

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В АНИЗОТРОПНО-ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. И. Ким (Киев)

1. При движении несжимаемой изотропно-электропроводной жидкости в бегущем магнитном поле индуцированные токи распределяются в соответствии с длиной волны поля и изменяются во времени с частотой скольжения. Таким образом, если пренебречь краевыми эффектами, обусловленными конечным размером канала и индуктора, поле токов в жидкости оказывается адекватным полю возбуждения.

В случае анизотропной электропроводности обычный характер процессов в жидкости нарушается. Чтобы установить основные факты, связанные с анизотропностью электропроводности, рассмотрим электромагнитные явления в жидкости при ее движении в канале прямоугольного сечения.

По каналу (фиг. 1) в направлении оси x протекает электропроводная жидкость со скоростью u . Жидкость полагаем несжимаемой, а тензорность электропроводности связываем с конечным значением величины $\omega_e \tau_e$ (ω_e — электронная циклотронная частота, τ_e — среднее время между столкновениями электронов с другими частицами), скольжение ионов не учитываем.

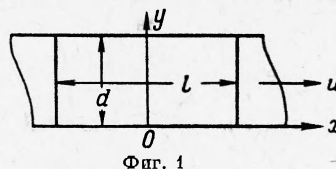
Внешнее магнитное поле B_1 создается обмотками, расположенными на внутренних поверхностях индуктора, т. е. на плоскостях $z = 0$ и $z = \delta$, параллельных плоскости xy . Линейная нагрузка каждой из обмоток равна

$$i_y = \frac{3w}{p\tau} I_m \cos(\omega_1 t - \alpha x)$$

и магнитное поле в канале при пренебрежении краевыми эффектами индуктора определяется соотношением

$$B_1 = B_m \frac{\alpha \delta}{2 \operatorname{sh} \alpha \delta} \{ i \cos(\omega_1 t - \alpha x) [\operatorname{sh} \alpha (\delta - z) - \operatorname{sh} \alpha z] + k \sin(\omega_1 t - \alpha x) [\operatorname{ch} \alpha (\delta - z) + \operatorname{ch} \alpha z] \}$$

$$\left(B_m = \frac{6 \mu_0 \omega}{p \pi \delta} I_m \right)$$



Здесь I_m — амплитудное значение тока в обмотке, w — число витков в фазе, p — число пар полюсов, τ — полюсное деление.

При указанных условиях и некоторых дополнительных ограничениях, наложенных ниже, определим индуцированное поле в жидкости.

Из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\omega_e \tau_e}{B} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

имея в виду, что $\mathbf{u} = \text{const}$, получим

$$\Delta \mathbf{B} = \sigma_0 \mu_0 \left[- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{B} \right] + \frac{\mu_0 \omega_e \tau_e}{B} [(\mathbf{B} \operatorname{grad}) \operatorname{rot} \mathbf{B} - (\operatorname{rot} \mathbf{B} \operatorname{grad}) \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \tag{1.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, δ_0 — скалярная электропроводность, \mathbf{H} — напряженность индуцированного поля.

Вектор H_2 , вообще говоря, будет содержать все три компоненты. Однако компонентами H_{2x} и H_{2y} будем пренебрегать, полагая их малыми, что должно иметь место при $\delta \ll \tau$. Кроме того, можно отбросить компоненту u_y скорости по оси y , поскольку среднее значение электромагнитных усилий, действующих в указанном направлении, будет равно нулю, и принять $\mathbf{u} = iu$.

Тогда из уравнения (1.1) следует

$$\Delta H_{2z} + \frac{\beta_m}{B_m} \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \frac{\partial H_{2z}}{\partial y} - \sigma_0 \mu_0 \frac{\partial H_{2z}}{\partial t} - \sigma_0 \mu_0 u \frac{\partial H_{2z}}{\partial x} = - \frac{\sigma_0 s \omega_1}{\alpha} \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}$$

$$\left(\beta_m = \frac{e B_m}{m_e} \tau_e, \quad s = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} \right) \tag{1.2}$$

где e и m_e — заряд и масса электрона, ω — частота, соответствующая скорости движения жидкости. Вводя в рассмотрение среднее значение H_2 напряженности по высоте канала

$$H_2 = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta H_{2z} dz$$

и учитывая, что $[\partial H_{2z}/\partial z]_0^d = 0$, получим

$$\Delta H_2 - \beta_m \alpha \cos(\omega_1 t - \alpha x) \frac{\partial H_2}{\partial y} - \sigma_0 \mu_0 u \frac{\partial H_2}{\partial i} - \sigma_0 \mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial x} = \sigma_0 \omega_1 s B_m \cos(\omega_1 t - \alpha x)$$

$$(\Delta = \Delta_x + \Delta_y) \quad (1.3)$$

Введем безразмерные величины

$$x^* = \alpha x, \quad y^* = \alpha y, \quad l^* = \alpha l, \quad d^* = \alpha d, \quad t^* = \omega_1 t, \quad h = H_2/H_m, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0 \mu_0 \omega_1}{\alpha^2}$$

Тогда уравнение (1.3) в этих единицах переписывается в виде (далее индекс * опущен)

$$\Delta h - \beta_m \cos(t - x) \frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon \left[\frac{\partial h}{\partial t} + (1 - s) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = \varepsilon s \cos(t - x) \quad (1.4)$$

Для выяснения принципиальной стороны вопроса нет необходимости в учете концевых эффектов, а также процессов, связанных с начальными условиями. Таким образом, задача сводится к определению стационарного решения уравнения (1.4) при краевых условиях

$$h_{(y=0)} = h_{(y=d)} = 0 \quad (\text{стенки канала — изоляторы})$$

$$h_{(x=l)} = h_{(x=-l)}, \quad \frac{\partial h}{\partial x}_{(x=l)} = \frac{\partial h}{\partial x}_{(x=-l)}$$

2. При относительно низких значениях скалярной электропроводности, порядка $1000 \text{ ом}^{-1} \text{ м}$ и менее, величину ε можно рассматривать как малый параметр и искать решение уравнения (1.4) в виде

$$h = h_1 \varepsilon + h_2 \varepsilon^2 + \dots \quad (2.1)$$

Имеем

$$L(h_i) = \Delta h_i - \beta_m \cos(t - x) \frac{\partial h_i}{\partial y} - \delta_i s \cos(t - x) - \frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} - (1 - s) \frac{\partial h_{i-1}}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$(\delta_1 = 1; \quad \delta_{i \neq 1} = 0; \quad i = 1, 2, \dots)$$

Формально h_i представляют функции тока. При этом h_1 дает значение напряженности магнитного поля токов в жидкости при односторонней реакции (со стороны внешнего поля). Величинами h_2, h_3, \dots учитывается реакция токов в жидкости на индуктированное поле.

Для определения функций тока используем метод Галеркина.

В соответствии со структурой уравнений (2.2) следует ожидать несимметричного распределения h_i в пространстве и нарушения изохронности процессов в жидкости и в первичной цепи. Поэтому решение уравнения (2.2) будем искать в виде

$$h_i^0 = \frac{1}{2} \sum_1^m a_{m0}^{(i)} \sin \frac{m\pi y}{d} + \sum_1^{m,n} a_{mn}^{(i)} \sin \frac{m\pi y}{d} \cos n(t - x) \quad (i = 1, 3, \dots) \quad (2.3)$$

$$h_i^0 = \sum_1^{m,n} a_{mn}^{(i)} \sin \frac{m\pi y}{d} \sin n(t - x) \quad (i = 2, 4, \dots) \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) удовлетворяют краевым условиям и условиям полноты. Следовательно, сходимость указанных рядов в среднем будет обеспечена.

Осуществляя скалярное умножение оператора $L(h_i^0)$ на координатные функции в области $\Omega(-p\tau < x < p\tau, 0 < y < d)$, получим

$$z_{mn} a_{mn}^{(i)} + \beta \sum_1^k \frac{k m}{k^2 - m^2} [(-1)^{k+m} - 1] [a_k^{(i)} + a_{k(n+1)}^{(i)}] = -\frac{4s}{mn} \delta_{mn}^{(i)} - (-1)^{i-1} n s a_{mn}^{(i-1)} \quad (2.5)$$

Здесь

$$z_{mn} = \lambda_m + n^2, \quad \lambda_m = \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2, \quad \beta = \frac{\beta_m}{d}, \quad \delta_{m1}^{(1)} = 1 \quad \text{при } m = 2\nu$$

при всех других значениях m, n, i имеем

$$\delta_{mn}^{(i)} = 0, \quad a_k^{(i)} = a_{k(0-1)}^{(i)} = a_{k(0+1)}^{(i)} = a_{k1}^{(i)}$$

По поводу системы (2.5) заметим, что она распадается на две независимые системы уравнений. В первую войдут $a_{mn}^{(i)}$, для которых $m + n$ — нечетные числа, во

вторую — $a_{mn}^{(i)}$ с четными $m+n$. Первая система однородна, следовательно, соответственные коэффициенты $a_{mn}^{(i)}$ будут равны нулю. Кроме того, при четных i исчезнут и коэффициенты $a_{m0}^{(i)}$. Таким образом, состав рядов (2.3) и (2.4) становится вполне определенным.

Рассмотрим пример: $s = -1$, $\tau = 3.5$ м, $d = 1$ м, $\beta_m = 5$. Параметр s , как это следует из уравнения (2.5), на сходимость рядов (2.3) и (2.4) влияния не оказывает. Что касается τ и β_m , то принятые для них значения достаточно велики, и с точки зрения быстроты сходимости (2.3) и (2.4) это не лучший случай.

	$i = 1$ [$m = 6$ $m + n = 6$	$i = 1$ $m = 3$ $m + n = 4$	$i = 2$ $m = 5$ $m + n = 6$	$i = 2$ $m = 3$ $m + n = 4$	$i = 3$ $m = 6$ $m + n = 6$	$i = 3$ $m = 3$ $m + n = 4$
$a_{11}^{(i)}$	1	1.010	-0.069	-0.068	-0.004	-0.004
$a_{13}^{(i)}$	-0.039		0.009		0.0005	
$a_{15}^{(i)}$	0.001		-0.0005		-0.0001	
$a_{20}^{(i)}$	-0.254	-0.255			0.0011	0.001
$a_{22}^{(i)}$	-0.111	-0.118	0.012	0.013	0.0007	0.001
$a_{24}^{(i)}$	0.006		-0.002		-0.0003	
$a_{31}^{(i)}$	0.082	0.095	-0.002	-0.002	-0.0002	-0.0003
$a_{33}^{(i)}$	0.008		-0.001		0	
$a_{40}^{(i)}$	-0.041				0.0001	
$a_{42}^{(i)}$	-0.021		0.001		0	
$a_{51}^{(i)}$	0.02		-0.0004		0	
$a_{60}^{(i)}$	-0.014				0	

В таблице приведены результаты расчетов усеченных систем. Здесь все $a_{mn}^{(i)}$ выражены в долях $a_{11}^{(i)}$, значение которого принято за единицу. Отсюда можно видеть, что ряды (2.3) и (2.4) сходятся весьма быстро. Уже первые три члена указанных рядов дают достаточно точные значения функций тока, а первые два члена ряда (2.1) — решение для индуктированного поля. Этот вывод относится и к производным рядов (2.3) и (2.4), т. е. к соотношениям для плотностей тока в жидкости.

В случае скалярной электропроводности, полагая в уравнении (1.4) $\beta_m = 0$ и имея в виду те же краевые условия, получим

$$h = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{[(-1)^m - 1]}{m} \frac{\epsilon s \exp j(t-x)}{1 + \lambda_m + j\epsilon s} \sin \frac{m\pi y}{d}$$

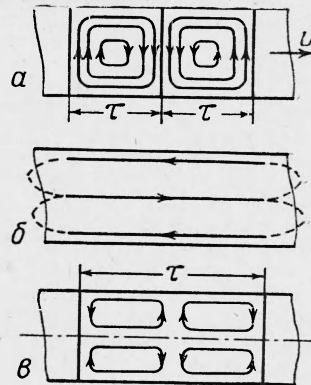
Непосредственным вычислением можно убедиться, что всегда

$$\tilde{z}_{11}^{(1)} < - \frac{4\epsilon s (1 + \lambda_1)}{\pi [(1 + \lambda_1)^2 + (\epsilon s)^2]}$$

Таким образом, анизотропный характер электропроводности приводит:

1) к уменьшению токов основной частоты (они в принципе имеют такое же распределение, что и токи в условиях скалярной электропроводности (фиг. 2, а));

2) к образованию токов нулевой частоты (последние по оси канала направлены по движению жидкости, вдоль стенок — против и замыкаются через концевые зоны канала (фиг. 2, б));



Фиг. 2

через концевые зоны канала

3) к образованию токов кратных частот, наиболее существенными среди которых являются токи двойной частоты (контуры этих токов с полюсным делением $1/2\tau$ «расщепляются» на два, которые располагаются симметрично относительно оси канала (фиг. 2 в)).

Токи нулевой и двойной частоты приводят к образованию бесполезных усилий и увеличению джоулевых потерь. Таким образом, если учесть еще уменьшение токов основной частоты, становится очевидной небыстротеряемость вопроса об ограничении эффекта анизотропности.

Легко показать, что для идеальной компенсации указанного эффекта необходимо выполнение на боковых стенках канала условия

$$h = -\frac{\epsilon s}{1 + (\epsilon s)^2} \cos(t - x) - \frac{(\epsilon s)^2}{1 + (\epsilon s)^2} \sin(t - x)$$

Это равносильно требованию вынесения продольных участков контуров тока за пределы жидкости. Одним из решений этого вопроса, хотя и неполным, может явиться предложение А. И. Вольдека [1] об устройстве боковых стенок канала из проводящего материала. Однако это предложение было сделано в связи с другой задачей, а именно, с задачей уменьшения контурных сопротивлений в условиях скалярной электропроводности жидкости.

Поступила 14 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольдек А. И., Янес Х. И. Поперечный краевой эффект в плоских индукционных насосах при канале жидкого металла с проводящими стенками. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Изд. Латв. АН, 1962.

СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ¹

В. Е. Захаров

(Новосибирск)

Ниже рассматриваются стационарные нелинейные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в плазме конечной температуры. Показано, что в этом случае существуют уединенные волны разрежения с характерной длиной больше или порядка ларморовского радиуса ионов.

В соответствии с этим фронт ударных волн имеет вид осцилляторной структуры, распространяющейся в область невозмущенного течения.

Стационарные нелинейные волны возникают в средах, в которых есть конкуренция процессов дисперсии и процессов нелинейной деформации формы волны.

Характерная длина стационарной волны зависит от ее амплитуды и всегда больше или порядка дисперсионной длины.

Такие волны в холодной бесстолкновительной плазме поперек магнитного поля изучались в работе [1]. Причиной дисперсии в этом случае является инерция электронов, а дисперсионная длина имеет порядок c/ω_{0e} , где c — скорость света, ω_{0e} — ленгмюрова частота электронов. Установившиеся волны являются волнами сжатия.

Однако это рассмотрение годится лишь для весьма холодной плазмы. Ларморовский радиус ионов

$$r_i > \frac{c}{\omega_{0e}} \quad \text{при} \quad \beta = \frac{8\pi n T}{H^2} > \frac{m}{M}$$

поэтому можно ожидать появления новых эффектов на длинах порядка r_i . Здесь ω_{0e} — электронная ленгмюрова частота.

Исследование этих эффектов в общем виде сопряжено с трудностями, но может быть проделано в каждом частном случае достаточно длинных волн, когда для описания плазмы можно применять определенную гидродинамическую модель — «гидродинамику с магнитной вязкостью» [2].

Формально уравнения этой модели есть уравнения гидродинамики с учетом тех членов в тензоре вязкости, которые не приводят к диссипации энергии. Они могут быть получены строго путем усреднения кинетических уравнений по ларморовским окружениям и являются следующим приближением к уравнениям Чу — Гольдбергера — Лоу [3]. Условия применимости модели есть

$$\lambda \gg r_i, \quad \lambda \gg \frac{v}{\omega_{Hi}} \quad (1)$$

¹ Тезисы настоящей работы опубликованы в материалах Всесоюзного съезда механиков (январь 1964 г.).