

3) к образованию токов кратных частот, наиболее существенными среди которых являются токи двойной частоты (контуры этих токов с полюсным делением  $1/2\pi$  «расщепляются» на два, которые располагаются симметрично относительно оси канала (фиг. 2 в)).

Токи нулевой и двойной частоты приводят к образованию бесполезных усилий и увеличению джоулевых потерь. Таким образом, если учесть еще уменьшение токов основной частоты, становится очевидной небыстротеряемость вопроса об ограничении эффекта анизотропности.

Легко показать, что для идеальной компенсации указанного эффекта необходимо выполнение на боковых стенках канала условия

$$h = -\frac{\epsilon s}{1 + (\epsilon s)^2} \cos(t - x) - \frac{(\epsilon s)^2}{1 + (\epsilon s)^2} \sin(t - x)$$

Это равносильно требованию вынесения продольных участков контуров тока за пределы жидкости. Одним из решений этого вопроса, хотя и неполным, может явиться предложение А. И. Вольдека [1] об устройстве боковых стенок канала из проводящего материала. Однако это предложение было сделано в связи с другой задачей, а именно, с задачей уменьшения контурных сопротивлений в условиях скалярной электропроводности жидкости.

Поступила 14 I 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольдек А. И., Янес Х. И. Поперечный краевой эффект в плоских индукционных насосах при канале жидкого металла с проводящими стенками. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Изд. Латв. АН, 1962.

### СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ<sup>1</sup>

*В. Е. Захаров*

(Новосибирск)

Ниже рассматриваются стационарные нелинейные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в плазме конечной температуры. Показано, что в этом случае существуют уединенные волны разрежения с характерной длиной больше или порядка ларморовского радиуса ионов.

В соответствии с этим фронт ударных волн имеет вид осцилляторной структуры, распространяющейся в область невозмущенного течения.

Стационарные нелинейные волны возникают в средах, в которых есть конкуренция процессов дисперсии и процессов нелинейной деформации формы волны.

Характерная длина стационарной волны зависит от ее амплитуды и всегда больше или порядка дисперсионной длины.

Такие волны в холодной бесстолкновительной плазме поперек магнитного поля изучались в работе [1]. Причиной дисперсии в этом случае является инерция электронов, а дисперсионная длина имеет порядок  $c/\omega_{0e}$ , где  $c$  — скорость света,  $\omega_{0e}$  — ленгмюрова частота электронов. Установившиеся волны являются волнами сжатия.

Однако это рассмотрение годится лишь для весьма холодной плазмы. Ларморовский радиус ионов

$$r_i > \frac{c}{\omega_{0e}} \quad \text{при} \quad \beta = \frac{8\pi n T}{H^2} > \frac{m}{M}$$

поэтому можно ожидать появления новых эффектов на длинах порядка  $r_i$ . Здесь  $\omega_{0e}$  — электронная ленгмюрова частота.

Исследование этих эффектов в общем виде сопряжено с трудностями, но может быть проделано в каждом частном случае достаточно длинных волн, когда для описания плазмы можно применять определенную гидродинамическую модель — «гидродинамику с магнитной вязкостью» [2].

Формально уравнения этой модели есть уравнения гидродинамики с учетом тех членов в тензоре вязкости, которые не приводят к диссипации энергии. Они могут быть получены строго путем усреднения кинетических уравнений по ларморовским окружениям и являются следующим приближением к уравнениям Чу — Гольдбергера — Лоу [3]. Условия применимости модели есть

$$\lambda \gg r_i, \quad \lambda \gg \frac{v}{\omega_{Hi}} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Тезисы настоящей работы опубликованы в материалах Всесоюзного съезда механиков (январь 1964 г.).

Здесь  $\lambda$  — характерный пространственный масштаб,  $v$  — фазовая скорость волны,  $\omega_{Hi}$  — ионная ларморова частота. Эти условия, вообще говоря, не совпадают. Для слабых волн  $v$  имеет порядок альфвеновской скорости  $v_A$ , так что

$$\lambda > \frac{v}{\omega_{Hi}} \sim \frac{c}{\omega_{oi}} = \frac{r_i}{\sqrt{\beta}} \quad (2)$$

Из условия (2) видно, что в рассматриваемом случае электронной инерцией можно пренебречь.

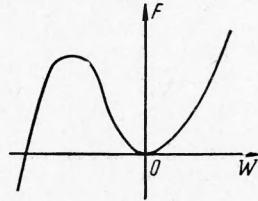
Уравнения гидродинамики с магнитной вязкостью для одномерных движений поперек магнитного поля имеют вид ( $x$  — координата вдоль волны, магнитное поле направлено по  $z$ )

$$\begin{aligned} Mn \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H^2}{8\pi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ Mn \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv_x) = 0 \quad \left( p = p_0 \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma \right) \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hv_x) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad \left( \eta = \frac{1}{2} \frac{nT}{\omega_{Hi}} = \frac{Mc p_0}{eH_0} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $M$  — масса иона,  $p$  — газокINETическое давление,  $\eta$  — коэффициент магнитной вязкости [4].

Проводимость плазмы считаем большой, поэтому в дальнейшем удерживаем только члены, линейные по  $1/\sigma$ . Решение уравнений (3) ищем в виде функции от  $\xi = x - ut$ . После преобразований получаем уравнение для плотности ( $\gamma \neq 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{(n/n_0)^{\gamma-2}}{8(\gamma-2)} \beta r_i^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-2} = 2s^2 \left( \frac{n_0}{n} - 1 \right) + \\ + \beta \left[ \left( \frac{n}{n_0} \right)^\gamma - 1 \right] + \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 - 1 + \frac{1}{s} \lambda \left( \frac{n}{n_0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{n}{n_0} \right) \\ \left( s = \frac{u}{v_A}, \quad \lambda = \frac{c^2}{4\pi\sigma v_A} \right) \end{aligned} \quad (4)$$



Фиг. 1

Здесь  $\lambda$  — параметр, характеризующий диссипацию, как и в [1]. Это уравнение формально напоминает уравнение движения частицы в потенциальной яме [1, 5, 6] с малым трением, но исследование его в таком виде затруднительно ввиду сложности правой части. Поэтому ограничимся рассмотрением слабых волн и, положив

$$\left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-2} = 1 + W \quad (5)$$

разложим правую часть уравнения по  $W$  до второго порядка. В диссипативном члене, ввиду его малости, ограничимся первым порядком. Кроме того, заметим, что величина

$$s_0^2 = 1 + \frac{1}{2}\beta\gamma$$

есть квадрат отношения скорости звука к альфвеновской скорости. Для слабых волн можно считать  $s \sim s_0$  и разложить члены уравнения по разности  $s_0^2 - s^2$ , ограничиваясь низшими не исчезающими порядками.

В результате получим уравнение

$$\frac{\beta r_i^2}{8} \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{s_0} \left( \frac{dW}{d\xi} \right) = 2(s_0^2 - s^2)W + \frac{s_0^2(1+\gamma) - \gamma}{\gamma - 2} W^2 \quad (6)$$

Правой части уравнения (6) соответствует потенциал

$$F(W) = -(s_0^2 - s^2)W^2 - \frac{s_0(1+\gamma) - \gamma}{3(\gamma - 2)} W^3 \quad (7)$$

Так как  $s_0 > 1$ , знак коэффициента при кубическом члене совпадает со знаком  $\gamma - 2$ .

При  $s > s_0$  функция  $F(W)$  имеет вид, изображенный на фиг. 1. Если нет диссипации, то это соответствует распространению периодических волн с чередующимися сжатиями и разрежениями. Эти волны в пределе малой амплитуды переходят в обычный звук. Если учесть диссипацию, то стационарные нелинейные волны, распространяющиеся со скоростью, большей скорости звука, невозможны.

Однако при  $s < s_0$  функция  $F(W)$  имеет вид, изображенный на фиг. 2. В этом случае существуют стационарные нелинейные волны, удовлетворяющие условию  $\xi \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow n_0$ . Если диссипация отсутствует, то стационарной волной будет уединенная волна. Ее амплитуда может быть найдена из уравнения  $F(W) = 0$ ; это дает

$$W_{\min} = \frac{3(s_0^2 - s^2)(\gamma - 2)}{s_0^2(1 + \gamma) - 1}$$

Переходя от переменной  $W$  к переменной  $n$ , имеем для плотности на гребне волны

$$n_{\min} = n_0 \left[ 1 - \frac{3(s_0^2 - s^2)}{s_0^2(1 + \gamma) - 1} \right] \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что уединенная волна есть волна разрежения.

Формула (8) дает связь между амплитудой и плотностью волны. Форма уединенной волны может быть получена решением уравнения (6) и задается формулой

$$\frac{n}{n_0} = 1 - \left( 1 - \frac{n_{\min}}{n_0} \right) \left( 1 - \operatorname{th}^2 \frac{2(s_0^2 - s^2)^{1/2}}{r_i \beta^{1/2}} \xi \right) \quad (9)$$

Из формулы (9) можно получить характерную длину волны

$$\lambda \sim \frac{r_i \sqrt{\beta}}{2(s_0^2 - s^2)^{1/2}} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с формулой (1), найдем условие применимости выбранной нами модели

$$1 - \frac{n_{\min}}{n_0} < \frac{3\beta}{s_0^2(1 + \gamma) - 1}$$

При  $\beta \sim m/M$  необходимо уже учитывать инерцию электронов.

Если проводимость плазмы конечна, то в ней могут существовать ударные волны. Структуру ударной волны, которая и является в этом случае стационарной нелинейной волной, можно получить решением уравнения (6). Качественно слабые ударные волны в плазме конечной температуры, распространяющиеся поперек поля, имеют тот же вид, что и волны в холодной плазме, распространяющиеся под углом к полю [7]. В обоих случаях фронт волны представляет собой осцилляторную структуру, затухающую в области невозмущенного течения.

Следует ожидать, что структура ударной волны в плазме конечной температуры неустойчива, что может приводить к установлению турбулентного режима ударной волны.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за полезные советы и обсуждение работы.

Поступила 4.VII.1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1961, т. 21, № 10, стр. 1185.
2. Roberts K. V., Taylor I. B. Magnetohydrodynamic Equations for finite Larmor radius. Phys. Rev. Letters, 1962, vol. 8, p. 197.
3. Chew G., Goldberger M., Low F. Boltzman equation and hydromagnetic collisionless equation for one fluid. Proc. Roy. Soc., 1956, vol. 236, p. 112 (русск. перевод. Чу Г., Гольдбергер М. и Лоу Ф. Уравнения Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. Пробл. соврем. физ., 1957, т. 7, стр. 139).
4. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 1. Госатомиздат, 1963.
5. Карпман В. И. О структуре фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 8, стр. 959.
6. Карпман В. И. и Сагдеев Р. З. Об устойчивости структуры фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 7, стр. 805.