давления p' в этом режиме зависят от времени релаксации матрицы и относительных размеров «окна».

На фиг. 3 приведены кривые зависимости давления p' от безразмерного времени для замкнутого пласта. Сплошные линии I—III соответствуют упругому решению при значениях $\rho' = 10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2}. Для сравнения даны две штриховые кривые, соответствующие упругому локальному решению при $\Phi(\xi_i h) = 0$. В упругом пласте процесс не выходит на установившийся режим, а влияние контура пласта вызывает неограниченный рост давления $\langle p' \rangle$, необходимого для сохранения постоянного дебита. Кривые 1—3 соответствуют вязкоупругому решению (5.4) при $\theta' = 2\cdot10^3$; $2\cdot10^5$; $2\cdot10^7$.

Зависимость безразмерного давления на трещине от значений вязкости матрицы пласта и радиуса трещины в вязкоупругих решениях (5.1), (5.4) одинаковая. Чем меньше вязкость матрицы пласта и чем больше радиус трещины, тем быстрее наступает установившийся режим и тем меньше изменение давления при этом.

Выбор оптимальных параметров «окна» и условий отбора тем самым связан с релаксационными параметрами матрицы деформируемого пласта.

Авторы признательны Э. А. Бондареву за внимание к работе.

Поступила 8 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаевский В. Н., Басниев К. С. и др.** Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
2. **Fast C. R., Holman G. B., Covlin R.** The application of massive hydraulic fracturing to the tight Muddy «J» formation. Watteberg field, Colorado.— J. Petrol. Technol., 1977, vol. 29, p. 10.
3. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
4. **Грей Э., Мэтьюз Г. Б.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1955.
5. **Николаевский В. Н.** Приток жидкости к горизонтальной трещине в пласте.— Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 7.
6. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
7. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

УДК 538.4 : 538.665

ТЕЧЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ, БЛИЗКОЙ К ТОЧКЕ КЮРИ

В. И. Вишняков, И. Ф. Султанов, И. А. Федотов

(*Москва*)

В настоящее время намагничивающиеся жидкости находят широкое применение в различных областях теплоэнергетики. Такие жидкости успешно могут выполнять роль теплоносителя в тех случаях, где применение обычных жидкостей связано с дополнительными устройствами и энергетическими затратами, например в условиях невесомости. Возможность применения намагничивающихся жидкостей в качестве рабочего тела ФГД-генератора [1] открывает новые широкие перспективы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Эффективность работы теплообменных аппаратов и энергетических установок в значительной степени определяется рабочей температурой намагничивающейся жидкости. Наибольший энергетический эффект во многих случаях достигается при температуре, близкой к точке Кюри [1]. Однако вблизи этой температуры намагничивающиеся жидкости частично теряют свои магнитные свойства, что, естественно, отражается на характере течения. Кроме того, на характер течения будет оказывать влияние и магнетокалорический эффект, который в этом случае максимален [2]. Отметим, что хотя это и слабый эффект, тем не менее вызванное им перераспределение температуры по сечению канала в установившемся режиме оказывается существенным.

Ниже рассмотрено неизотермическое стационарное течение непроводящей и несжимаемой намагничивающейся жидкости в плоском канале, находящейся при температуре, близкой к точке Кюри. Считаем, что жидкость намагничена до насыщения сильным внешним магнитным полем напряженности H, направленным поперек канала. Вследствие этого объемную магнитную силу в уравнении движения можно записать в виде $\mu_0 M \nabla H$ [3], где $M = M(T)$ — объемная намагниченность, μ_0 — магнитная постоянная. Дополнительно предполагается наличие постоянных источников тепла Q, равномерно распределенных по всему объему жидкости.

Пусть в плоском канале шириной $2D$ происходит движение намагничивающейся жидкости под действием градиента внешнего магнитного поля G, направленного вдоль канала. Температура стенок канала T_0 поддерживается постоянной и близкой к точке Кюри. Тогда соответствующую систему уравнений движения и теплопроводности намагничивающейся жидкости [3, 4] можно записать в виде

$$\eta d^2U/dY^2 + \mu_0 MG = 0; \tag{1}$$

$$\lambda d^2T/dY^2 + \mu_0 T_0 \Lambda GU + Q = 0, \tag{2}$$

где U — X-проекция вектора скорости; T — температура; $G = \partial H/\partial X \equiv \mathrm{const}$; $\Lambda = -(\partial M/\partial T)_{\rho,H}$ — пиромагнитный коэффициент; ρ — плотность; λ и η — соответственно коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости. Ось Y направлена перпендикулярно стенкам, а X — вдоль оси канала. Так как изменение температуры по сечению канала мало по сравнению с абсолютной температурой, то во втором члене уравнения (2), учитывающем магнетокалорический эффект, считаем, что $T = T_0$. Граничные условия физически очевидны:

$$U = 0,\ T = T_0 \text{ при } Y = \pm D. \tag{3}$$

Характер решения поставленной краевой задачи (1)—(3) зависит от вида функции $M = M(T)$. Обычно при решении подобных задач выбирают такие участки $M = M(T)$, чтобы во всей рассматриваемой области изменения температуры можно было бы считать либо $M = \mathrm{const}$, либо принять, что величина M — линейная функция температуры [3—5]. При температуре, близкой к точке Кюри, такие допущения несправедливы, поскольку вблизи этой точки зависимость $M = M(T)$ имеет явно выраженный нелинейный характер. Причем при больших напряженностях внешнего магнитного поля объемная намагниченность с увеличением температуры асимптотически стремится к нулю [2]. Как следствие возникает необходимость учета реальной зависимости $M = M(T)$, а это создает определенные трудности при решении задачи, связанные со значительным математическим усложнением задачи и необходимостью ее привязки к конкретной намагничивающейся жидкости. Однако в некоторых случаях решение поставленной задачи можно значительно упростить, аппроксимировав характерную реальную кривую более простой. В нашем рассмотрении кривая $M = M(T)$ аппроксимировалась двумя прямыми. На фиг. 1 кривая $M = M(T)$ показана штриховой линией, а аппроксимирующие прямые — сплошной. Ниже будет показано, когда справедлива такая аппроксимация.

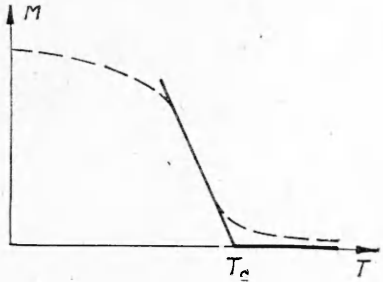
Итак, предполагается, что искомая зависимость $M = M(T)$ описывается функцией $M = \Lambda(T_C - T)$, где T_C — температура точки Кюри. Дальнейшее решение задачи будем строить отдельно для области температуры ниже точки Кюри, где $M > 0$, и равной или выше, где $M = 0$. Выберем в качестве характерных величин длину D, температуру $(T_C - T_0)$ и скорость $(T_C - T_0)\sqrt{\lambda/\eta T_0}$. Тогда исходную систему уравнений (1), (2) для соответствующих температурных областей можно записать в следующей безразмерной форме:

$$d^2u_1/dy^2 + 2k^2(1 - \theta_1) = 0,\ d^2\theta_1/dy^2 + 2k^2u_1 + q = 0 \text{ при } T < T_C; \tag{4}$$

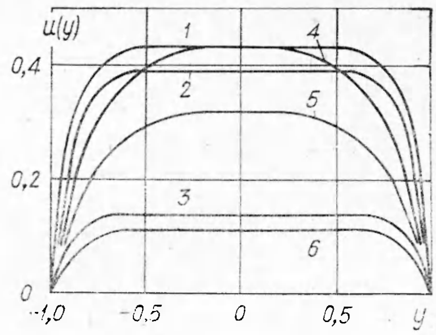
$$d^2u_2/dy^2 = 0,\ d^2\theta_2/dy^2 + q = 0 \text{ при } T \geqslant T_C, \tag{5}$$

где $\theta_{1,2} = (T - T_0)/(T_C - T_0)$; $q = D^2Q/(\lambda(T_C - T_0))$; $2k^2 = \mu_0 \Lambda G D^2 \sqrt{T_0/\eta\lambda}$, $k > 0$. Граничные условия (3) примут вид

$$u_1 = \theta_1 = 0 \text{ при } y = \pm 1. \tag{6}$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Решая систему уравнений (4) с граничными условиями (6), найдем

$$u_1 = \frac{(2k^2 \operatorname{sh} k \sin k + q \operatorname{ch} k \cos k) \operatorname{ch} ky \cos ky -}{2k^2 (\operatorname{sh}^2 k + \cos^2 k)} \to \tag{7}$$

$$\to \frac{- (2k^2 \operatorname{ch} k \cos k - q \operatorname{sh} k \sin k) \operatorname{sh} ky \sin ky}{} - \frac{q}{2k^2},$$

$$\theta_1 = 1 - \frac{(2k^2 \operatorname{sh} k \sin k + q \operatorname{ch} k \cos k) \operatorname{sh} ky \sin ky +}{2k^2 (\operatorname{sh}^2 k + \cos^2 k)} \to$$

$$\to \frac{+ (2k^2 \operatorname{ch} k \cos k - q \operatorname{sh} k \sin k) \operatorname{ch} ky \cos ky}{}.$$

Отметим, что полученное решение (7) справедливо при $q < 2$ и $k < k_0$, где значение $k_0 (0 < k_0 \leqslant \pi/2)$ находим из трансцендентного уравнения $2k_0^2 \operatorname{ch} k_0 \cos k_0 = q \operatorname{sh} k_0 \sin k_0$. При $k = k_0$ в центре канала температура достигает точки Кюри и дальнейшее увеличение параметра k приводит к тому, что за счет магнетокалорического эффекта точка Кюри достигается более удаленными от центра канала слоями жидкости. В результате некоторая область канала $-y_0 < y < y_0$ окажется нагретой выше температуры Кюри.

Решение задачи при $q < 2$, $k \geqslant k_0$ и при $q \geqslant 2$ в силу симметрии относительно центра канала удобно проводить в области $0 \leqslant y \leqslant 1$, воспользовавшись системой (4), (5). Запишем необходимые граничные условия: $du_2/dy = d\theta_2/dy = 0$ при $y = 0$, $u_1 = \theta_1 = 0$ при $y = 1$. Кроме того, при $y = y_0$ необходимо потребовать, чтобы

$$u_1 = u_2,\ \theta_1 = \theta_2 = 1,\ du_1/dy = du_2/dy,\ d\theta_1/dy = d\theta_2/dy.$$

В итоге получим $y_0 = 1 - a/k$,

$$u_2 = \frac{1 - \operatorname{ch} a \cos a + (k - a)(\operatorname{ch} a \sin a - \operatorname{sh} a \cos a)}{\operatorname{sh} a \sin a + (k - a)(\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a + \sin a \cos a)},$$

$$\theta_2 = 1 + \frac{q}{2} (y_0^2 - y^2),$$

где $a (0 < a < \pi/2,\ a < k)$ находим из трансцендентного уравнения $2k^2 \operatorname{ch} a \cos a = q[\operatorname{sh} a \sin a + (k - a)(\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a + \sin a \cos a)]$,

$$u_1 = a_1 \operatorname{sh} ky \sin ky + a_2 \operatorname{ch} ky \sin ky + a_3 \operatorname{sh} ky \cos ky + a_4 \operatorname{ch} ky \times$$

$$\times \cos ky - q/2k^2,$$

$$\theta_1 = 1 + a_1 \operatorname{ch} ky \cos ky + a_2 \operatorname{sh} ky \cos ky - a_3 \operatorname{ch} ky \sin ky -$$

$$- a_4 \operatorname{sh} ky \sin ky,$$

где $a_1 = -\alpha \operatorname{sh} ky_0 \sin ky_0 + \beta(\operatorname{ch} ky_0 \sin ky_0 + \operatorname{sh} ky_0 \cos ky_0)$;

$a_2 = \alpha \operatorname{ch} ky_0 \sin ky_0 - \beta(\operatorname{ch} ky_0 \cos ky_0 + \operatorname{sh} ky_0 \sin ky_0)$;

$a_3 = -\alpha \operatorname{sh} ky_0 \cos ky_0 + \beta(\operatorname{ch} ky_0 \cos ky_0 - \operatorname{sh} ky_0 \sin ky_0)$;

$a_4 = \alpha \operatorname{ch} ky_0 \cos ky_0 + \beta(\operatorname{ch} ky_0 \sin ky_0 - \operatorname{sh} ky_0 \cos ky_0)$;

$\alpha = u_2 + q/2k^2$; $\beta = y_0 q/2k$.

В частном случае при $q = 0$ получаем $y_0 = 1 - \pi/2k$,

$$u_2 = 1/\mathrm{sh}(\pi/2),\ \theta_2 = 1,\ u_1 = \mathrm{ch}(k - ky - \pi/2)\sin(k - ky)/\mathrm{sh}(\pi/2),$$

$$\theta_1 = 1 - \mathrm{sh}(\pi/2 - k + ky)\cos(k - ky)/\mathrm{sh}(\pi/2).$$

Отсюда видно, что в центре канала появляется область, размер которой зависит от k и q, где жидкость движется с постоянной по сечению канала скоростью. На фиг. 2 представлены безразмерные профили скорости $u(y)$ для различных значений k и q ($k = \pi$, $q = 0$; 1; 3 — кривые — *1—3*, $k = \pi/2$, $q = 0$; 1; 3 — кривые *4—6*).

Нам остается показать, в каких случаях полученный результат не будет существенно зависеть от вида аппроксимирующей функции. Для этого проведем оценку исходной краевой задачи в пространстве Соболева $W_2^{(1)}$. Запишем систему уравнений (4), (5) и граничные условия (6) в виде

$$d^2u/dy^2 = -F_1(\theta); \tag{8}$$

$$d^2\theta/dy^2 = -F_2(u,\ \theta); \tag{9}$$

$$u = \theta = 0 \text{ при } y = \pm 1, \tag{10}$$

где $F_1(\theta) = \begin{cases} 2k^2(1-\theta), & \theta < 1, \\ 0, & \theta \geqslant 1, \end{cases}$ $F_2(u,\ \theta) = \begin{cases} 2k^2u + q, & \theta < 1, \\ q, & \theta \geqslant 1. \end{cases}$

Умножим обе части равенства (8) на u, а (9) — на θ и, проинтегрировав по y с учетом граничных условий (10), получим

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy = \int_{-1}^{1} uF_1(\theta)\,dy,\quad \int_{-1}^{1}\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 dy = \int_{-1}^{1} \theta F_2(u,\ \theta)\,dy.$$

В силу известного неравенства Фридрихса [6] имеем

$$\int_{-1}^{1} u^2 dy \leqslant c_1 \int_{-1}^{1}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy,$$

где $c_1 \geqslant 0$ — некоторая константа. Отсюда следует

$$\|u\|_1^2 \leqslant (1 + c_1)\int_{-1}^{1} uF_1(\theta)\,dy$$

и аналогично

$$\|\theta\|_1^2 \leqslant (1 + c_1)\int_{-1}^{1} \theta F_2(u,\ \theta)\,dy,$$

где через $\|\cdot\|_1$ обозначена норма в пространстве $W_2^{(1)}$. В итоге получим

$$\|u\|_1^2 + \|\theta\|_1^2 \leqslant (1 + c_1)\left[\int_{-1}^{1} uF_1(\theta)\,dy + \int_{-1}^{1} \theta F_2(u,\ \theta)\,dy\right].$$

На основании полученного неравенства имеем

$$\|u\|_1^2 + \|\theta\|_1^2 \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} u^2 dy + \int_{-1}^{1} \theta^2 dy\right] + \frac{(1 + c_1)^2}{2}\int_{-1}^{1}\left[F_1^2(\theta) + F_2^2(u,\ \theta)\right] dy.$$

Отсюда следует искомая оценка

$$\|u\|_1^2 + \|\theta\|_1^2 \leqslant c\left(\|F_1\|_0^2 + \|F_2\|_0^2\right), \tag{11}$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве L_2. Неравенство (11) позволяет показать, что решение поставленной задачи (8)—(10) устойчиво относительно малых возмущений правых частей $-F_1$ и $-F_2$.

Рассмотрим некоторую возмущенную задачу

$$d^2u_\varepsilon/dy^2 = -F_{1\varepsilon}(\theta_\varepsilon),\ d^2\theta_\varepsilon/dy^2 = -F_{2\varepsilon}(u_\varepsilon,\ \theta_\varepsilon),$$

где $F_{i\varepsilon} \to F_i$ при $\varepsilon \to 0$;

$$u_\varepsilon = \theta_\varepsilon = 0 \text{ при } y = \pm 1,$$

и наряду с ней исходную задачу (8)—(10). Обозначив $\omega = u_\varepsilon - u$ и $\tau = \theta_\varepsilon - \theta$, получим для разности задачу

$$(12)\quad d^2\omega/dy^2 = -[F_{1\varepsilon}(\theta_\varepsilon) - F_1(\theta)],\ d^2\tau/dy^2 = -[F_{2\varepsilon}(u_\varepsilon, \theta_\varepsilon) - F_2(u,\theta)],$$
$$\omega = \tau = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Применяя к задаче (12) оценку (11), получим

$$\|\omega\|_1^2 + \|\tau\|_1^2 \leqslant c\left[\int\limits_{-1}^{1}(F_{1\varepsilon} - F_1)^2\,dy + \int\limits_{-1}^{1}(F_{2\varepsilon} - F_2)^2\,dy\right],$$

откуда следует, что при ограниченных значениях параметра k исходная задача устойчива.

Таким образом, показано, что для течения при температуре, близкой к точке Кюри, характерной особенностью является возможность образования области жидкости (ядра потока), движущегося с постоянной по сечению канала скоростью. Естественно, что в реальном случае скорость жидкости не будет строго постоянной по всему сечению ядра.

В качестве примера при некоторых других, близких к реальным, видах аппроксимирующих функций кривой $M = M(T)$ проведены расчеты профилей скорости и температуры численным методом на ЭВМ. Как показали расчеты, при ограниченных значениях параметра k отличия в профилях скорости и температуры несущественны, что подтверждает справедливость проведенного рассмотрения.

Авторы выражают благодарность К. Б. Павлову за полезные обсуждения работы.

Поступила 26 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я.** Тепло-и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980.
2. **Бозорт Р. М.** Ферромагнетизм. М.: ИЛ, 1956.
3. **Neuringer J. L., Rosensweig R. E.** Ferrohydrodynamics.— Phys. Fluids., 1964, vol. 7, N 12.
4. **Баштовой В. Г., Берковский Б. М.** Термомеханика ферромагнитных жидкостей.— Магнитная гидродинамика, 1973, № 3.
5. **Зайцев В. М., Шлиомис М. И.** К гидродинамике ферромагнитной жидкости.— ПМТФ, 1968, № 1.
6. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М.: Наука, 1968.

УДК 532.58

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКОВ

В. А. Городцов, Э. В. Теодорович

(*Москва*)

Среди задач о волнах от движущихся источников все большее внимание привлекают задачи об излучении внутренних волн ускоренно движущимися источниками (см., например, [1, 2]). В данной работе рассмотрен вопрос о полной величине и спектральном распределении энергии излучения источниками массы, совершающими периодические движения. Метод рассмотрения и основные обозначения те же, что и в [3,4]*.

1. Излучение волн при движении источника по винтовой линии. В однородно стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости общее

---

* Прим. редколлегии. Другой способ расчета потерь энергии движущимися источниками, основанный на знании асимптотических амплитуд внутренних волн, указан в монографии Дж. Лайтхилла «Волны в жидкостях». М.: Мир, 1981.