

**ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В СОСТАВНОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ**

*В. М. Зеленов, В. С. Поленов*

(Волгоград)

Рассмотрена задача о распространении волн напряжений в стержне, составленном из вязко-упругой конечной длины и полубесконечной упругой частей, при приложении к концу стержня импульсной нагрузки.

Наследственные свойства вязко-упругой части стержня характеризуются ядром Ю. Н. Работнова и моделью стандартного линейного тела.

Методами теории функций комплексного переменного получены решения в виде суммы стационарных и нестационарных частей.

В наследственной теории упругости в качестве ядер интегральных соотношений Больцмана — Вольтерра наиболее эффективными в теоретическом и практическом отношении оказываются дробно-экспоненциальные функции Ю. Н. Работнова [1]. В работе [2] показана возможность использования таких функций в динамических задачах теории линейной вязко-упругости.

Представляется интересным исследование волн напряжений в стержне, наследственное поведение которого определяются Э<sub>γ</sub>-функцией.

Задачи по распространению волн напряжений в однородных полубесконечных стержнях рассматривались многими авторами [3-6].

Ниже исследуются напряжения в стержне, составленном из двух частей: вязко-упругой, наследственные свойства которой описываются ядром релаксации Ю. Н. Работнова, и упругой за счет приложения к концу стержня импульсной синусоидальной нагрузки. Решения получены в виде суммы стационарных и нестационарных частей.

1. Выберем направление оси  $x$  вдоль оси стержня, составленного из вязко-упругой  $x \in [0, l]$  и упругой  $x \in [l, \infty]$  частей. К концу стержня приложена импульсная синусоидальная нагрузка  $\sigma_0 H(t) \sin \omega t$ , где  $H(t)$  — единичная функция Хевисайда.

Возникшая в вязко-упругой среде волна напряжения отражается и преломляется на границе  $x = l$  раздела частей стержня. Рассмотрим поведение отраженной и преломленной волн.

Уравнение движения имеет вид

$$E_j u_{,xx} = \rho_j u_{,tt} \quad (j = 1, 2) \quad (1.1)$$

Здесь  $u = u(x, t)$  — продольное смещение точек стержня,  $\rho_j$  — плотность,  $E_j$  — модуль упругости соответствующей среды, индекс  $j = 1$  относится к вязко-упругой части, индекс  $j = 2$  — к упругой; суммирование по повторяющимся индексам не производится.

Условия сопряжения ( $x = l$ ) и на границе ( $x = 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) + \sigma_1(x, t) &= \sigma_2(x, t), & u + u_1 &= u_2, & x &= l \\ \sigma &= -\sigma_0 H(t) \sin \omega t, & & & x &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решения уравнения (1.1) для перемещений, вызванных проходящей  $U$ , отраженной  $U_1$  в вязко-упругой части и преломленной  $U_2$  в упругую часть волн, в пространстве Лапласа запишутся в виде

$$U = C \exp(-k_1 x), \quad U_j = C_j \exp(\pm k_j x) \quad (1.3)$$

Здесь  $C, C_1, C_2$  — коэффициенты, играющие роль амплитуды,  $k_1, k_2$  — волновые числа. Знак плюс относится к отраженной, а минус — к преломленной волнам.

Для условий сопряжения и на границе (1.2) в пространстве Лапласа имеем

$$\begin{aligned}\sigma(p) + \sigma_1(p) &= \sigma_2(p), & U + U_1 &= U_2, & x &= l \\ \sigma(p) &= -\sigma_0\omega(p^2 + \omega^2)^{-1}, & & & x &= 0\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь  $p$  — комплексный параметр преобразования Лапласа.

Из выражений (1.3) с учетом (1.4) легко определяются  $C, C_1, C_2$ . Имея в виду выражение для напряжения через перемещение

$$\sigma_j(p) = E_j U_{j,x} \quad (j = 1, 2) \quad (1.5)$$

и зная  $C, C_1, C_2$ , получим

$$\begin{aligned}\sigma_1(p) &= A(E_1 k_1 - E_2 k_2) \exp[k_1(x - 2l)] \\ \sigma_2(p) &= -2AE_2 k_2 \exp[-k_1 l - k_2(x - l)] \\ A &= \sigma_0\omega[(p^2 + \omega^2)(E_1 k_1 + E_2 k_2)]^{-1}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь  $E_1, E_2$  — модули упругости в комплексном виде.

Волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  в комплексном виде выражаются через модули упругости соответствующих сред

$$k_1^2 = \rho_1 p^2 E_1^{-1}, \quad k_2^2 = \rho_2 p^2 E_2^{-1} \quad (1.7)$$

2. Пусть наследственные свойства вязко-упругой части стержня описываются ядром релаксации Ю. Н. Работнова, которое в пространстве Лапласа имеет вид

$$R(p) = [1 + (p\tau_\epsilon)^\gamma]^{-1} \quad (0 < \gamma \leq 1) \quad (2.1)$$

где  $\tau_\epsilon$  — время релаксации. С учетом (2.1) выражения для  $E_j$  и  $k_j$  согласно принципу Вольтерра будут иметь вид

$$\begin{aligned}E_1 &= E_{\infty 1} [1 - \nu_\epsilon R(p)], & E_2 &= E_{\infty 2}, & \nu_\epsilon &= (E_{\infty 1} - E_{01}) / E_{\infty 1} \\ k_1 &= p C_{\infty 1}^{-1} [1 - \nu_\epsilon R(p)]^{-1/2}, & k_2 &= C_{\infty 2}^{-1} p\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь  $E_{\infty 1}, E_{\infty 2}$  — нерелаксированные,  $E_{01}$  — релаксированные значения модулей;  $C_{\infty j} = (E_{\infty j} / \rho_j)^{1/2}$  — скорости упругих волн в соответствующих средах.

Оригиналы для  $\sigma_1(x, t)$  и  $\sigma_2(x, t)$  определяются по формуле обращения Меллина — Фурье

$$\sigma_j(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \sigma_j(p) e^{pt} dp \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

Подставив в (2.3) выражения (1.6) с учетом (2.1) и (2.2), получим

$$\begin{aligned}\sigma_1(x, t) &= \frac{\sigma_0}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Lambda_1 (\Lambda^{1/2} F - 1) \exp\{\alpha(x - 2l) + pt\} dp \\ \sigma_2(x, t) &= \frac{\sigma_0}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \Lambda_1 \exp\{-\alpha l - C_{\infty 2}^{-1} p(x - 2l) + pt\} dp\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}\Lambda &= (p^\gamma + a_1)(p^\gamma + a_2)^{-1}, & \Lambda_1 &= \omega[(p^2 + \omega^2)(1 + \Lambda^{1/2} F)]^{-1} \\ F &= C_{\infty 2} E_{\infty 1} / C_{\infty 1} E_{\infty 2}, & \alpha &= C_{\infty 1} p \Lambda^{-1/2}\end{aligned}$$

Подынтегральные функции в (2.4) при  $\gamma \neq 1$  имеют полюса первого порядка  $p_k = \pm i\omega$ , точки разветвления  $p = 0, -\infty$  (точки  $p = (-a_1)^{1/\gamma}, p = (-a_2)^{1/\gamma}$  не являются точками разветвления, так как при  $\gamma \neq 1$  они не попадают на первый лист римановой поверхности  $|\arg p| < \pi$ ).

Выберем замкнутый контур интегрирования с разрезом вдоль отрицательной действительной оси. Используя основную теорему теории вычетов и лемму Жордана, получаем [7]

$$\sigma_{1n}(x, t) = \left[ \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} \Omega G_1(x, t, s) ds \right] H(t_1) + \sum_k \operatorname{res} \sigma_1(p_k) e^{p_k t} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{2n}(x, t) = - \left[ \frac{2\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} \Omega G_2(x, t, s) ds \right] H(t_2) + \sum_k \operatorname{res} \sigma_2(p_k) e^{p_k t}$$

$$\Omega = \omega(s^2 + \omega^2)^{-1}, \quad t_1 = t + (x - 2l) C_{\infty 1}^{-1}, \quad t_2 = t - i C_{\infty 1}^{-1} - (x - l) C_{\infty 1}^{-1}$$

Функции  $G_1$  и  $G_2$  определены следующим образом: (2.6)

$$G_1 = B_1 \exp[-(\alpha_1 + st)] \{ [1 - F^2 R_*] \sin \beta_1 - 2FR_*^{1/2} \sin \varphi \cos \beta_1 \}$$

$$G_2 = B_1 \exp(\alpha_2 - st) \{ [1 + FR_*^{1/2} \cos \varphi] \sin \beta_2 + FR_*^{1/2} \sin \varphi \cos \beta_2 \}$$

Величины, входящие в функции  $G_1$  и  $G_2$ , имеют вид

$$B_1 = [1 + 2FR_*^{1/2} \cos \varphi + F^2 R_*]^{-1}, \quad \alpha_1 = h_1(x - 2l) \cos \varphi$$

$$R_* = R_1 R_2^{-1} \alpha_2 = h_1 l \cos \varphi + C_{\infty 2}^{-1} s(x - l), \quad \beta_1 = h_1(x - 2l) \sin \varphi$$

$$\beta_2 = h_1 l \sin \varphi, \quad h_1 = C_{\infty 1}^{-1} s(R_1 / R_2)^{-1/2}, \quad \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2$$

$$R_n = (a_n^2 + 2a_n s^\gamma \cos \delta + s^{2\gamma})^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = (a_n + s^\gamma \cos \delta)^{-1} s^\gamma \sin \delta$$

$$a_1 = (1 - \nu_\varepsilon) \tau_\varepsilon^{-1}, \quad a_2 = \tau_\varepsilon^{-1}, \quad \delta = \pi\gamma, \quad n = 1, 2$$

Здесь  $H(t_1), H(t_2)$  — единичные функции Хэвисайда.

Полагая в интегралах (2.4)  $\gamma = 1$ , получим напряжения в составном стержне, динамическое поведение вязко-упругой части которого описывается моделью стандартного линейного тела. В этом случае подынтегральные выражения в (2.4) имеют полюсы первого порядка  $p_k = \pm i\omega$  и точки разветвления  $p = -a_1, p = -a_2$ . Выбирая замкнутый контур с разрезом от  $(-a_1)$  к  $(-a_2)$  на действительной отрицательной оси, получим

$$\sigma_{1z} = \left[ \frac{\sigma_0}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Omega G_3(x, t, s) \exp(-st) ds \right] H(t_1) + \sum_k \operatorname{res} \sigma_1(p_k) e^{p_k t} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{2z} = \left\{ - \frac{2\sigma_0}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Omega G_4(x, t, s) \exp[C_{\infty 1}^{-1}(x - l)s - st] ds \right\} H(t_2) +$$

$$+ \sum_k \operatorname{res} \sigma_2(p_k) e^{p_k t}$$

Функции  $G_3$  и  $G_4$  записываются в виде

$$G_3 = B_2 \{ (1 - F^2 h_2) \sin \psi_1 - 2Fh_2^{1/2} \cos \psi_1 \}, \quad h_2 = (s - a_1)(a_2 - s)^{-1}$$

$$G_4 = B_2 \{ h_2^{1/2} F \cos \psi_2 + \sin \psi_2 \}, \quad \psi_1 = C_{\infty 1}^{-1} \operatorname{sh}_2^{-1/2}(x - 2l) \quad (2.8)$$

$$\psi_2 = C_{\infty 1}^{-1} s l h_2^{-1/2}, \quad B_2 = (1 + F^2 h_2)^{-1}$$

Заметим, что из (2.5) нельзя получить выражения (2.7) предельным переходом при  $\gamma \rightarrow 1$ .

Каждое из выражений (2.5) и (2.7) представляет собой сумму стационарных и нестационарных частей напряжений для отраженной и преломленной волн.

Нестационарные части связаны с релаксационными процессами, протекающими в динамической системе. В случае ядра Ю. Н. Работнова напряжения  $\sigma_{1n}$  для отраженной и  $\sigma_{2n}$  для преломленной волн — вторых слагаемых выражений (2.5) — можно записать в виде

$$\sigma_{jn} = A_j \sin(\omega t \pm \theta_j \pm \kappa_j) \quad (j = 1, 2) \quad (2.9)$$

Амплитуды  $A_j$  соответствующих волн определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \sigma_0 q_1 [b^2 + (RF^2 - 1)]^{1/2} \exp[\xi(x - 2l)], \quad \xi = C_{\infty 1}^{-1} \omega R^{-1/2} \sin \frac{\psi}{2} \\ A_2 &= \sigma_0 q_1 \exp(-\xi l), \quad q_1 = \left(1 + RF^2 + 2R^{1/2} F \cos \frac{\psi}{2}\right)^{-1} \\ b &= 2R^{1/2} F \sin \frac{\psi}{2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Величины, входящие в (2.10), имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \kappa_1 &= b(RF^2 - 1)^{-1}, \quad \operatorname{tg} \kappa_2 = \frac{1}{2} b(1 + R^{1/2} \cos \psi/2), \quad \operatorname{tg} \psi = d_1 d_2^{-1} \\ \theta_1 &= (x - 2l)d, \quad \theta_2 = ld + C_{\infty 2}^{-1} \omega(x - l), \quad d = C_{\infty 1}^{-1} \omega R^{-1/2} \cos \psi/2 \\ R &= (n_1^2 + n_2^2)^{-1} (d_1^2 + d_2^2)^{1/2}, \quad d_1 = (m_1 n_2 - n_1 m_1)^2, \quad d_2 = n_1 n_2 - m_1^2 \\ n_k &= a_k + \omega^r \cos \delta/2, \quad m_1 = \omega^r \sin \delta/2, \quad \xi = C_{\infty 1}^{-1} \omega R^{-1/2} \sin \psi/2 \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

В случае стандартного линейного тела нестационарные части — вторые слагаемые выражений (2.7) для отраженной и преломленной волн — принимают вид

$$\sigma_{j\epsilon} = D_j \sin(\omega t + \theta_i \pm \kappa_j) \quad (j = 1, 2; i = 3, 4) \quad (2.11)$$

Для амплитудных величин  $D_j$  имеем

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} \sigma_0 q_2 [(rF^2 - 1)^2 + r_1^2]^{1/2} \exp[\xi_1(x - 2l)] \\ D_2 &= \sigma_0 q_2 \exp(-\xi_1 l), \quad q_2 = (1 + rF^2 + 2r^{1/2} F \cos \varphi_3/2)^{-1} \\ \xi_1 &= C_{\infty 1}^{-1} \omega r^{-1/2} \sin \varphi_3/2, \quad r_1 = 2r^{1/2} F \sin \varphi_3/2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

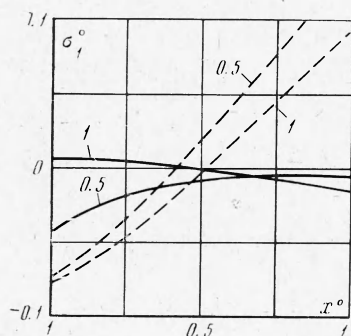
Сдвиг фаз  $(\theta_i \pm \kappa_j)$  в (2.11) вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \lambda_1(x - 2l), \quad \theta_4 = \lambda_1 l + C_{\infty 2}^{-1}(x - l)\omega, \quad \lambda_1 = C_{\infty 1}^{-1} \omega r^{-1/2} \cos \varphi_3/2 \\ \operatorname{tg} \chi_1 &= \lambda_2 \sin \varphi_3/2, \quad \operatorname{tg} \chi_2 = \lambda_3 \sin \varphi_3/2, \quad \lambda_2 = 2r^{1/2} F (rF^2 - 1)^{-1} \\ \operatorname{tg} \varphi_3 &= \omega (a_2 - a_1) (a_1 a_2 + \omega^2)^{-1}, \quad r = [(a_1^2 + \omega^2) (a_2^2 + \omega^2)^{-1}]^{1/2} \\ \lambda_3 &= r^{1/2} F (1 + r^{1/2} F \cos \varphi_3/3)^{-1} \end{aligned}$$

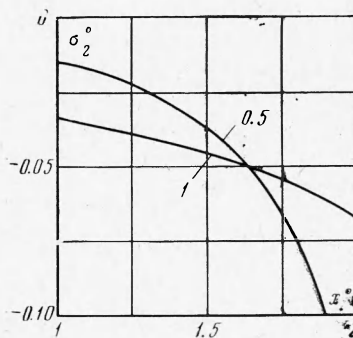
В качестве примера рассмотрено поведение отраженной волны при  $l = 1$  и преломленной волны на участке  $x \in [1; 2]$ . Соответствующие значения времени  $t$  определялись функциями Хевисайда  $H(t_1)$  и  $H(t_2)$ . Вычисления производились на ЭЦВМ. При этом были взяты следующие исходные числовые параметры:

$$a_1 = 0.5, \quad a_2 = 1, \quad l = 1, \quad \omega = 1, \quad E_{\infty 1} = 0.64, \quad E_{\infty 2} = 1, \quad E_{01} = 0.32$$

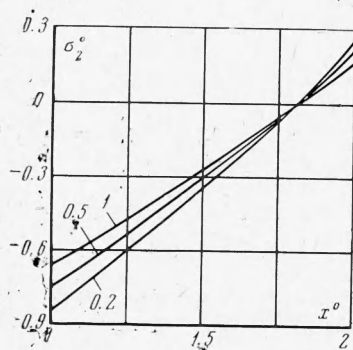
На фиг. 1 в функции  $x^\circ = x(C_{\infty 1} \tau_\epsilon)^{-1}$  ( $t^\circ = t \tau_\epsilon^{-1} = 2.5$ ) приведены величины  $\sigma_1^\circ = \sigma_1 \sigma_0^{-1}$  для стационарной (сплошные линии) и нестационарной (штриховые линии) частей напряжения, вызванного отраженной волной в вязко-упругом участке стержня. Цифрами у кривых указаны значения параметра дробности  $\gamma$ , который существенно влияет на распределение напряжений в зависимости от приведенной длины  $x^\circ$ .



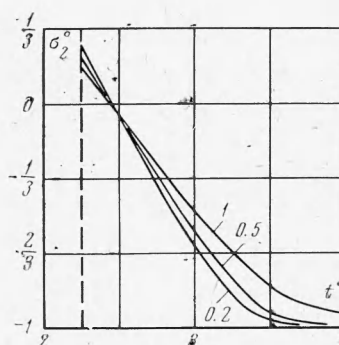
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 2,3 иллюстрируют поведение преломленной волны  $\sigma_2^0 = \sigma_2 \sigma_0^{-1}$  в зависимости от  $x^0$  ( $t^0 = 2.25$ ). Стационарная часть преломленной волны (фиг. 2) имеет одинаковый знак на исследуемой длине стержня, в то время как нестационарная (фиг. 3) меняет его. С уменьшением параметра дробности  $\gamma$  напряжения растут быстрее по абсолютной величине.

Поведение нестационарной части  $\sigma_2^0$  в зависимости от  $t^0$  ( $x^0=2$ ) показано на фиг. 4. Пунктирной линией показан момент прихода волны в точку  $x^0=2$ . Из фиг. 4 видно, что в момент прихода волны скачок напряжений больше для меньших значений параметра  $\gamma$ .

Таким образом, напряжения, возникающие в вязко-упругой части стержня, оказывают существенное влияние на напряжения в упругой части в зависимости от значений параметра дробности  $\gamma$ .

Поступила 25 XI 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ИММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Мешков С. И. Интегральное представление дробно-экспоненциальных функций и их приложение к динамическим задачам линейной вязко-упругости. ПМТФ, 1970, № 1.
3. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. Веггу D. S. A note of stress pulses in visco-elastic rods. Philos. Mag., 1958, vol. 3, No. 25.
5. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М., «Мир», 1965.
6. Иванов В. А. К теории распространения волн напряжений в полубесконечном упруго-вязком стержне. Тр. Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1967, № 278.
7. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964.