

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЫБОР ШАГА ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Проведен анализ устойчивости линеаризованной системы телеграфных уравнений, предложенной в качестве модели для изучения процессов воспламенения смесей газов, содержащих токсичные компоненты (метилмеркаптан и др.). Предполагается, что воспламенение связано с тем набором аэродинамических и кинетических параметров, при которых начинается развитие неустойчивости в системе. Анализ спектра растущих возмущений позволяет заключить, что их короткопериодическая часть не может быть с достаточной точностью описана с помощью разностных схем 2-го порядка точности, обычно применяемых при численной реализации, а нужно применять разностную схему, имеющую 4-й порядок точности. Предложенный метод позволяет эффективно определить значения шагов по временной и пространственной координатам как функции основных турбулентных и кинетических параметров для решения задач воспламенения.

Для исследования вопросов, возникающих в связи с задачей о воспламенении струи, содержащей малые концентрации горючих токсичных веществ в высокотемпературном турбулентном потоке окислителя, предложено рассматривать следующую систему уравнений [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial c}{\partial t} &= v'^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - F, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial T}{\partial t} &= v'^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{c_p} F, \end{aligned} \quad (1)$$

где F — источниковый член, включающий выражение для глобальной кинетики высокотемпературного окислителя; f — частота турбулентных пульсаций скорости; v' — среднеквадратичная скорость пульсаций; c_p — теплоемкость; c — концентрация горючих веществ; T — температура; t — время; y — продольная координата.

Так как концентрации горючих веществ малы, а температура сносящего потока окислителя высока и мало меняется, второе уравнение может быть записано не для энтальпии, а для температуры, что упрощает решение. Предложенную систему можно использовать для не очень малых концентраций горючих веществ, поскольку рассматривается задача не горения, а воспламенения, т. е. решение доводится до наперед заданного градиента температуры в точках воспламенения.

Основное отличие предложенной модели состоит в том, что здесь в силу известных свойств телеграфного уравнения [3] возникает фронт, соответствующий краю струи, где при приведенных выше условиях и происходит воспламенение и в окрестности которого распределение концентрации существенно отличается от соответствующего для чисто диффузионного случая (параболические уравнения).

Чтобы более ясно выделить эти отличия и проанализировать влияние на решение вариаций параметров f , v' и других, необходимо минимизировать «собственные» ошибки численной схемы. Для этого предлагается, используя схему, состоящую из минимального числа точек (а именно девятиточечную), так подобрать параметры схемы (шаги по времени и пространству, в частности), чтобы при постоянных значениях f и v' схема имела порядок выше второго.

В однородном случае $F=0$ уравнения (1) расщепляются и становятся идентичными. Запишем одно из них в виде

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2f}$; $v = \frac{v'^2}{2f}$; u — любая из переменных c и T .

Обозначим сеточную функцию через u_j^n , где нижний индекс определяет пространственную, а верхний — временную координаты. Пусть τ и h — шаги по времени и пространству соответственно. Запишем конечно-разностное уравнение в следующем символическом виде:

$$G(u) = D(u). \quad (3)$$

Определим операторы ∇_y^2, ∇_t^2

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 u_j^n &= u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n, \\ \nabla_t^2 u_j^n &= u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

и с их помощью перепишем правую часть (3)

$$D(u) = v \left\{ \frac{\nabla_y^2 u_j^n}{h^2} + \rho \frac{\nabla_t^2 \nabla_y^2 u_j^n}{h^2} \right\}. \quad (5)$$

После разложения функции u в ряд Тейлора в окрестности точки $(n\tau, jh)$ получим

$$D(u) = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v^2 \left\{ \rho \tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\} + \Theta(\tau^4, \tau^2 h^2, h^4). \quad (6)$$

Здесь члены в фигурных скобках дают главную часть ошибки аппроксимации.

Найдем такое выражение для $G(u)$, чтобы компенсировать указанную главную часть ошибки аппроксимации. Возьмем такую функцию v , которая удовлетворяет уравнению (2). Дважды дифференцируя по времени (2), имеем

$$\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = v \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial y^2}, \quad (7)$$

и, повторно применяя операторы из (2), получаем

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + 2\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4}. \quad (8)$$

Следовательно, из (6), используя (2), (7), (8), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{h^2}{12v} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + 2\varepsilon \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \rho \tau^2 \left(\varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right) = \\ = D(v) + \Theta(h^4, h^2 \tau^2, \tau^4). \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем теперь $G(u)$ в виде

$$G(u) = \alpha u_j^{n+1} + \beta u_j^n + \gamma u_j^{n-1} \quad (10)$$

и произведем разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(n\tau, jh)$. Тогда

$$\begin{aligned} G(u) &= \alpha \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\tau^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) + \\ &+ \beta u + \gamma \left(u - \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\tau^4}{24} \right) + \Theta(\tau^5). \end{aligned} \quad (11)$$

Если теперь подобрать коэффициенты α, β, γ (имея в виду, что $\alpha, \beta \sim \frac{1}{v}$) и параметры τ, h таким образом, чтобы в (11) (для $G(v)$) и в (9) (для $D(v)$) все явно выписанные члены совпадали, получим схему 4-го порядка точности.

Приравнивая коэффициенты при соответствующих слагаемых, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0, \quad \tau(\alpha - \beta) = 1, \\ \tau^2(\alpha + \beta) &= 2\varepsilon + \frac{h^2}{6v}, \quad \tau^3(\alpha - \beta) = \frac{c h^2}{v} + 6\rho\tau^2, \\ \tau^4(\alpha + \beta) &= \frac{2c^2 h^2}{v} + 24\varepsilon\rho\tau^2,\end{aligned}\quad (12)$$

решив которую, найдем выражения для коэффициентов

$$\alpha = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau^2} \left(\varepsilon + \frac{h^2}{12v} \right), \quad \beta = -\frac{2}{\tau} \left(\varepsilon + \frac{h^2}{12v} \right), \quad \gamma = -\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau^2} \left(\varepsilon + \frac{h^2}{12v} \right), \quad (13)$$

а также формулы

$$h^2 = 72\rho v \varepsilon, \quad \tau^2 = \frac{72\rho c^2}{1 - 6\rho}, \quad (14)$$

определяющие оптимальные значения параметров τ , h , при которых схема имеет четвертый порядок точности.

Теперь необходимо исследовать вопрос об устойчивости построенной схемы, т. е. определить значения ρ , при которых она вообще устойчива, и указать зависимость от ρ максимально допустимого шага по времени $\tau_{\max}(\rho)$. Запишем построенную схему в соответствии с (5), (13)

$$\left(\varepsilon + \frac{h^2}{12v} \right) \frac{\nabla_y^2 u_j^n}{\tau^2} + \frac{1}{2\tau} (n_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = v \frac{\nabla_y^2}{h^2} \{1 + \rho \nabla_y^2\} u_j^n. \quad (15)$$

Анализ устойчивости проведем по общепринятой схеме. Запишем

$$u_j^n = e^{ikh} \lambda^n, \quad (16)$$

где k — волновое число. Подставляя (16) в (15), получим

$$\left(\varepsilon + \frac{h^2}{12v} \right) (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \frac{\tau}{2} (\lambda^2 - 1) = \frac{-4 \sin^2 \frac{kh}{2}}{h^2} v \tau^2 (\lambda + \rho(\lambda^2 - 2\lambda + 1)). \quad (17)$$

Введем обозначения:

$$a = \varepsilon + \frac{h^2}{12v} + \frac{4 \sin^2 \frac{kh}{2}}{h^2} \rho v \tau^2, \quad b = \frac{\tau}{2}, \quad c = \frac{2 \sin^2 \frac{kh}{2}}{h^2} v \tau^2, \quad (18)$$

получим уравнение

$$\lambda^2(a + b) - 2\lambda(a - c) + a - b = 0. \quad (19)$$

Из (19) находим:

$$\lambda = \frac{1}{a + b} \{a - c \pm \sqrt{D}\}, \quad D = b^2 + c^2 - 2ac. \quad (20)$$

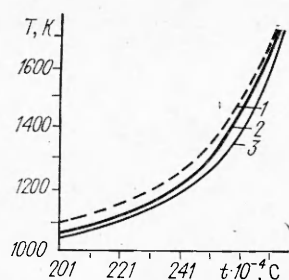
Условие устойчивости схемы (15) $|\lambda| < 1$ можно свести к двум неравенствам:

$$2a - c > 0 \quad \text{при } D > 0, \quad (21)$$

$$2ab + 4ac > 2c^2 \quad \text{при } D < 0. \quad (22)$$

Поскольку $a, b, c > 0$, из (21) следует (22), и достаточно проанализировать условия выполнения неравенства (21). Из (14) заключаем, что $\rho < 1/6$, поэтому наиболее трудно удовлетворить неравенству (21) при $\sin \frac{kh}{2} = 1$ ($kh = \pi$). При $kh = \pi$ условие устойчивости (21) сводится к виду

$$\tau^2 < \frac{\varepsilon + \frac{h^2}{12v}}{\frac{v}{h^2} (1 - 4\rho)}. \quad (23)$$



Пример расчетов.

Четвертый порядок точности: $1 - h = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 4,9 \cdot 10^{-4}$; второй порядок точности: $2 - h = 10^{-3}$, $\tau = 10^{-4}$,
 $3 - h = 1 \cdot 10^{-3}$, $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$.

Остается проверить, что действительно существуют такие ρ , что при значениях τ , h , даваемых (14), неравенство (23) удовлетворяется. Подставляя (14) в (23), получим после преобразований

$$\frac{1 - 4\rho}{1 - 6\rho} < 1 + 6\rho, \quad (24)$$

откуда следует, что при $\rho < 1/9$ и τ , h , определяемых (14), условие устойчивости удовлетворяется. Имея в виду еще и первое равенство (14), сформулируем окончательный результат так: при $0 < \rho < 1/9$ схема (15) с параметрами τ , h , определенными по формулам (14), имеет четвертый порядок точности аппроксимации по t и по y .

На рисунке представлены кривые изменения температуры в процессе воспламенения при различных аппроксимациях системы уравнений (1). Видно, что при использовании предлагаемой схемы наблюдается увеличение температуры в начальный момент в струе горючего вещества по сравнению с другой аппроксимацией, что может существенно повлиять на условия воспламенения.

Предложенная схема используется и при переменных v , ε : зафиксировав h , можно предопределять значения ρ , τ до тех пор, пока $\rho < 1/9$ или значение τ не становится слишком маленьким.

Предложенный в работе подход к проблеме воспламенения с использованием (1) применен для рассмотрения задачи о воспламенении струи метилмеркаптана в установках термического обезвреживания токсичных выбросов. Как оказалось, при одинаковом значении коэффициента турбулентного обмена $D_t = v'\Lambda$, где $\Lambda = v'/f$ — масштаб турбулентности, совершенно различно определяется перенос воспламенения в зависимости от того, за счет чего меняется D_t . При увеличении v' ($f = \text{const}$) воспламенения нет, при увеличении f ($v' = \text{const}$) воспламенение возникает [4]. При решении системы параболических уравнений (чисто диффузионный случай) такого отличия не наблюдается, так как в этом случае в них входит D_t в явном виде.

Представляется, что предложенный в работе подход к задаче воспламенения может быть полезен и при решении других прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брысенкова Н. К., Тюльпанов Р. С. Об одном способе расчета процесса воспламенения дурнопахнущих газов целлюлозно-бумажной промышленности в топочном устройстве // Охрана окружающей среды от загрязнения промышленными выбросами ЦБП: Межвуз. сб. науч. тр. — Л.: ЛТА, 1982.
2. Тюльпанов Р. С., Брысенкова И. К. Исследование влияния теплообмена на воспламенение газов в потоках // Теплообмен — VI: Материалы VI Всесоюз. конф. по теплообмену. — Минск: ИТМО АН БССР, 1980. — Т. III.
3. Тюльпанов Р. С. Диффузионные пламена. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: ГИТТЛ, 1956.

г. Санкт-Петербург