно теории устойчивости Раусса — Гурвица решение задачи устойчиво, если все корни характеристического уравнения данной линеаризованной системы имеют отрицательную действительную часть. Для этого необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_1'' & -a_2' & a_3'' & 0 \\ 0 & 1 & -a_1'' & -a_2' & a_3'' \\ 0 & 0 & a_1' & -a_2'' & -a_3' \\ 0 & a_1' & -a_2'' & -a_3' & 0 \\ a_1' & -a_2'' & -a_3' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

была иннорно-положительна [10].

Для вычисления скорости равномерной деформации $\dot\varepsilon_0$ использовалось следующее соотношение: $\dot\varepsilon_0 = \dot\varepsilon^* \mathrm{e}^{-\varepsilon_0}$, а температура стержня на этапе равномерной деформации θ_0 определялась из решения уравнения

$$C\,\frac{\partial\theta_0}{\partial t} = \gamma_0(1+\alpha(\theta_0-273))j_0^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0}s^2 + \beta\sigma_0\,\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t}.$$

Граница устойчивости однородного решения для задачи (1)–(3) соответствует нарушению условия иннорной положительности характеристической матрицы. Результаты расчета этой границы при значениях постоянных $\mu = 2{,}486\cdot 10^4$ МПа, $n = 0{,}52$, $C = 3{,}6\cdot 10^6$ Дж/(м$^2\cdot$К), $k = 15$ Вт/(м$\cdot$К), $\theta_0^* = 294$ К, $m = 0{,}002$, $\nu = -0{,}5$, $\rho_0 = 7800$ кг/м^3, $A_0 = 4\cdot 10^{-6}$ м^2 [7, 11], $\gamma_0 = 8{,}6\cdot 10^{-8}$ Ом$\cdot$м, $\lambda = -22{,}8\cdot 10^{-6}$ В/К, $\alpha = 3{,}3\cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$ [12], $l_0 = 0{,}05$ м изображены на рис. 1 для различных значений начальной плотности j_0 и частоты ω электрического тока (кривая *1* соответствует $\omega = 0$, *2* — $\omega = 500$ кГц, *3* — $\omega = 700$ кГц, *4* — $\omega = 5$ МГц; кривые *1–3* — слабый скин-эффект, *4* — сильный скин-эффект; $j_0 = 2\cdot 10^7$ А/м^2 (рис. 1,*а*), $j_0 = 3\cdot 10^7$ А/м^2 (рис. 1,*б*)). Однородное решение будет устойчиво к возмущению при ξ и ε_0, находящихся ниже соответствующих кривых на рис. 1,*а*,*б*.

3. Нелинейный анализ. Ниже проведен нелинейный анализ устойчивости образования шейки в растягиваемом образце с целью уточнения результатов линейного анализа из п. **2**. Для этого к однородному решению задачи при значении однородной деформации $\varepsilon_0 = \varepsilon_0$ добавлялось возмущение деформации следующего вида:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0\delta_0 \sin^2(\xi(x-a)),$$

где δ_0 — амплитуда начального возмущения; $\xi = \pi/(b-a)$ — волновое число, $a < x < b$; a и b — координаты левой и правой границ возмущенной области. Очевидно, что коэффициенты ряда Фурье для данного возмущения убывают как N^{-3}, где N — номер коэффициента Фурье. Выбор вида возмущения ε_p обеспечивает малую погрешность при отбрасывании

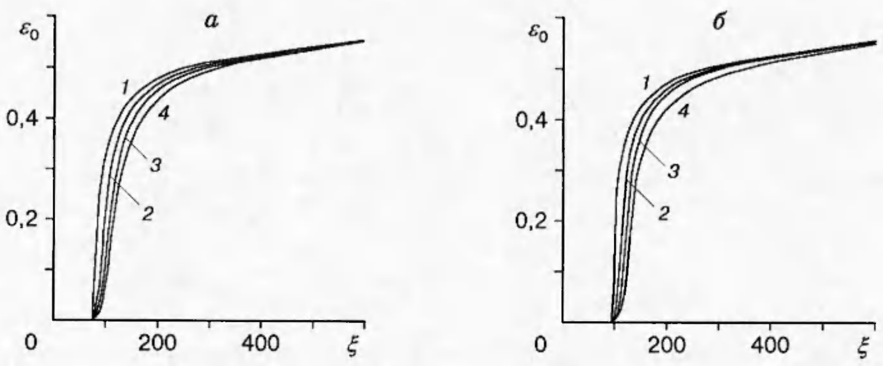

Рис. 1

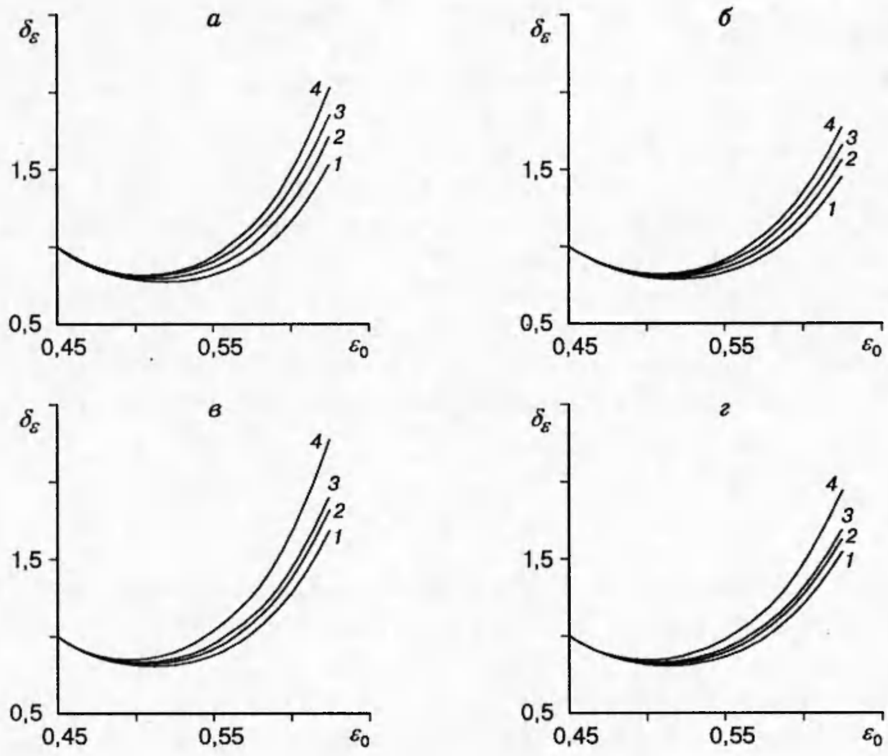

Рис. 2

членов ряда Фурье при $N > 1$ и связан с необходимостью сопоставления результатов линейного и нелинейного анализа. Последнее позволяет исследовать условия образования шейки в зависимости от амплитуды возмущения δ_0. Результаты расчетов эволюции пластической деформации (1)–(3) с возмущенными начальными условиями представлены на рис. 2 ($\dot{\varepsilon}^* = 1{,}66\cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$, $\bar{\varepsilon}_0 = 0{,}45$), где показана зависимость относительной амплитуды возмущения $\delta_\varepsilon(t) = (\max\limits_x \varepsilon(x,t) - \min\limits_x \varepsilon(x,t))/(\varepsilon_0\delta_0)$, $0 < x < l_0$ от однородной деформации ε_0 для различных значений начальной плотности электрического тока $\bar{j}_0$, частоты ω и волнового числа ξ (обозначения те же, что на рис. 1; $\bar{j}_0 = 2\cdot 10^7$ А/м^2 (рис. 2,*а*,*б*), $\bar{j}_0 = 3\cdot 10^7$ А/м^2 (рис. 2,*в*,*г*); $\xi = 157$ м$^{-1}$ (рис. 2,*а*,*в*), $\xi = 314$ м$^{-1}$ (рис. 2,*б*,*г*)).

4. Обсуждение результатов. Проанализируем полученные результаты. Как показано на рис. 1, при достаточно высокой скорости деформации $\dot{\varepsilon}^*$ критическая деформация ε_{0c} существенным образом зависит от величины волнового числа ξ, особенно для малых его значений. Согласно результатам линейного анализа (рис. 1) при постоянном напряжении U увеличение частоты тока ω ведет к уменьшению устойчивости стержня к возмущению. При этом кривые на рис. 1,*б* располагаются ниже кривых на рис. 1,*а*, соответствующих тем же значениям ω. Таким образом, повышение начальной плотности тока $\bar{j}_0$ способствует более раннему образованию шейки, при этом влияние электрического тока особенно велико в области малых ξ. Следует отметить увеличение сдвига вправо кривых $\varepsilon_{0c}(\xi)$ на рис. 1 при возрастании $\bar{j}_0$. В то же время расчет показывает, что в случае, когда температурный коэффициент электросопротивления $\alpha = 0$, данные сдвиги отсутствуют и все кривые выходят из точки $\varepsilon_0 = 0$, $\xi = 0$.

Согласно результатам нелинейного анализа (см. рис. 2) возмущение ε_p вначале затухает, а затем, по достижении $\varepsilon = \varepsilon_{0c}$, начинает расти. При этом чем больше значение ξ, тем позже наблюдается начало роста δ_ε и тем медленнее δ_ε растет (кривые на рис. 2,*а*,*в* находятся выше кривых на рис. 2,*б*,*г*, соответствующих тем же значениям j_0 и ω). Кривые для больших ω находятся выше кривых для меньших ω, а кривые на рис. 2,*а*,*б* располагаются ниже кривых на рис. 2,*в*,*г*, соответствующих тем же значениям ξ и ω, что подтверждает результаты линейного анализа.

Расчеты, проведенные для различных значений амплитуды начального возмущения в диапазоне $10^{-5} < \delta_0 < 10^{-2}$, показали, что δ_ε практически не зависит от величины δ_0. Обнаружено также, что эффект Томсона оказывает малое (менее 2 % от ε_{0c}) влияние на устойчивость деформируемого стержня.

Из расчетов также следует, что действие переменного электрического тока на деформируемый стержень способствует зарождению в нем шейки. Однако величина тока оказывает более существенное влияние на критическую деформацию шейкообразования, чем его частота. Амплитуда возмущения деформации и эффект Томсона слабо влияют на образование шейки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бычков А. А., Карпинский Д. Н.** Численный анализ условий образования шейки в растягиваемом стержне из термовязкопластического материала // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 174–179.
2. **Действие** электромагнитных полей на пластичность и прочность материалов: Тез. докл. II Всесоюз. конф., Юрмала, декабрь 1990 г. М.: Ин-т машиноведения АН СССР, 1990. Ч. 1, 2.
3. **Спицын В. И., Троицкий О. А.** Электропластическая деформация металлов. М.: Наука, 1985.
4. **Максимов И. Л., Свирина Ю. А.** Диссипативные неустойчивости разрушения в проводящих материалах с транспортным током. 1. Критерий неустойчивости, качественный анализ // Журн. техн. физики. 1996. Т. 66, № 9. С. 64–74.
5. **Максимов И. Л., Свирина Ю. А.** Диссипативные неустойчивости разрушения в проводящих материалах с транспортным током. 2. Эволюционные уравнения, диаграммы неустойчивости // Там же. С. 75–85.
6. **Рузанов Ф. И., Рощупкин А. М., Сташенко В. И.** Влияние скорости деформации и импульсного тока на предельное удлинение металла в режиме сверхпластичности // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1990. № 1. С. 82–89.
7. **Fressengeas C., Molinari A.** Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow // Acta Met. 1985. V. 33, N 3. P. 387–396.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошной среды. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
9. **Fressengeas C., Molinari A.** Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates // J. Mech. Phys. Solids. 1987. V. 35, N 2. P. 185–211.
10. **Джури Э.** Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1979.
11. **Bai Y., Dodd B.** Adiabatic shear localization // Occurence, theories and applications. N. Y.: Pergamon Press, 1992.
12. **Физические** величины: Справ. / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

Поступила в редакцию 9/I 1998 г.