

20. Хабахпашева Е.М., Ефименко Г.И., Руди Ю.А. Развитие сдвигового слоя при безотрывном течении в диффузоре // Турбулентные струйные течения: Тез. докл. 4-го Всесоюзного совещания по теоретическим и прикладным аспектам турбулентных течений. Ч. 2. — Таллин, 1982. — С. 152—163.
21. Леонтьев А.И., Шишов Е.В. Закономерности пристенной турбулентности в градиентной области течения и при сложных тепловых граничных условиях // Пристенные турбулентные течения. — Новосибирск, 1984. — С. 105—111.
22. Роганов П.С., Заболоцкий В.П., Шишов Е.В. Исследование процессов турбулентного переноса в пристенных потоках на основе анализа транспортных уравнений турбулентности // Пристенные турбулентные течения. — Новосибирск, 1984. — С. 121—126.
23. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. — Л.: Судостроение, 1967.
24. Dengel P., Fernholz H.H. An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation // J. Fluid Mech. — 1990. — V. 212. — P. 615—636.
25. Кутателадзе С.С. Анализ подобия в теплофизике. — Новосибирск: Наука, 1982.
26. Гогош Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука, 1979.
27. Бам-Зеликович Г.М. Расчет отрыва пограничного слоя // Изв. АН СССР. ОТН. — 1954. — № 16. — С. 68—85.
28. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Газодинамика. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
29. Сычев Вик.В. К теории самоиндуцированного отрыва турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 3. — С. 51—60.
30. Зарянкин А.Е., Грибин В.Г., Дмитриев С.С. О механизме возникновения отрыва потока от стенок гладких каналов // ТВТ. — 1989. — Т. 27, № 5. — С. 913—919.

г. Москва

Поступила 22/IX 1993 г.,
в окончательном варианте — 25/III 1994 г.

УДК 532.517.3

Ю.Н. Беляев

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТЫХ ОБЪЕМАХ

Попытаться понять природу турбулентности путем изучения процессов, сопровождающих ее возникновение, по-видимому, проще в случае замкнутых течений, где эти процессы отражают собственные свойства течений и в какой-то мере мало и предсказуемым образом осложняются внешними случайными воздействиями. Такие течения обычно переходят в турбулентные через ряд бифуркаций и стадии динамического хаоса — режимы течения с непредсказуемым поведением во времени.

Поскольку путем прямого «интегрирования» уравнений Навье—Стокса продвинуться достаточно далеко в описании эволюции течений с изменением параметров в настоящее время не представляется возможным, весьма желательно привлечение более общих моделей. Именно это и предложено в [1]: не акцентировать внимание на специфических чертах конкретных течений и, используя идею версальности, изучать в общем виде типы бифуркаций, свойственные нелинейным динамическим системам общего положения. Этот подход, конечно, требует более серьезных обоснований, поскольку, во-первых, пространство состояний для уравнений Навье—Стокса бесконечномерно и, во-вторых, не ясно, типичны ли свойства динамических систем, получающихся в результате редукции исходных уравнений. Первыми шагами в этом направлении были бы доказательства существования и единственности глобальных решений уравнений Навье—Стокса, а затем доказательства конечномерности аттракторов этих уравнений и получение оценок сверху и снизу их хаусдорфовой размерности. В

© Ю.Н. Беляев, 1995

настоящее время имеются лишь условные теоремы о конечномерности аттракторов трехмерных движений вязкой жидкости [2, 3], для двумерного случая существуют полные доказательства [4].

В многочисленных экспериментальных и численных исследованиях возникновения турбулентности (см., например, [5, 6]) получен ряд фундаментальных результатов и, в частности, что хаос в замкнутых течениях наступает после небольшого числа бифуркаций и соответствующие хаотические аттракторы имеют сравнительно малую размерность. Выяснилось, однако, что даже пространственно-временной динамический хаос не является «истинной» турбулентностью, а только еще одной ступенью на пути к ней. С ростом параметров хаотические режимы претерпевают дальнейшие бифуркации, а свойства соответствующих им многомерных аттракторов не удается характеризовать существующими методами.

Более того, как и в турбулентности, такие режимы течений при стандартном подходе практически неразличимы. Эта ситуация порождает много вопросов, касающихся путей возникновения и развития хаоса, свойств множества решений уравнений Навье — Стокса, их бифуркаций и возможности классификации этих решений. Если принять, что начально-краевая задача Навье — Стокса описывает явление турбулентности и переход к ней, то теория гидродинамической устойчивости, позволяя в принципе снять различие в анализе бифуркаций между уравнениями в частных производных и системами обыкновенных дифференциальных уравнений (на центральном многообразии), указывает на общность возникающих здесь проблем для всех нелинейных диссипативных динамических систем достаточно высокой размерности.

Наши экспериментальные исследования возникновения хаоса [6, 7] в течении между двумя вращающимися сферами (сферическое течение Куэтта, СТК) показали, что и на начальной стадии — возникновение хаоса — полного согласования с теорией динамических систем нет: имеется много нестандартных путей перехода. В связи с этим предприняты многопараметрические исследования СТК, из которых вытекает, что многие неожиданные бифуркации возникают из-за однопараметрического подхода к изучению эволюции сугубо многопараметрической системы: бифуркации коразмерности выше 1 выглядят как «нетипичные», непредсказуемые [8]. Многопараметрический подход позволил отыскать области пространства параметров, где нет пересечения бифуркационных поверхностей и сценарии возникновения хаоса реализуются через типичные бифуркации при варьировании только одного параметра.

В какой-то мере эти исследования сняли одни трудности, но выявили более фундаментальные, связанные со структурой многомерных хаотических аттракторов. Реальным путем преодоления этих трудностей остается все же последовательное изучение структуры и свойств многомерных хаотических аттракторов по предыстории возникновения. Как в экспериментальных, так и в теоретических исследованиях такие попытки уже предпринимались, однако все они наталкивались в конечном счете на отсутствие эффективных методов характеристики таких объектов. Дело в том, что траектория за разумное время успевает посетить лишь ничтожную часть многомерного множества, а все возрастающее число независимых мод движения все более и более маскируется неизбежными погрешностями измерений.

В наиболее полном анализе методов характеристики свойств хаотических аттракторов [9] просматривается даже мысль, что по достижении некоторого значения размерности хаотического аттрактора (скажем, 7) никакого разумного объема информации не хватит для правильной оценки размерности. Сами авторы предлагают (и успешно реализуют на примере конвекции Рэлея — Бенара) использовать для реконструкции фазового портрета системы измерения эволюции во времени не одну независимую переменную, а максимально возможное их число. Однако в эксперименте такой подход сопряжен с весьма большими затратами.

В данной работе на примере изучения одной из последовательностей бифуркаций одного из режимов СТК на плоскости двух параметров (e — Re) сделана попытка показать возможности метода, предложенного в [10], для характеристики хаотических аттракторов по временному ряду для одной независимой переменной. Основным достоинством этого корреляционного метода в применении к анализу временных рядов, полученных в эксперименте, является возможность эффективного разделения высокочастотного экспериментального шума и медленной хаотической динамики на аттракторе.

1. Условия проведения экспериментов. Изучались перестройки течений СТК при изменении числа Рейнольдса Re (или, что то же самое, числа Тейлора Ta) и при фиксированной относительной толщине слоя $\delta = 1,006$ и эксцентриситете. Основные обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем: число Рейнольдса $Re = FR_1^2/\nu$ (F — круговая частота вращения внутренней сферы, R_1 — ее радиус, ν — кинематическая вязкость жидкости), относительная толщина сферического слоя $\delta = (R_2 - R_1) / R_1$ (R_2 — радиус внешней сферы, $R_2 > R_1$), эксцентриситет $e = R/R_1$ (R — смещение центра внутренней сферы относительно центра внешней вдоль оси вращения). Ниже все частоты в спектрах нормированы на величину $F_0 = F/2\pi$, $R_1 = 75$ мм. Проводились визуальные наблюдения перестроек течения, а также измерения пульсаций скорости в трех точках слоя (вблизи полюса и экватора и на широте 45° , примерно в середине слоя по радиусу) или одновременно трех компонент скорости в одной точке. Для этого использовались лазерные доплеровские измерители скорости, сигналы которых после удаления постоянной составляющей оцифровывались и записывались в память ПЭВМ и на жесткий диск. Частота опроса каждого канала была фиксированной и составляла 25 Гц.

Параметры установки и условия проведения эксперимента подобраны так, что все основные характеристики (Re , частоты, полуширины спектральных линий и т.п.) можно поддерживать постоянными в пределах погрешности 0,03 %. Характерное время вязкой диффузии, вычисленное по толщине сферического слоя для $\delta = 1,006$, составляет около 100 с, а по периферии слоя — около 3000 с во всех экспериментах. Поэтому все измерения в так называемых стационарных условиях производились после выдерживания установленного режима в течение 40 мин. Отдельные выборки по длительности достигали 6 ч.

2. Методика обработки результатов измерений. Предварительно на плоскости $Re - e$ было выделено несколько режимов течения, в которых переход к хаосу и дальнейшие перестройки хаотических аттракторов при изменении только Re происходили в результате нормальных бифуркаций, во всяком случае мягко и обратимо. Далее после процедур установления в нескольких точках сферического слоя измерялись пульсации скорости течения режима до перехода и после него. Получались длительные выборки. Их обработка включала Фурье- и корреляционный анализ и всевозможные комбинации этих процедур, составляющие стандартные приемы спектрально-корреляционного анализа сигналов и позволяющие для регулярных квазипериодических режимов однозначно характеризовать состояния системы, а по резкому уширению спектральных линий и увеличению затухания корреляций судить о переходе к хаосу. Для хаотических режимов по известной процедуре Такенса — методом времени запаздывания — реконструировались фазовые портреты системы различной размерности для расчета характеристик аттракторов типа размерностей (поточечной и корреляционной), ляпуновских показателей и т.п.

Поскольку в данных экспериментах, по-видимому, не удалось натолкнуться на простейшие хаотические аттракторы и переход к хаосу происходил с торов уже достаточно большой размерности, то указанные выше стандартные процедуры практически не позволяли однозначно определить ни сами бифуркации хаотических аттракторов, ни их размерности и по их

величине судить о происходящих перестройках. Именно в этих условиях неизбежные погрешности измерений сказываются наиболее сильно. Поэтому сделана попытка воспользоваться подходом, предложенным в [10], и его вариантом [11], несколько модифицированным.

Суть алгоритма хорошо известна: по данным измерений строится траекторная матрица X , составленная из векторов x размерности n , возникающих как бы при последовательном просмотре временного ряда длины $N_0 \gg n$ через временное окно ширины n . Возникает задача определить, для какого направления s в n -мерном пространстве сумма квадратов проекций S этих векторов будет максимальной. Из условий экстремума S получим

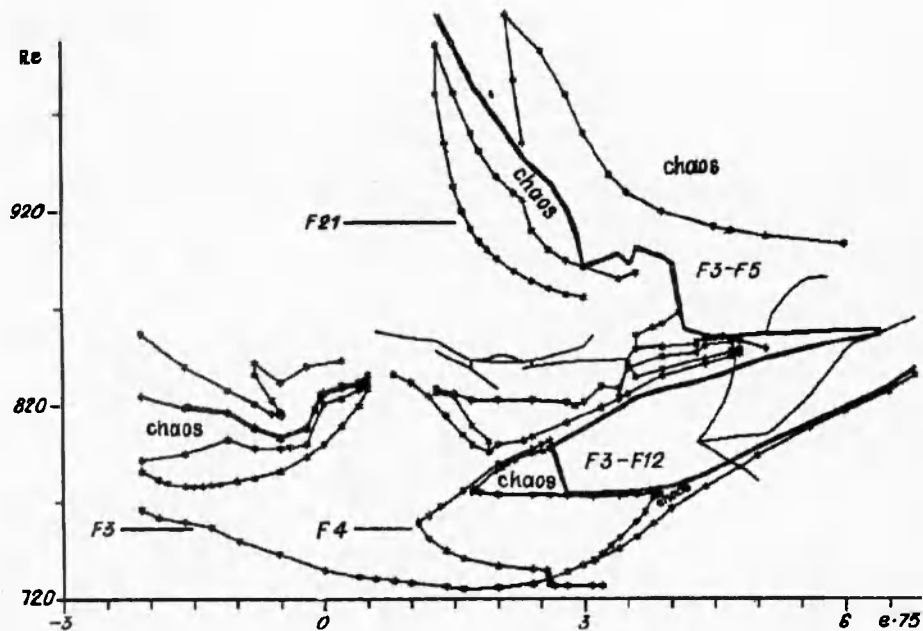
$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n x_{ij} x_{ik} c_k - S c_j = \bar{0}, \quad j = 1, \dots, n, \quad N = N_0 - n + 1.$$

Если обозначить $V = \sum_{i=1}^N x_i x_i^T$, получается задача на собственные значения для матрицы V , пропорциональной ковариационной матрице векторов x : $Vc = Sc$. Собственные значения этой матрицы равны сумме квадратов проекций векторов x на направления s , а сами s образуют ортонормированный базис. Считается, что детерминированная часть временного ряда определяет наибольшие собственные значения, тогда как случайный шум, давая вклады во все собственные значения, сильно искажает только соответствующие наиболее слабым движениям, не превышающим уровня шума. Проекция на первые векторы, собственные значения которых лежат выше уровня шума, обеспечивают оценки размерности аттрактора. Один из вариантов таких оценок описан в [10].

К сожалению, для выделения детерминированной части собственных значений из области перехода от детерминированных к шумовым нет четких критериев. Для этого развита такая процедура. Строятся проекции фазового портрета на первые $q < n$ собственных векторов ковариационной матрицы (в данной работе $q = 9, n = 20 + 30$), что дает множество векторов z_i .

Далее, берется множество касательных векторов $y_i = z_i - z_0$, лежащих в малой окрестности E некоторого вектора z_0 из выбранной области аттрактора. Локальный ковариационный базис строится для всех y_i таких, что $E - \sigma < |y| < E + \sigma$. Если бы все y_i лежали строго в касательном пространстве, то они проектировались бы только на первые m векторов, где m — размерность аттрактора, прочие же проекции были бы равны 0 или близки к шумовым значениям. Из-за кривизны многообразия y_i проектируются на большее число направлений. По некоторым направлениям аттрактор может быть фрактальным. Однако зависимость длины проекций от E для этих разных направлений различна. Для «истинных» проекций $S \sim E^2$, из-за кривизны $S \sim E^4$, для шумовых направлений S не зависит от E , тогда как у фрактальных направлений нет никакой регулярной зависимости S от E [11].

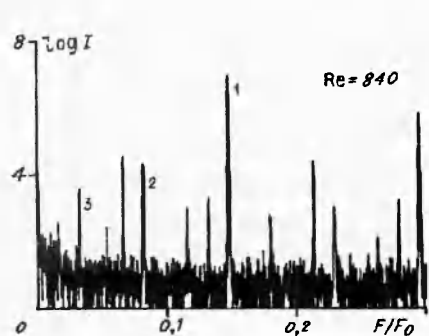
3. Результаты измерений. На рис. 1 приведена диаграмма режимов течения на плоскости $Re - e$ для одной из последовательностей режимов с главными частотами $F1, F3$, а именно последовательности $F1, F3, F4$ [8]. Линиями представлены бифуркационные кривые, соответствующие мягким и обратимым перестройкам режимов течения при квазистатическом изменении параметров. Обозначениями типа $F3, F4$ и т.п. отмечены кривые появления движений с указанными частотами (по техническим причинам не все кривые обозначены), а типа $F3 - F12$ и т.п. — области существования других последовательностей. Двойные линии — необратимые перестройки режимов течения. Словом chaos отмечены некоторые области хаотических движений. Режимы типа $F3 - F5, F3 - F12$, хотя и возникают на листе $F1, F3, F4$, в действительности принадлежат другим листам общей бифуркационной диаграммы. Они имеют (по отношению к кривым рис. 1) значительный гистерезис и могут быть протянуты назад от двойных линий к существенно меньшим Re мягко и обратимо.



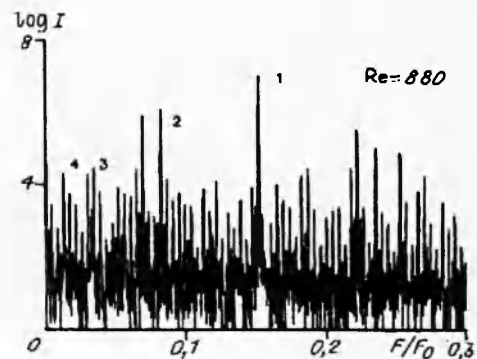
Р и с. 1

В данной работе изучалась одна из последовательностей режима $F3 - F5$, для выхода на которую проделаны следующие операции. При фиксированном $e \approx 0,01$ и квазистатическом увеличении Re сначала при $Re = 460$ получали режим с частотой $F1$, затем при $Re = 734$ появлялась частота $F3$, значение Re повышали до 870 и далее увеличивали эксцентриситет до $e = 0,073$, в результате чего возникал режим $F3 - F5$. На этот же режим можно выйти, если при фиксированном $e = 0,073$ после возбуждения $F1$, квазистатически изменяя Re , получить при $Re = 790$ хаотический режим в результате бифуркации коразмерности 2, а затем резко увеличить Re до значений, больших 850. При фиксированном e все перестройки этого режима с частотами $F1, F3, F5$ происходят мягко и обратимо при варьировании только Re , с ростом которого появляются другие частоты, возникают хаос и ряд перестроек хаотических режимов, а с уменьшением Re эти состояния исчезают в обратном порядке и воспроизводимо.

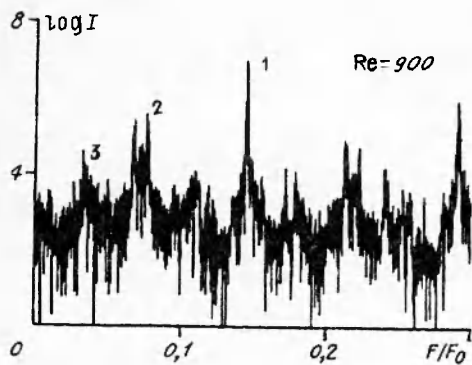
На рис. 2 — 8 представлены спектрограммы некоторых из них. По оси абсцисс откладывалась частота, нормированная на частоту вращения сферы F_0 , а по оси ординат — десятичный логарифм спектральной плотности мощности пульсаций скорости течения $\log I$. Цифрами 1—4 показаны фунда-



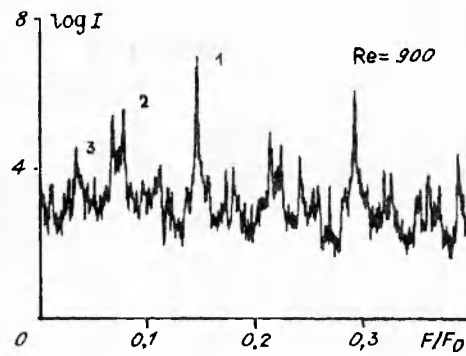
Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

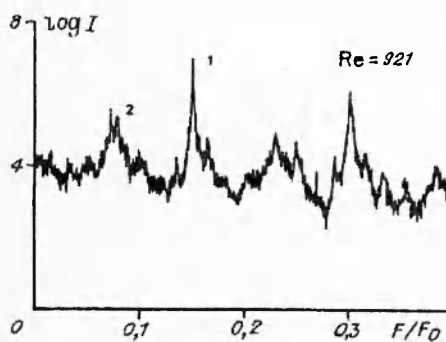


Р и с. 5

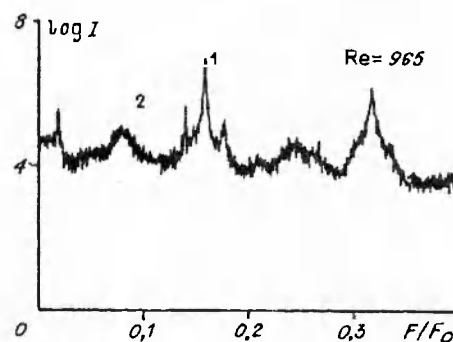
ментальные несоизмеримые частоты режимов, представляющие независимые движения. Спектрограмма режима с тремя частотами ($Re = 840$) приведена на рис. 2 и получена по данным измерений вблизи полюса, где движения на частоте F_1 очень малы (пик 3). В спектре есть пики на основных частотах, гармоники, их комбинации и широкополосный шум. Оценки размерности аттрактора традиционными методами дают величину 2,3 и явно недоучитывают вклад движения на частоте F_1 .

Бифуркация этого тора 3 происходит при $Re = 875$ в тор 4. Спектрограмма нового режима при $Re = 880$ показана на рис. 3. Добавление еще одной частоты сильно усложняет спектр, но из-за регулярности режим можно однозначно идентифицировать. Однако для получения приемлемых значений размерности стандартным путем приходится увеличивать длину выборки. На рис. 9 собственные значения ковариационной матрицы $S(l)$ для различных режимов течения показаны точками, соединенными для наглядности отрезками прямых, как зависимости $\ln S$ от номера l (под каждой получившейся кривой указано значение Re режима). Выделяющиеся четыре наибольших собственных значения указывают, что размерность аттрактора не превышает 4, остальные $S(l)$ можно отнести к шумовым.

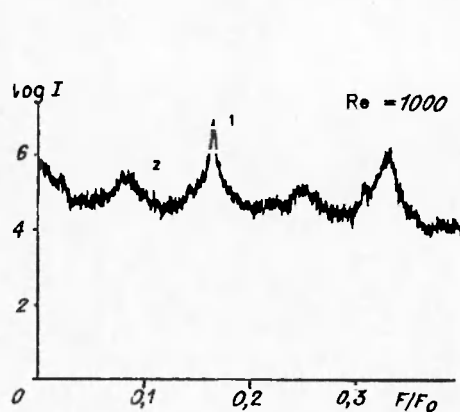
При $Re = 895$ в системе возникает хаотический аттрактор. Спектры для нового режима при $Re = 900$ приведены на рис. 4 и 5. Видно существенное уширение всех спектральных линий, все низколежащие пики практически тонут в сплошном фоне, который по сравнению с регулярными режимами поднимается на три порядка. Трудности оценки поточечной или корреляционной размерности связаны именно с характером эволюции траектории на таком хаотическом множестве. Для получения состоятельных оценок распределения спектральной плотности такой динамики необходимо усреднение многих спектрограмм (ср. рис. 4 (одна выборка) и рис. 5 (усреднение по 13 выборкам)), а для оценки размерности необходимы длительные выборки. Собственные значения $S(l)$ показаны на рис. 9 (кривая с



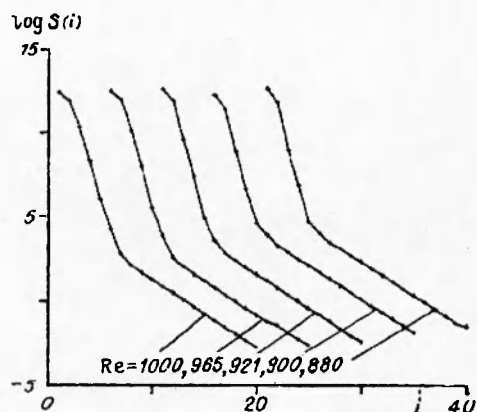
Р и с. 6



Р и с. 7



Р и с. 8

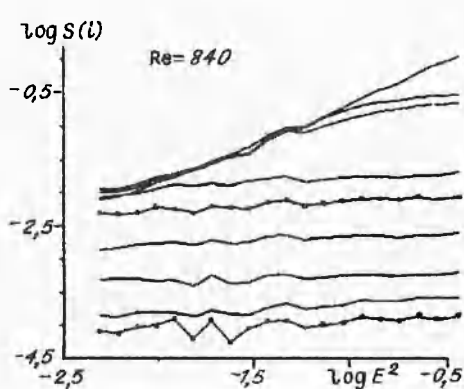


Р и с. 9

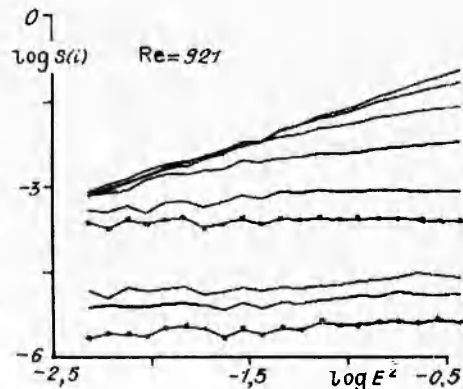
$Re = 900$). Видно, что четыре главных собственных значения сохранились, и, таким образом, одно из направлений движения на торе 4 стало хаотическим, но сам тор сохранился.

При $Re = 915$ происходит бифуркация хаотического аттрактора, что обнаружить, наблюдая лишь эволюцию спектра, практически невозможно: с увеличением Re происходят постепенный рост уровня сплошного фона и исчезновение остатков спектральных линий (ср. рис. 5 и 6). Оценки размерности с помощью корреляционного интеграла и поточечно неопределенны: размерность с ростом Re изменяется постепенно. Собственные значения ковариационной матрицы для $Re = 921$ представлены на рис. 9. Выделяются четыре главных собственных значения, но изменилась и форма «плато» начальных собственных значений, которые можно отнести к шумовым, так что и 5-е собственное значение в какой-то мере характеризует в основном не шум, а динамику системы. Детально проанализирована динамика системы в так называемом «локальном ковариационном базисе» [11], и первые оценки указывают, что в данном случае тор 4 разрушился в результате зарождения нового движения. Результаты для этого анализа представлены на рис. 10 и 11. При $Re = 840$ (рис. 10) только три собственных значения в локальном ковариационном базисе проявляют нужную зависимость от E^2 для сравнительно малых E , тогда как при $Re = 921$ таких собственных значений уже четыре и аналогичная зависимость намечается для 5-го, причем осциллирующий характер зависимостей последних указывает на хаотическую природу соответствующих им направлений на аттракторе.

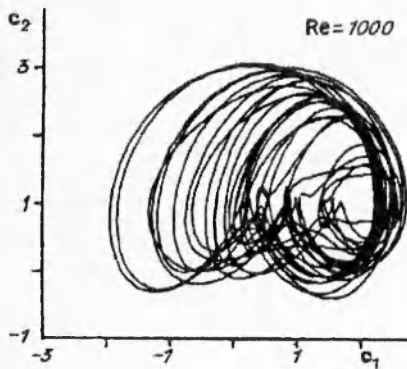
Еще более радикальные изменения в системе происходят при дальнейшем увеличении Re . Появлению хаотического режима, спектр которого



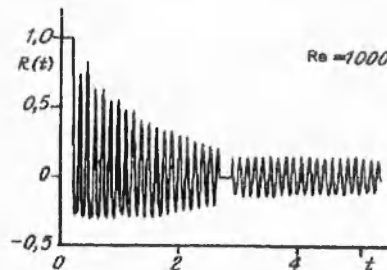
Р и с. 10



Р и с. 11



Р и с. 12



Р и с. 13

представлен на рис. 8, по-видимому, предшествуют две бифуркации обсуждавшегося выше хаотического аттрактора. Существенно изменяется топология аттрактора — появляются как бы два центра, вокруг которых пытается эволюционировать траектория. Проекция фазового портрета системы на плоскость из двух первых собственных векторов c_1 и c_2 ковариационного базиса дана на рис. 12. Показанная здесь траектория системы составляет всего 0,3 % всей исследованной траектории, кажущиеся изломы и самопересечения траектории — следствие двумерного проектирования многомерного множества. Спектры собственных значений ковариационной матрицы при $Re = 1000$ и 965 представлены на рис. 9, и по ним можно сделать предварительный вывод, что одна бифуркация происходит до $Re = 965$, а другая — после (спектр хаотического режима при $Re = 965$ приведен на рис. 7). Предварительный же анализ в локальном ковариационном базисе показывает, что первая из них соответствует появлению нового регулярного движения, а вторая — нового хаотического. Аттрактор может быть охарактеризован семью независимыми координатами и вложен в 15-мерное евклидово пространство. На аттракторе имеются четыре регулярных направления и три хаотических. Традиционные методы оценки размерности дают в этом случае величину 5,9, и по ним ничего нельзя сказать о структуре аттрактора.

В заключение отметим, что путем построения базиса Карунена — Лоева для траекторной матрицы представляется возможным продвинуться несколько дальше традиционных методов характеристики хаотических аттракторов. Даже в сравнительно сложных хаотических режимах, спектры которых практически сплошные и корреляции сильно затухают (см. на рис. 13 автокорреляционную функцию при $Re = 1000$), удастся исследовать структуру соответствующих им многомерных аттракторов и на этой основе классифицировать множество предтурбулентных хаотических состояний гидродинамических систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93—013—17342).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* — 1971. — V. 20, N 2. — P. 187.
2. Constantin P., Foias C., Temam R. Attractors representing turbulent flows // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 1985. — V. 53, N 314.
3. Manly O.P. Finite dimensional aspects of turbulent flows // *Chaos in Nonlinear Dynamical Systems.* — Philadelphia, 1984. — P. 165.
4. Ладыженская О.А. Минимальные глобальные В-аттракторы полугрупп и начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // *ДАН СССР.* — 1987. — Т. 294, № 1.
5. Brandstater A., Swinney H.L. A strange attractors in a weakly turbulent Couette — Taylor flow // *Phys. Rev.* — 1987. — V. 35A. — P. 2207.

6. Belyaev Yu. N., Monakhov A.A., Scherbakov S.A., Yavorskaya I.M. Some routes to turbulence in the spherical Couette flow // *Laminar-Turbulent Transition*. — Berlin: Springer-Verlag, 1985.
7. Беляев Ю.Н., Яворская И.М. Проблемы устойчивости и возникновения хаоса в замкнутых гидродинамических течениях // *Тр. МИАН СССР им. Стеклова*. — 1989. — Т. 186.
8. Belyaev Yu. N., Yavorskaya I.M. Non-uniqueness and multi-parametric study of transition to chaos in the spherical Couette flow // *Europ. Journ. of Mech. B/Fluids*. — 1991. — V. 10, N 2.
9. Malinetskii G.G., Potapov A.B., Rakhmanov A.I., Rodichev E.B. Limitation of delay reconstruction for chaotic dynamical systems // *Phys. Lett.* — 1993. — V. 179A, N 1.
10. Broomhead D.S., King G. P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // *Physica*. — 1986. — V. 20D, N 2.
11. Broomhead D.S., Jones R. Time-series analysis // *Proc. Roy. Soc. London*. — 1989. — V. A423. — P. 103—121.

г. Москва

Поступила 10/XII 1993 г.,
в окончательном варианте — 14/III 1994 г.

УДК 532.526

*А.В. Бойко, В.В. Козлов, В.В. Сызранцев,
В.А. Щербаков*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ОДИНОЧНОМ СТАЦИОНАРНОМ ВОЗМУЩЕНИИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО КРЫЛА

Введение. Трехмерные пограничные слои — один из наиболее часто встречающихся на практике типов пристенных течений. В отличие от классического перехода на плоской пластине при низкой степени турбулентности набегающего потока, который вызывается развитием только волн Толлмина — Шлихтинга, распространяющихся вдоль потока [1], на скользящем крыле механизм перехода не столь однозначен и изучен значительно слабее.

При небольших углах скольжения и скоростях набегающего потока основными остаются те же механизмы неустойчивости, что и для двумерного крыла: усиление волн Толлмина — Шлихтинга, а ниже по потоку в зоне положительного градиента давления — волн неустойчивости отрывного течения [2]. Однако, начиная с углов скольжения порядка 30—40°, при достаточно низких скоростях потока (20—30 м/с) вблизи передней кромки крыла, как правило, формируется ряд стационарных совращающихся вихрей [3], оси которых направлены приблизительно вдоль линии тока невязкого течения. Появление таких структур в течении на крыле и в других сходных потоках, например на вращающемся диске [4], связано с наличием в пограничном слое компоненты скорости, направленной перпендикулярно вектору скорости в свободном потоке. Профиль скорости такого поперечного течения перегибной, что, согласно линейной теории, способствует появлению неустойчивости невязкого типа. В данном случае начинают усиливаться возмущения, распространяющиеся практически вдоль направления поперечного течения, с частотами, низкими по сравнению с характерными для волн Толлмина — Шлихтинга, которые развиваются к тому же при значительно больших числах Рейнольдса и имеют вязкую природу.

Причины предпочтительного выделения именно стационарных вихрей связаны, во-первых, с тем, что такие возмущения оказываются близкими к наиболее усиливающимся [5], и, во-вторых, с наличием неконтролируемых затравочных возмущений от различных неровностей поверхности, влияние которых существенно вблизи передней кромки, где толщина пограничного