35. **Батищев В. А.** Асимптотика осесимметрических течений со свободной границей при исчезающей вязкости.— ПМТФ, 1975, № 3.
36. **Батищев В. А.** Влияние малой вязкости на потенциальное течение жидкости со свободной границей в форме эллипса.— ПМТФ, 1977, № 1.
37. **Puchnachev V. V.** Problems with a free boundary for the Navier-Stokes equations.— In: Lecture notes of Autumn course on mathematical and numerical methods in fluid dynamics. Trieste, 1973, p. 1—34.

УДК 532.51

ВИХРЕВОЙ ИМПУЛЬС ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

1. В трехмерных течениях однородной несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство и покоящейся на бесконечности, истинный импульс

$$\mathbf{I} \equiv \int \mathbf{v} dV$$

существует только тогда, когда поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет условиям [1]

$$r^3 |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| \to 0 \quad \text{при} \quad r \equiv |\mathbf{r}| \to \infty, \tag{1.1}$$

что исключает важные случаи течений, обладающих асимптотикой источников и диполей. Если же (1.1) выполняется, то $\mathbf{I} = 0$.

Действительно,

$$\int v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i v_k) dV = \int x_i v_k dS_k. \tag{1.2}$$

Использовано уравнение неразрывности и правило суммирования по повторяющимся индексам, x_k — декартовы координаты.

Последний интеграл в (1.2) берется по бесконечно удаленной поверхности. В силу (1.1) он равен нулю, так что $\mathbf{I} = 0$. Таким образом, истинный импульс для рассматриваемых течений либо пе существует, либо равен нулю.

По этой причине введен так называемый «вихревой» импульс течения

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}. \tag{1.3}$$

Эта величина определялась [2] только для течений жидкости, заполняющей все пространство. Она обладает следующими свойствами:

а) существует, если $r^4 |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)| \to 0$ при $r \to \infty$, это требование менее ограничительно, чем (1.1), так как накладывает ограничение на поведение поля вихря, а не скорости на бесконечности;

б) обладает размерностью импульса;

в) не зависит от выбора начала координат, так как в рассматриваемом случае $\int \omega dV = 0$;

г) при действии внешних объемных сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ изменяется аналогично физическому импульсу

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)\, dV. \tag{1.4}$$

Определение (1.3) применимо к течениям как идеальной, так и вязкой жидкости.

В [3] предложено обобщение понятия вихревого импульса на случай присутствия в жидкости как-либо двигающихся ограниченных полостей, твердых или деформируемых тел. При этом жидкость остается неограниченной на бесконечности по всем направлениям. Границы жидкости в таких течениях называем внутренними. Главным условием, которому должен удовлетворять вихревой импульс при его обобщении, согласно [3], является выполнение динамического уравнения, аналогичного (1.4).

В то же время большой интерес представляют течения жидкости в присутствии внешних границ. Симметрия этих границ во многих случаях позволяет ожидать наличия интегральных характеристик течения, подобных импульсу. К таким течениям относятся, например, течение жидкости в полупространстве, ограниченном плоской стенкой, и течение в трубе. Можно показать, что истинный импульс течения в полупространстве либо не существует, либо равен нулю. Для течений в трубе $\mathbf{I} = 0$, если жидкость на бесконечно удаленных торцах трубы покоится.

Вопрос об определении понятия импульса в присутствии внешних границ (а в особенности для течения в трубе) приобрел особенную актуальность в связи с предложенной Р. Фейнманом вихревой моделью потери сверхтекучести жидким гелием. В работах по этому вопросу часто предполагается, что вихревое возмущение рождается вблизи стенки капилляра, а условия этого рождения определяются энергией и импульсом вихревого возмущения [4, 5]. Вопрос о возможности различных определений импульса в этом случае поставлен в [6], где высказана также гипотеза о том, что вихревые кольца в сверхтекучей жидкости должны быть полыми. Поэтому важно определить величину импульса для течений, которые имеют как внешние покоящиеся, так и внутренние движущиеся границы. Анализ понятия импульса представляет также самостоятельный интерес для гидродинамики.

В данной работе рассмотрено обобщение понятия вихревого импульса на случай течений жидкости с внешними границами. При этом в жидкости могут присутствовать каверны (полости) и твердые или деформируемые тела, т. е. внутренние границы, не примыкающие к внешним границам.

Основные требования, которым должен удовлетворять определяемый импульс, следующие:

а) существовать для достаточно широкого класса течений и их внешних границ Γ, в частности для течений с границами, уходящими на бесконечность;

б) иметь размерность импульса;

в) удовлетворять динамическому уравнению, представляющему собой обобщение (1.4);

г) при удалении внешних границ от тела и области концентрированной завихренности определяемая величина и соответствующее динамическое уравнение должны переходить в известные выражения для вихревого импульса неограниченной на бесконечности жидкости [2, 3];

д) при рассмотрении движения тела в жидкости без вихрей определяемый импульс должен совпадать с известным присоединенным импульсом;

е) в случае уже упоминавшейся симметрии внешних границ соответствующие компоненты определяемого импульса должны удовлетворять уравнению (1.4) и, в частности, сохраняться при $\mathbf{f} = 0$;

ж) требование независимости определяемой величины от выбора начала координат не налагаем.

Требования «г» и «д» означают, что определяемый импульс должен быть в некотором смысле «локальной» характеристикой течения. «Локальность» обозначает здесь малость влияния на определяемую величину удаленных внешних границ.

Кроме того, в данной работе приводится оценка сохранения определяемой величины для типичной экспериментальной ситуации.

В конце работы указывается на обобщение понятия вихревого момента импульса [7, 3] на рассматриваемые течения, а также на способ обобщения понятия вихревого импульса на случай ограниченных течений идеальной несжимаемой неоднородной (плотность $\rho \neq \mathrm{const}$) жидкости.

2. В работе [3] вихревой импульс определен для ограниченных тел или полостей (внутренние границы) в жидкости

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\left\{\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}\, dV + \int\limits_{\partial K} \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\, dS\right\}. \tag{2.1}$$

Для простоты будем говорить об одном теле, занимающем ограниченную область K. Поверхностный интеграл в (2.1) берется по границе тела ∂K, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂K. Первый интеграл в (2.1) взят по всему объему жидкости. При этом налагаются ограничения на поведение полей $\mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)$ и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\ t)$

$$\text{при } r \equiv |\mathbf{r}| \to \infty \quad r|\mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)| \to 0, \quad r^4|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},\ t)| \to 0, \tag{2.2}$$

что позволяет рассматривать как изменение объема тела K, так и его поступательное движение (асимптотику источников и диполей). Приведенные ограничения не противоречат друг другу, так как поле скорости на больших расстояниях может быть потенциальным.

Естественно рассмотреть прямое обобщение (2.1) на случай присутствия внешних границ Γ, при котором поверхностное интегрирование распространяется и на эти границы:

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{2}\left\{\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}\, dV + \int\limits_{\partial K+\Gamma} \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\, dS\right\}. \tag{2.3}$$

Это определение симметричным образом учитывает внутренние и внешние границы. Относительно него можно сказать, что оно либо тождественно истинному импульсу $\mathbf{I}$, либо не существует.

Действительно, в случаях существования $\mathbf{I}$ и $\mathbf{P}_0$ простым преобразованием можно показать, что $\mathbf{I} = \mathbf{P}_0$. К таким случаям относятся ограниченные течения жидкости, а также случай границ Γ, уходящих в бесконечность, если выполнено (1.1).

Когда же (1.1) не выполнено, то не существуют как $\mathbf{I}$, так и $\mathbf{P}_0$.

Таким образом, определение (2.3) не дает ничего нового по сравнению с истинным импульсом $\mathbf{I}$ и обсуждение свойств $\mathbf{P}_0$ сводится к анализу величины $\mathbf{I}$.

Относительно $\mathbf{I}$ можно сказать, что даже для тех течений, для которых истинный импульс существует, он не удовлетворяет требованиям, перечисленным в п.1, и часто вовсе оказывается бессодержательным.

Так, для течений в ограниченном покоящемся сосуде без тела K из (1.2) имеем $\mathbf{I} = 0$ вне зависимости от размера сосуда и действующих сил. Поэтому $\mathbf{I}$ и $\mathbf{P}_0$ в этом примере не могут удовлетворять динамическому уравнению типа (1.4) и не являются «локальными» характеристиками. В определении (2.3) последнее проявляется в том, что интеграл по Г всегда остается конечным, как бы далеко от тела и области концентрированной завихренности не находились стенки сосуда.

Величина $\mathbf{I}$ не удовлетворяет также требованиям «д» и «е» из п.1.

Перечисленные недостатки величин $\mathbf{I}$ и $\mathbf{P}_0$ связаны с тем, что в них учитывается силовое воздействие внешних границ Г.

Свободным от всех этих недостатков является определение (2.1), если в нем под ∂K понимать только внутренние границы жидкости. Для (2.1) справедливо следующее утверждение.

В трехмерных течениях однородной идеальной несжимаемой жидкости, имеющей любые внешние покоящиеся границы Г, вихревой импульс, определенный, согласно (2.1), где под ∂K понимаются внутренние границы, удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int\limits_{\partial K} p\,\mathbf{n}\,dS + \int \mathbf{f}\,dV - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} [v^2\mathbf{n} + \mathbf{r}\times\mathbf{v}\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{f})]\,dS, \tag{2.4}$$

где $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$; p — давление.

Если границы Г уходят на бесконечность, то на поля $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ налагаются ограничения (2.2), соответствующие условиям существования интегралов в (2.4). На эти поля и на Г и ∂K налагаются также нужные для доказательства условия гладкости. Так, поле $\mathbf{v}$ должно быть дважды непрерывно дифференцируемо. Аналогичные ограничения налагаются на поле $\mathbf{f}$. Внутренние движущиеся границы ∂K предполагаются не примыкающими к внешним покоящимся границам Г.

Уравнение (2.4) весьма просто получается для случая отсутствия в жидкости тела K, при этом интеграл по ∂K в (2.4) исчезает. В присутствии K доказательство (2.4) усложняется, поэтому приведем здесь его основные этапы.

Перепишем (2.1) в тензорной форме

$$2P_i = \int \varepsilon_{ikl}x_k\omega_l dV + \int\limits_{\partial K} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k v_n dS_m,$$

где ε_{ikl} — единичный абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга; dS_i — компонента векторного элемента поверхности, направленного в жидкость. Везде используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Поверхности ∂K и Г, поскольку они ограничивают жидкий объем, состоят все время из одних и тех же жидких частиц, т. е. являются жидкими поверхностями [8].

Используя известные правила дифференцирования по жидким объемам и поверхностям [7], получаем

$$2\frac{dP_i}{dt} = \int \varepsilon_{ikl}\left(v_k\omega_l + x_k\frac{d\omega_l}{dt}\right)dV + \tag{2.5}$$
$$+\int\limits_{\partial K} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\left(v_k v_n + x_k\frac{dv_n}{dt}\right)dS_m - \int\limits_{\partial K} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k v_n\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_m}dS_\alpha.$$

Используя уравнения движения идеальной жидкости в форме

$$\frac{dv_n}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_n} + f_n, \quad \frac{\partial v_a}{\partial x_a} = 0,$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = -\varepsilon_{lmn}\frac{\partial v_a}{\partial x_m}\frac{\partial v_n}{\partial x_a} + \varepsilon_{lmn}\frac{\partial f_n}{\partial x_m},$$

преобразуем (2.5) к виду

$$(2.6) \qquad 2\frac{dP_i}{dt} = 2\int\limits_{\partial K} p\,dS_i - \int\limits_{\Gamma} v^2 dS_i + 2\int f_i dV +$$
$$+\int\limits_{\Gamma}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k v_n \frac{\partial v_a}{\partial x_m}dS_a - \int\limits_{\Gamma}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k f_n dS_m.$$

Дальнейшая задача состоит в преобразовании интеграла

$$(2.7) \qquad \int\limits_{\Gamma}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k v_n \frac{\partial v_a}{\partial x_m}dS_a.$$

Для этого используем следующий прием. Продолжим поле $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ произвольным достаточно гладким образом на K, после чего появляется возможность преобразовывать интегралы по Γ к объемным интегралам по всей области, ограниченной внешними границами. При этом, вообще говоря, $\omega = \operatorname{rot}\mathbf{v} \neq 0$, $Q = \operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0$ на K. Преобразовывая (2.7) с использованием тождества

$$(2.8) \qquad \varepsilon_{lmn}\frac{\partial v_k}{\partial x_m}\frac{\partial v_n}{\partial x_k} = -\omega_m\frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \omega_l Q,$$

получаем

$$\int\limits_{\Gamma}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}x_k v_n \frac{\partial v_a}{\partial x_m}dS_a = -\int\limits_{\Gamma}\varepsilon_{ikl}x_k v_l \omega_m n_m dS,$$

после чего из (2.6) получаем (2.4). Тождество (2.8) получается при помощи применения операции rot к векторному равенству

$$v_a\frac{\partial v_n}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \varepsilon_{npq}v_p\omega_q.$$

Приведенное доказательство соотношения (2.4) во многом аналогично доказательству, приведенному в [3].

Если введем импульс $\mathbf{P}_1$ тела K, то для суммы $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}$ будем иметь

$$(2.9) \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}) = \mathbf{F} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\{v^2\mathbf{n} + \mathbf{r}\times\mathbf{v}(\omega\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{r}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{f})\}\,dS,$$

где $\mathbf{F}$ — суммарная внешняя сила, действующая на тело K и жидкость.

Главным отличием (2.4), (2.9) от соответствующих уравнений для истинного импульса является отсутствие в первых члена $\int\limits_{\Gamma} p\mathbf{n}\,dS$, выражающего силовое воздействие внешних границ на жидкость. Вместо него входит довольно сложный интеграл по Γ, удовлетворяющий сформулированному в п. 1 требованию: при удалении границ Γ от тела K и района концентрированных ω и $\mathbf{f}$ этот интеграл стремится к нулю, так что (2.4), (2.9) сводятся к уравнениям для безграничной жидкости [3]

$$\frac{dP_i}{dt} = \int\limits_{\partial K} pn_i dS + \int f_i dV, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}) = \mathbf{F}. \tag{2.10}$$

3. Если $\mathbf{f} \times \mathbf{n} = 0$ и $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ на Г, то уравнения (2.4), (2.9) существенно упрощаются

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int\limits_{\partial K} p\mathbf{n}dS + \int \mathbf{f}dV - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} v^2\mathbf{n}dS, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}) = \mathbf{F} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} v^2\mathbf{n}dS.$$

Видно, что для течения над плоскостью уравнения (3.1) для параллельных плоскости компонент импульса совпадают с (2.10) в соответствии с требованием для симметричных внешних границ, сформулированным в п. 1. То же можно сказать про осевую составляющую импульса в трубе и про касательную к плоскостям составляющую $\mathbf{P}$ в щели между плоскостями.

Более сложным является случай с $\omega \cdot \mathbf{n} \neq 0$ на Г. Он является особенно важным в связи с моделями потери сверхтекучести гелием [5]. В этом случае вихревые линии уже не замыкаются вне Г и величина $\mathbf{P}$ (2.1) оказывается зависящей от выбора начала координат.

Рассмотрим для простоты течение без тела K. Тогда при сдвиге начала координат на вектор $\mathbf{R}$ вихревой импульс изменяется на величину

$$\frac{1}{2}\mathbf{R} \times \int \omega dV. \tag{3.2}$$

В случае постоянства (3.2) эта величина несущественна для динамического рассмотрения. Однако это в общем случае не так, поскольку

$$\frac{d}{dt}\int \omega dV = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{v}(\omega \cdot \mathbf{n})\, dS \neq 0. \tag{3.3}$$

Доказательства утверждения (3.3) в общем виде не существует. Более того, можно построить примеры, в которых (3.3) не выполняется. Физическим механизмом, обусловливающим несохранение $\int \omega dV$, является растяжение и сжатие вихревых линий, поэтому (3.3) справедливо для общих трехмерных потоков. Построение подтверждающих примеров для границ Г общего вида не вызывает затруднений. Для доказательства (3.3) в случае течения над плоскостью рассмотрим следующий пример. Суть его заключается в построении течения, для которого сохранение величины $\int \omega dV$ несовместимо с доказанным ранее законом сохранения вихревого импульса (2.1).

Над плоскостью движутся два соосных вихревых полукольца с тонкими ядрами, так что концы этих полуколец упираются в плоскость Г перпендикулярно к ней. При дополнении этого течения до течения во всем пространстве методом построения «отражения» получаем задачу о взаимодействии двух соосных тонких вихревых колец.

Рассмотренный закон сохранения вихревого импульса принимает в этом случае вид

$$\frac{d}{dt}\left\{l_1^2\Gamma_1\left[1+O\left(\frac{a_1}{l_1}\right)\right]+l_2^2\Gamma_2\left[1+O\left(\frac{a_2}{l_2}\right)\right]\right\}=0,$$

где l_α, Γ_α, a_α — радиус, циркуляция и радиус сечения ядра α-го полукольца, $a_\alpha/l_\alpha \ll 1$ ($\alpha = 1, 2$).

Этот закон несовместим с постоянством $\int \boldsymbol{\omega} dV$, которое записывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left\{l_1\Gamma_1\left[1+O\left(\frac{a_1}{l_1}\right)\right]+l_2\Gamma_2\left[1+O\left(\frac{a_2}{l_2}\right)\right]\right\}=0.$$

Для доказательства этого утверждения необходимо привлечь закон сохранения объема ядер (по α не суммируется)

$$\frac{d}{dt}\left\{a_\alpha^2 l_\alpha\left[1+O\left(\frac{a_\alpha}{l_\alpha}\right)\right]\right\}=0 \quad (\alpha=1,\ 2),$$

а также тот факт, что a_α/l_α могут быть выбраны по нашему произволу меньше любого наперед заданного числа.

Таким образом, в силу (3.3) правая часть (2.4) для случая течения над плоскостью имеет ненулевые касательные составляющие, если начало координат выбрано не на плоскости. Если же начало координат выбрано на Γ и $\mathbf{n} \times \mathbf{f} = 0$ на Γ, то опять имеем для касательных к Γ компонент $\mathbf{P}$ уравнение (2.10). Это следует из $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \| \mathbf{n}$ на Γ.

Для течения в щели между параллельными плоскостями с $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на Γ получение (2.10) для касательных к плоскостям составляющих возможно только в специальных случаях. К ним относятся плоские течения и течения, в которых все вихревые линии могут оканчиваться только на одной из плоскостей. В последнем случае получение (2.10) достигается выбором начала координат на той плоскости, к которой примыкают вихревые линии.

Для течения в трубе существование таких специальных случаев также возможно. Однако ясно, что для трубы и щели такие случаи являются исключительными, хотя их классификация — трудная задача.

Следует отметить, что течения с $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на Γ представляют собой течения с особенностью на границе. Так, для течения над плоскостью известный метод дополнения течения до течения во всем пространстве путем построения «отражения» приводит к изломам $\boldsymbol{\omega}$ на Γ. Последние, как известно, связаны с особенностями поля скоростей [7]. Поэтому для того, чтобы приведенное доказательство (2.4) было строго при $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на Γ, надо либо доказать необходимую дифференцируемость поля скоростей, либо наложить условие $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0$ на Γ, которое для течений над плоскостью и в щели является динамическим. Это означает, что из его выполнения при $t = 0$ следует его справедливость при всех t, что сразу видно после построения «отражения». Правда, тут, как и во всей работе, используется предположение о сохранении необходимой гладкости течения со временем. Этот вопрос является сложным и нерешенным [9].

Полученные результаты для течений в трубе, щели и полупространстве можно резюмировать следующим образом:

а) для всех этих течений достаточным условием того, чтобы соответствующие компоненты вихревого импульса изменялись аналогично истинному импульсу (1.4), (2.10), является требование $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} = 0$ на Γ, которое, очевидно, динамическое;

б) при $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n} \neq 0$ на Γ тот же результат может быть получен для течения над плоскостью выбором начала координат на ней;

в) для течений в щели и трубе уравнения (2.10) для параллельных к стенкам составляющих вихревого импульса можно получить только для течений специального вида. Вообще говоря, для импульса (2.1) этого сделать невозможно.

4. Рассмотрим теперь случай, когда границы удалены от тела K и района концентрации ω, $\mathbf{f} = 0$. Это соответствует часто встречающимся экспериментальным ситуациям, например движению вихревого кольца в комнате. В этом случае (3.1) дает возможность оценить точность сохранения вихревого импульса. Эта оценка является одновременно проверкой обычного способа описания вихревого импульса реальных ограниченных течений с помощью модели неограниченной на бесконечности жидкости.

Используя выражение для главного члена асимптотики поля скорости неограниченных течений несжимаемой жидкости [7]

$$v_i \approx \frac{P_k}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{при } r \to \infty$$

и уравнение (3.1), получаем оценку

$$\left| \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right| \approx \frac{A}{8\pi} \frac{|\mathbf{P}|^2}{R^4},$$

где R — характерное расстояние до внешних стенок Г;

A — постоянная порядка единицы, зависящая от геометрии стенок Г.

Для вихревого кольца в сосуде получаем оценку изменения импульса за счет влияния внешних стенок

$$\frac{|\Delta \mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|} \approx \frac{A}{8\pi} \frac{Ut}{R} \left(\frac{l}{R} \right)^3,$$

где U и l — скорость и размер кольца. Для $l/R \sim 0{,}1$ и $R \sim Ut$ получаем $|\Delta \mathbf{P}|/|\mathbf{P}| \sim 10^{-4}$, т. е. сохранение вихревого импульса с большой точностью.

5. Согласно предложенному в этой работе способу обобщения понятия вихревого импульса и идеям работы [3], вихревой импульс может быть введен также для ограниченных течений идеальной несжимаемой неоднородной (плотность $\rho \neq \text{const}$) жидкости.

Аналогичные рассмотренным методы позволяют также ввести понятие вихревого момента импульса [7, 3] ограниченных течений. Так, уравнение типа (2.4) можно получить для величины

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} \left\{ \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \omega)\, dV + \int_{\partial K} \mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v})]\, dS \right\}.$$

Это определение тоже обобщается на случай течений неоднородной несжимаемой жидкости.

Распространение результатов этой работы на случай течений вязкой жидкости, ограниченной внешними покоящимися стенками, также возможно, хотя тут возникают затруднения с завихренностью, диффундирующей от этих стенок. Получение уравнений типа (2.10) для течений в щели, трубе и полупространстве возможно, если предполагать эту завихренность локализованной вблизи стенок Г и не включать ее в определение импульса (2.1), так как иначе интегралы в (2.1) могут не существовать.

Относительно применения понятия вихревого импульса (1.3) к получению критерия потери сверхтекучести жидким гелием можно сказать следующее. Для получения критерия потери сверхтекучести в работе [10] использовалось понятие истинного импульса, который для течения в капилляре или вблизи выхода из него никак не совпадает с вихревым импульсом. Поэтому использование в этом случае вихревого импульса представляет собой гипотезу, основанную на соображениях размерности, но не более. Положение усугубляется тем, что для случая $\omega \cdot \mathbf{n} \neq 0$ на Γ вихревой импульс, согласно результатам п. 3, не имеет физического смысла.

Из всего этого следует, что само применение понятия вихревого импульса к задаче потери сверхтекучести требует критического анализа и, возможно, пересмотра.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за постановку рассмотренных здесь вопросов.

Поступила 16 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М., «Наука», 1969.
2. **Ламб Г.** Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
3. **Владимиров В. А.** О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 6.
4. **Фейнман Р.** Статистическая механика. М., «Мир», 1975.
5. **Тилли Д. Р., Тилли Дж.** Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М., «Мир», 1977.
6. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** Об импульсе кольцевого вихря, движущегося в трубе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
7. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
8. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
9. **Юдович В. И.** О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
10. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. М., «Наука», 1964.

УДК 532.5

ВИНТОВЫЕ ПОТОКИ В ШАРЕ

В. М. Быков

(Челябинск)

Пусть Ω — область в R^3, содержащая начало координат и ограниченная гладкой поверхностью S с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$. Однородным винтовым потоком называется векторное поле $\mathbf{v}$, гладкое класса C^1 в Ω и непрерывное в $\overline{\Omega}$, для которого

(1) $$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v};$$

(2) $$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_S = 0$$

($\lambda = \mathrm{const} \neq 0$). Из уравнения (1) получаем $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, поэтому