

**О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВИНТОВОЙ  
НЕУСТОЙЧИВОСТИ  $\theta$ -ПИНЧА ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ  
ПРОДОЛЬНЫМ ТОКОМ**

*М. Г. Никулин*

(Москва)

Даются условия равновесия тонкого кольцевого  $\theta$ -пинча с высоким  $\beta$  в поперечном плоскости кольца магнитном поле, возбуждающем в шнуре переменный продольный ток высокой частоты. Далее на модели гибкого прямого шнура исследуется эффект параметрической раскачки малых винтовых возмущений. Обсуждаются условия, при которых параметрическое возбуждение может быть подавлено. Кратко рассматриваются вынужденные колебания радиусов кольцевого  $\theta$ -пинча под действием переменных полей.

Как известно (см., например, [1]), при сворачивании прямого цилиндрического  $\theta$  пинча в тор возникает радиальная расталкивающая сила, препятствующая образованию замкнутой равновесной конфигурации. Интересная возможность скомпенсировать эту силу и таким образом осуществить равновесие тороидального  $\theta$ -пинча появляется в том случае, если возбудить в плазменном шнуре переменный продольный ток высокой частоты, взаимодействующий с внешним высокочастотным магнитным полем, поперечным плоскости кольца. Если давление собственного магнитного поля продольного тока гораздо меньше давления плазмы, то такой разряд по-прежнему можно отнести к типу  $\theta$ -пинч. Использование переменного, а не постоянного продольного тока имеет то преимущество, что в этом случае удается значительно ослабить ограничение, налагаемое на величину продольного тока условием устойчивости шнура относительно длинноволновых винтовых возмущений [2,3]. В то же время высокочастотный продольный ток может привести к параметрическому возбуждению винтовой неустойчивости шнура в более коротковолновой части спектра [3], а также к вынужденным колебаниям радиусов кольцевого шнура.

1. Рассмотрим тонкий кольцевой шнур с малым радиусом  $a$  и большим радиусом  $R$  ( $a \ll R$ ), образованный идеально проводящей сжимаемой плазмой. По поверхности шнура течет постоянный азимутальный ток, определяющий скачок постоянного продольного магнитного поля на границе плазма — вакуум, а также высокочастотный продольный ток

$$I = I_0 \cos \omega t \quad (1.1)$$

индуцируемый внешним высокочастотным магнитным полем, поперечным плоскости кольца.

Условия равновесия кольца по малому и большому радиусам имеют вид [4]

$$8\pi p + B_i^2 = B_e^2 + \langle B_a^2 \rangle \quad (1.2)$$

$$8\pi p + B_e^2 + (l + 2) \langle B_a^2 \rangle = B_i^2 + 4(R/a) \langle B_R B_a \rangle \quad (1.3)$$

Здесь  $p$  — газовое давление,  $B_e$  и  $B_i$  — продольное магнитное поле снаружи и внутри шнура,  $B_a = B_{a0} \cos \omega t = 2I / ca$  — азимутальное магнитное поле тока  $I$  на поверхности шнура,  $B_R = B_{R0} \cos \omega t$  — поперечное плоскости кольца высокочастотное магнитное поле на окружности радиуса  $R$ ,  $l = 2 \ln (8R / a) - 4$  — погонная индуктивность кольца для тока  $I$ , угловые скобки означают усреднение по времени.

Условия (1.2), (1.3), строго говоря, отражают тот факт, что колебания малого и большого радиусов кольца, вызываемые переменными полями, происходят около значений  $a$  и  $R$  соответственно.

Ограничиваясь рассмотрением случая, когда представленный выше винтовой разряд можно отнести к типу  $\theta$ -пинч с близким к единице значением  $\beta \equiv 8\pi r / B_e^2$ , будем считать, что  $B_e^2 \approx 8\pi r \gg B_i^2, \langle B_a^2 \rangle$ . Если к тому же  $B_e^2 \gg l \langle B_a^2 \rangle$ , то условие (1.3) равновесия кольца по большому радиусу значительно упрощается, принимая вид

$$h_a h_R^* = a / R \quad (1.4)$$

где  $h_a = B_{a0} / B_e$ ,  $h_R = B_{R0} / B_e$ .

Из уравнения (1.4) следует, что равновесие тонкого кольца ( $a / R \sim 1/100$ ) может быть достигнуто при  $h_R \ll h_a \ll 1$ .

Равновесное удержание тороидального  $\theta$ -пинча в принципе возможно также за счет взаимодействия переменного продольного тока с окружающим шнуром проводящим кожухом. Однако эффективность такого способа удержания невелика, поскольку отношение радиуса шнура  $a$  к радиусу кожуха  $b$  для разрядов типа  $\theta$ -пинч обычно очень мало:  $a / b \approx 1/5$ .

2. При исследовании устойчивости плазменного шнура относительно винтовых возмущений будем для простоты пренебрегать тороидальностью и влиянием поперечного магнитного поля.

Вопрос об устойчивости тонкого цилиндрического плазменного проводника с током относительно винтовых возмущений, при которых смещение осевой линии проводника равно

$$\xi = \xi_1 \exp(ikz \pm i\theta) \quad (2.1)$$

удобно рассматривать на модели гибкого шнура, вычисляя силы, действующие со стороны магнитного поля на возмущенный проводник, и затем непосредственно исследуя уравнение движения произвольного элемента длины проводника. Особенно эффективным такой подход оказывается при решении задачи об устойчивости шнура с переменным током высокой частоты, поскольку он позволяет исследовать явление параметрического возбуждения винтовых возмущений шнура. В противоположность этому применяемый в [2] метод усреднения по высокочастотным осцилляциям уравнения баланса давлений на поверхности возмущенного проводника, из которого затем получается дисперсионное соотношение, не дает возможности исследовать эффект параметрического возбуждения.

Строгое обоснование применимости уравнения движения, получаемого указанным выше способом, в общем случае квазистационарных высокочастотных магнитных полей дано в [4, 5] для сжимаемого идеально проводящего плазменного шнура, испытывающего плавные ( $k\xi \ll 1$ ) перерывы ( $\xi \gg a$ ) и, как следствие, длинноволновые ( $ka \ll 1$ ) возмущения:  $ka \ll k\xi \ll 1$ . Если предположить, что для применимости описанного метода, как и в случае статических полей [6], достаточно выполнения одного лишь условия плавности ( $k\xi \ll 1$ ), то таким же образом могут быть исследованы и коротковолновые ( $ka \gg 1$ ) возмущения, но только если они недоразвиты ( $\xi \ll a$ ), так как должны иметь место неравенства  $k\xi \ll 1 \ll ka$ . Следует, однако, иметь в виду, что в области коротковолновых возмущений магнитогидродинамическое описание плазмы во многих практически интересных случаях теряет силу.

Придерживаясь представленной выше схемы, выведем уравнение малых винтовых колебаний плазменного шнура с продольным током (1.1). При возмущении вида (2.1) на цилиндрический плазменный шнур действует сила, в расчете на единицу длины равная [7]

$$F = 1/4 [B_a^2 - \alpha_e(ka)(ka B_e \pm B_a)^2 - \alpha_i(ka)(ka)^2 B_i^2] \xi_1 \quad (2.2)$$

Здесь

$$\alpha_e(x) = -K_1(x) / xK_1'(x), \quad \alpha_i(x) = I_1(x) / xI_1'(x)$$

$K_1(x)$  и  $I_1(x)$  — модифицированные функции Бесселя, а штрих означает дифференцирование по аргументу.

Уравнение движения элемента длины шнура

$$\pi a^2 \rho \ddot{\xi}_1 = F \quad (2.3)$$

где  $\rho$  — равновесная плотность плазмы, вследствие принятой зависимости (1.1) тока  $I$  от времени является уравнением с периодическими коэффициентами. Произведя замену  $\omega t = 2\tau$ , уравнение (2.3) можно представить в стандартной форме уравнения Хилла [8] с тремя членами

$$d^2 \xi_1 / d\tau^2 + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau + 2\theta_2 \cos 4\tau) \xi_1 = 0 \quad (2.4)$$

Здесь

$$\theta_0 = 4(\omega_A / \omega)^2 [(ka)^2 (\alpha_e + \alpha_i h_i^2) + 1/2 (\alpha_e - 1) h_a^2]$$

$$\theta_1 = \pm 4(\omega_A / \omega)^2 ka \alpha_e h_a, \quad \theta_2 = (\omega_A / \omega)^2 (\alpha_e - 1) h_a^2$$

$$\omega_A = B_e / (4\pi\rho)^{1/2} a, \quad h_i = B_i / B_e$$

В предельном случае  $\omega \rightarrow \infty$ , когда обладающий конечной инерцией плазменный шнур «не чувствует» осциллирующих компонент силы  $F$ , условие устойчивости определяется неравенством  $\theta_0 > 0$ , или (для шнура длины  $L$  с отождествленными концами)

$$h_a^2 < 2(1 + h_i^2) / \ln \frac{L}{\eta a} \quad (2.5)$$

где  $\ln \eta = 0,577\dots$  — постоянная Эйлера. Условие (2.5) не противоречит условию равновесия (1.4) при  $h_R \ll h_a$  и, таким образом, не препятствует использованию переменного тока в сочетании с переменным поперечным полем  $B_R \ll B_a$  для равновесного удержания тороидального  $\theta$ -пинча с высоким  $\beta$ , в то время как аналогичное условие в случае постоянного тока  $I = I_0$

$$h_a < (1 + h_i^2) \pi a / L \quad (2.6)$$

делает такой способ удержания практически неприменимым.

Осциллирующие компоненты силы  $F$  при конечной частоте  $\omega$  несколько ослабляют критерий (2.5) устойчивости шнура относительно длинноволновых винтовых возмущений, но, главное, они могут вызвать параметрическую раскачку винтовых возмущений шнура в более коротковолновой части спектра.

Каждому периодическому члену в уравнении (2.4) соответствует свой механизм параметрической раскачки колебаний. Первый член связан с силой, действующей со стороны внешнего продольного магнитного поля на шнур с током при его закручивании в винтовую линию, а второй член обусловлен силой, действующей на изогнутый шнур со стороны собственного магнитного поля тока. Если переменный продольный ток столь мал, что  $h_a \ll 1$ , то для любого  $ka$   $|\theta_2 / \theta_1| < 1/4 h_a \ll 1/4$  и, стало быть, второй из рассмотренных выше механизмов параметрической раскачки значительно менее эффективен. Для упрощения исследования в дальнейшем этим механизмом будем пренебрегать. Вместо (2.4), таким образом, будем

рассматривать более простое уравнение

$$d^2 \xi_1 / d\tau^2 + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2\tau) \xi_1 = 0 \quad (2.7)$$

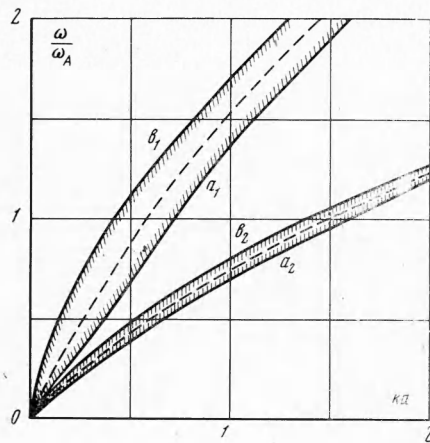
являющееся хорошо известным уравнением Матье.

Условия устойчивости уравнения (2.7) имеют вид [8]

$$a_n(\theta_1) < \theta_0 < b_{n+1}(\theta_1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

где  $a_n(\theta_1)$ ,  $b_n(\theta_1)$  — собственные значения функций Матье, затабулированные, например, в [9].

На фигуре приведены кривые  $\theta_0 = a_1, b_1, a_2, b_2$  в координатах  $ka, \omega / \omega_A$  для частного случая  $h_i = 0, h_a = 1/4$  ( $\theta$ -пинч с переменным продольным током,  $\beta \approx 1$ ).



Те же кривые с достаточной степенью точности пригодна для случая  $h_i = 1, h_a = \sqrt{2}/4$  (высокочастотный  $z$ -пинч,  $\beta \ll 1$ ), если считать, что по оси абсцисс отложена величина  $\sqrt{2} ka$ . Штриховкой отмечены области параметрического возбуждения винтовых возмущений шнура. При  $h_a \rightarrow 0$  эти области стягиваются к линиям  $\omega / \omega_A = 2ka\alpha_e^{1/2}/n$  (штриховые линии на фигуре), соответствующим условию  $\omega = 2\omega_0/n$ , где  $\omega_0 \equiv 1/2 \omega \theta_0^{1/2}$ . При  $n > 2$  зоны возбуждения лежат ниже двух первых резонансных областей, показанных на фигуре.

Для шнура конечной длины  $L$  зоны параметрического возбуждения на приведенной диаграмме разбиваются на ряд вертикальных отрезков, соответствующих дискретным значениям безразмерного волнового числа

$$ka = (2\pi a / L)j \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.9)$$

Удобно ввести в рассмотрение коэффициент модуляции  $\varepsilon \equiv |2\theta_1 / \theta_0|$ . При  $h_i = 0, h_a \ll 1$  ( $\theta$ -пинч с переменным продольным током,  $\beta \approx 1$ ) коэффициент  $\varepsilon \approx 2h_a / ka = 2\lambda / H$ , где  $\lambda = 2\pi / k$  есть длина волны возмущения, а  $H = 2\pi a B_e / B_{a0}$  — амплитудное значение шага винтовой магнитной силовой линии на поверхности равновесного шнура. При  $h_i = 1, h_a \ll 1$  (высокочастотный  $z$ -пинч,  $\beta \ll 1$ )  $\varepsilon \approx h_a / ka = \lambda / H$ . Интересно отметить, что в последнем случае для шнура конечной длины минимальное значение коэффициента модуляции  $\varepsilon_{\min} = 1/q$ , где  $q = H/L$  — коэффициент запаса устойчивости  $z$ -пинча, вычисленный по амплитудному значению азимутального магнитного поля.

Параметр  $\varepsilon$  существенно влияет на устойчивость системы. Как показывает исследование, область  $\varepsilon > 1, \theta_0 > b_1$  в основном занимают зоны параметрического возбуждения, а область  $\varepsilon < 1, \theta_0 > b_1$  — зоны устойчивости. На приведенной диаграмме указанные области расположены под кривой  $\theta_0 = b_1$  соответственно слева и справа от вертикальной линии  $ka = 0.5$ , на которой  $\varepsilon = 1$ .

Коэффициент модуляции  $\varepsilon$  уменьшается с увеличением рабочей частоты  $\omega$ , когда в системе возбуждаются все более коротковолновые возмущения.

Нетрудно показать, что при условии (2.6) на любой рабочей частоте  $\varepsilon < 1$ . Однако при этом теряется преимущество переменного тока, которое как раз и связано с возможностью значительно ослабить условие (2.6).

Если коэффициент модуляции  $\varepsilon \ll 1$ , то параметрическое возбуждение имеет ярко выраженный резонансный характер и происходит в тех случаях, когда  $\omega$  равна или близка  $2\omega_0/n$ , причем в  $n$ -й резонансной зоне возбуждаются колебания с частотой  $1/2 \omega n$ . Если же коэффициент  $\varepsilon \gtrsim 1$ , то резонансные свойства неустойчивости выражены очень слабо. Возбуждаемые в системы колебания имеют в этом случае широкий спектр частот.

При  $\varepsilon \ll 1$  можно получить простые аналитические выражения для величин, характеризующих параметрическое возбуждение. Так, относительная ширина первой резонансной зоны  $\Delta\omega / 2\omega_0$  и максимальный инкремент неустойчивости  $\gamma$ , достигаемый при  $\omega = 2\omega_0$ , в случае  $\theta$ -пинча равны

$$\begin{aligned} \Delta\omega / 2\omega_0 &= \frac{1}{2}\varepsilon = h_a / ka \ll 1 \\ \gamma &= \frac{1}{8}\varepsilon\omega = \frac{1}{4}(h_a / ka)\omega \ll \omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

С увеличением  $n$  ширина резонансных областей и инкремент неустойчивости быстро уменьшаются, как  $\varepsilon^n$  [10].

Для произвольных значений  $\varepsilon$  при условии (2.5), когда  $\theta_0 > 0$ , достаточный критерий устойчивости системы с хорошей степенью точности имеет вид  $\theta_0 < 1 - |\theta_1|$ . Отсюда для  $\theta$ -пинча получаем

$$\omega / \omega_A > 2ka(1 + h_a / ka)^{1/2} \alpha_e^{1/2} \quad (2.11)$$

В предельных случаях вместо (2.11) имеем

$$\omega / \omega_A > 2ka(1 + h_n / ka)^{1/2} \quad (ka \ll 1), \quad \omega / \omega_A > 2(ka)^{1/2} \quad (ka \gg 1) \quad (2.12)$$

На фигуре область, соответствующая (2.11), лежит выше кривой  $\theta_0 = h_1$ .

Из диаграммы устойчивости и выражений (2.11), (2.12) следует, что в случае тонкого шнура ( $2\pi a / L \ll 1$ ), для которого спектр (2.9) безразмерных волновых чисел  $ka$  почти непрерывен и неограничен, на любой рабочей частоте может произойти параметрическая раскачка малых винтовых возмущений.

Полученный результат, казалось бы, должен поставить под сомнение возможность использования переменного тока высокой частоты для равновесного удержания и стабилизации [2-4, 11] плазменных шнуров, находящихся в продольном магнитном поле. Однако следует иметь в виду, что данное рассмотрение основывалось на весьма упрощенной модели, не учитывающей многих факторов, которые могут ослабить или же совсем исключить эффект параметрического возбуждения.

Влияние различных факторов, препятствующих параметрическому возбуждению, скорее всего должно проявиться в области коротковолновых возмущений, где неустойчивость обладает малым инкрементом и имеет ярко выраженный резонансный характер. Если же спектр волновых чисел параметрически возбуждаемых возмущений ограничен сверху, то, выбирая достаточно высокую рабочую частоту, можно обеспечить устойчивость шнура.

Выясним, сначала, какое влияние на параметрическую раскачку винтовых возмущений оказывает трение в системе. При наличии трения области неустойчивости, как известно [10], несколько сужаются, а если декремент затухания колебаний  $\delta > \gamma$ , то параметрическое возбуждение вообще не происходит.

Для первой резонансной зоны при  $ka \gg 1$  в случае  $\theta$ -пинча имеем

$$\Delta\omega / 2\omega_0 = [1/4\varepsilon^2 - 4(\delta / \omega_0)^2]^{1/2} = [(h_a / ka)^2 - (4 / ka)(\delta / \omega_A)^2]^{1/2}$$

Отсюда находим верхнюю границу спектра параметрически возбуждаемых винтовых возмущений

$$(ka)_{\max} = \frac{1}{4} h_a^2 (\omega_A / \delta)^2$$

и, далее, учитывая (2.12), критерий устойчивости шнура

$$\omega / \omega_A > h_a (\omega_A / \delta) \quad (2.13)$$

Легко убедиться, что (2.13) эквивалентно условию  $\delta > \gamma$ . Поскольку в первой резонансной зоне неустойчивость обладает наибольшим инкрементом, высшие параметрические резонансы при выполнении критерия (2.13) заведомо отсутствуют.

Еще один фактор, который должен существенно повлиять на параметрическое возбуждение коротковолновых винтовых возмущений шнура, — это нестационарность реальной системы. Плавное изменение со временем каких-либо параметров системы должно привести к тому, что условие возбуждения, имеющее при  $\varepsilon \ll 1$  сугубо резонансный характер, для возмущения с определенной длиной волны будет выполняться лишь в течение времени, меньшего  $1 / \gamma$ , так что данное возмущение не успеет раскачаться. При этом энергия возбуждения будет как бы «размазываться» по некоторому интервалу спектра колебаний, нигде не превышая опасного предела.

Данный эффект в случае необходимости можно вызвать и искусственным путем, меняя, например, как предлагается в [12], рабочую частоту  $\omega$ . Если выбрать  $\omega'$ , исходя из условий

$$1 / \omega \ll |\omega / \omega'| \lesssim 1 / \gamma \quad (2.14)$$

то можно подавить параметрическое возбуждение, сохранив в то же время преимущества, связанные с применением переменного тока высокой частоты. Ввиду (2.10) условия (2.14) вполне осуществимы, особенно в диапазоне наиболее критичных (в смысле выбора рабочей частоты) коротковолновых возмущений.

3. Рассмотрим теперь кратко вынужденные колебания радиусов кольцевого  $\theta$ -пинча под действием переменных полей. В частности, покажем, что если условие (2.11) выполняется хотя бы для возмущений с большими длинами волн, то колебания радиусов устойчивы и имеют малые амплитуды. Для простоты ограничимся рассмотрением парциальных колебаний. Как и в п. 1, будем считать, что  $h_i^2 \ll 1$ ,  $h_a^2 \ll 2/l$ ,  $h_R \ll h_a$ .

Соответствующие уравнения движения могут быть получены при помощи функции Раунса, приведенной в [4]. Колебания малого радиуса описываются неоднородным уравнением Матье с коэффициентами

$$\theta_0 = 4(\omega_A / \omega)^2 \gamma_0 \beta, \quad \theta_1 = (\omega_A^2 / \omega)^2 h_a^2 (4 - l) / 2l,$$

где  $\gamma_0$  — показатель адиабаты, и правой частью

$$- (\omega_A / \omega)^2 h_a^2 \cos 2\tau \quad (\tau = \omega t)$$

Области устойчивости уравнения такого типа совпадают с областями (2.8) соответствующего однородного уравнения [13]. Поскольку в данном случае  $\theta_0 > 0$ , а  $\varepsilon = h_a^2 (l - 4) / 4\gamma_0 \beta l \ll 1$ , колебания малого радиуса кольца устойчивы всюду, за исключением узких полос вблизи фиксированных частот  $\omega = 2\omega_A (\gamma_0 \beta)^{1/2} / n$ , где в принципе возможно параметрическое возбуждение колебаний, но его практически легко избежать.

Колебания большого радиуса кольца подчиняются неоднородному уравнению Матье с коэффициентами

$$\theta_0 = 2\theta_1 = (\omega_A / \omega)^2 (a/R)^2 (2/l h_a^2 - g) \quad (g = - (R/B_{R0}) (\partial B_{z0} / \partial r)_{r=R})$$

и правой частью

$$-(\omega_A / \omega)^2 (a / R)^2 \cos 2\tau \quad (\tau = \omega t)$$

Так как в данном случае  $\varepsilon = 1$ , для устойчивости должны выполняться условия  $0 < \theta_0 < 1 - |\theta_1|$ . Отсюда, предполагая, что  $|g| \ll 2 / lh_a^2$ , и учитывая (1.4), получаем критерий

$$\omega / \omega_A > (3/l)^{1/2} h_R \quad (3.1)$$

Как легко видеть, уже при  $ka \sim h_R \ll 1$  критерий (3.1) значительно слабее (2.11).

Интересно отметить, что при условиях (3.1) и  $0 < g \ll 2 / lh_a^2$  кольцо устойчиво также относительно малых вертикальных смещений, которые описываются уравнением (2.4) с  $\theta_0 = 2\theta_1 = (\omega_A / \omega)^2 (a / R)^2 g$ .

Амплитуды  $\Delta a$  и  $\Delta R$  вынужденных колебаний радиусов кольца в установившемся режиме можно оценить, пренебрегая в уравнениях движения собственной упругостью шнура. В результате находим, что

$$\Delta a = 1/4 h_a^2 (\omega_A / \omega)^2 a, \quad \Delta R = (h_R / h_a) \Delta a$$

Очевидно,  $\Delta a, \Delta R \ll a$ , если условие (2.11) выполнено хотя бы для  $ka \sim h_a \ll 1$ .

Таким образом, в рамках данного исследования наиболее жесткое требование к частоте переменного продольного тока предъявляет условие (2.11) отсутствия параметрического возбуждения винтовых возмущений шнура.

В заключение автор благодарит М. Л. Левина за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 17VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ш а ф р а н о в В. Д. Равновесие плазмы в магнитном поле. В сб.: «Вопросы теории плазмы», М., Атомиздат, 1963, вып. 2.
2. Б о б ы р е в Н. А., Ф е д ь я н и н О. И. Стабилизация цилиндра с током высокочастотным магнитным полем. Ж. техн. физ., 1963, т. 33, № 10.
3. Н и к у л и н М. Г. Динамическая стабилизация плазменного шнура в продольном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, № 12.
4. Н и к у л и н М. Г. О динамической стабилизации тонких плазменных шнуров. ПМТФ, 1970, № 1.
5. Н и к у л и н М. Г. О функции Рауса тонкого плазменного шнура. ПМТФ, 1969, № 2.
6. Н и к у л и н М. Г. К вопросу об устойчивости гибкого провода в продольном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1966, т. 33, № 6.
7. Ш а ф р а н о в В. Д. Об устойчивости цилиндрического газового проводника в магнитном поле. Атомная энергия, 1956, № 5.
8. Х а я с и Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.
9. I n s e E. L. Tables of the elliptic-cylinder functions. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1932, vol. 52, No. 1.
10. Б о г о л ь о б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
11. R i b e F. L., R i e s e n f e l d W. B. Unstable, transverse-displacement mode of a bumpy plasma column and its possible stabilisation. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 9.
12. V e r g e G. On the Problem of dynamic stabilisation. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Conf. Proc., Novosibirsk, 1—7 aug. 1968; IAEA, Vienna, 1969, vol. 2.
13. Г о р е л и к Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. Ж. техн. физ., 1934, т. 4, № 10.