

УДК 539.376+539.4

ПОЛЗУЧЕСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В ИХ МАТЕРИАЛЕ

И. А. Банщикова, А. Ф. Никитенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mails: binna@ngs.ru, naf@hydro.nsc.ru

С использованием кинетической теории ползучести Работнова выполнен расчет напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений в материале кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Показано, что решение задачи можно свести к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести материала. Для получения решения задачи неустановившейся ползучести известное решение задачи установившейся ползучести умножается на некоторые функции координат и времени, для определения которых выписана соответствующая система уравнений.

Ключевые слова: ползучесть, параметр повреждаемости, время начала разрушения, осесимметрично нагруженные пластины.

Методы расчета напряженно-деформированного состояния равномерно нагретых круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин в предположении установившейся ползучести их материала широко известны [1–3]. Ниже выполнены аналогичные расчеты с использованием кинетической теории Работнова, описывающей все три стадии ползучести материала с учетом накопления повреждений в нем с феноменологических позиций. Эта модель описывается соотношениями [2, 4]

$$\eta_{kl} = \frac{W}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \sigma_{\varepsilon}}{\partial \sigma_{kl}}, \quad W = \frac{B_1 \sigma_{\varepsilon}^{n+1}}{\phi(\mu)}, \quad \phi(\mu) = \mu^m (1 - \mu)^{\alpha/(\alpha+1)}, \quad (1)$$

$$k = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3;$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{(\alpha + 1)B_2 \sigma_{* \varepsilon}^{g+1}}{\mu^m}, \quad \mu(x_k, 0) = 1, \quad \mu(x_k^*, t_*) = 0, \quad (2)$$

где η_{kl} , σ_{kl} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений; $W = \eta_{kl} \sigma_{kl}$ — мощность диссипируемой энергии; σ_{ε} , $\sigma_{* \varepsilon}$ — однородные относительно напряжений функции первой степени (в качестве эквивалентного напряжения σ_{ε} можно принять интенсивность напряжений σ_i , если использовать критерий Мизеса, либо максимальное касательное напряжение, если использовать критерий Треска, и т. д.; в качестве эквивалентного напряжения $\sigma_{* \varepsilon}$ можно принять интенсивность напряжений σ_i , если использовать критерий длительной прочности Каца, либо максимальное нормальное напряжение, если использовать критерий длительной прочности Джонсона, и т. д.). Параметр μ описывает с феноменологических позиций накопление повреждений в материале. Для неповрежденного материала во всех точках тела (элемента конструкции) с координатами x_k

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00673) и Международного научного фонда INTAS (грант № 03-51-6046).

($k = 1, 2, 3$) параметр μ равен единице. Если в момент времени $t = t_*$ в какой-либо точке с координатами x_k^* параметр μ достигает критического значения, равного нулю, то будем считать, что в этой точке тела произошло разрушение. Время $t = t_*$ называется временем начала разрушения тела. Выведем основные уравнения, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин и накопленные повреждения в их материале.

1. Предположим, что в пластине реализуется плоское напряженное состояние, касательным напряжением в кольцевом сечении пластины будем пренебрегать. В качестве σ_φ и σ_{*z} выберем интенсивность напряжений σ_i . Окружное напряжение σ_{11} обозначим через σ_φ , радиальное σ_{22} — через σ_r . Напряжение $\sigma_{33} = \sigma_z = 0$. Тогда при сделанных выше предположениях система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \eta_\varphi &= \frac{B_1}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (2\sigma_\varphi - \sigma_r), & \eta_r &= \frac{B_1}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (2\sigma_r - \sigma_\varphi), \\ \eta_z &= -\frac{B_1}{2\phi(\mu)} \sigma_i^{n-1} (\sigma_\varphi + \sigma_r), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi + \sigma_r^2}. \quad (4)$$

Согласно (1) $W = B_1 \sigma_i^{n+1} / \phi(\mu)$, в то же время $W = \sigma_i \eta_i$. Отсюда для интенсивности скоростей деформаций ползучести получаем

$$\eta_i = B_1 \sigma_i^n / \phi(\mu). \quad (5)$$

С учетом несжимаемости материала η_i выражается через компоненты тензора скоростей деформаций ползучести:

$$\eta_i = (2/\sqrt{3}) \sqrt{\eta_\varphi^2 + \eta_\varphi \eta_r + \eta_r^2}. \quad (6)$$

Из (3) можно выразить σ_φ , σ_r через η_φ , η_r . С учетом (5) получаем

$$\sigma_\varphi = \frac{4}{3} \frac{\eta_i^{(1-n)/n}}{B_1^{1/n}} \left(\eta_\varphi + \frac{1}{2} \eta_r \right) [\phi(\mu)]^{1/n}, \quad \sigma_r = \frac{4}{3} \frac{\eta_i^{(1-n)/n}}{B_1^{1/n}} \left(\eta_r + \frac{1}{2} \eta_\varphi \right) [\phi(\mu)]^{1/n}. \quad (7)$$

Прогиб пластины толщиной h , изгибаемой осесимметричной нагрузкой, обозначим через w , угол поворота нормали пластины — через ν . Тогда $dw/dr = -\nu$. Если ψ есть скорость поворота нормали, т. е. $\dot{\nu} = \psi$, то $d\dot{w}/dr = -\psi$ (\dot{w} — скорость прогиба срединной плоскости пластины). Прогибы пластины будем считать малыми по сравнению с ее толщиной и примем гипотезы Кирхгофа — Лява, что соответствует состоянию чистого изгиба. Тогда, если u — перемещение любой точки пластины в радиальном направлении, то $u(r) = z\nu(r)$. Учитывая, что при осесимметричной деформации $\eta_r = d\dot{u}/dr$, $\eta_\varphi = \dot{u}/r$, получаем

$$\eta_r = z \frac{d\psi}{dr} = -z \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}, \quad \eta_\varphi = z \frac{\psi}{r} = -z \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr}. \quad (8)$$

Интенсивность скорости деформаций ползучести (6) с учетом (8) записывается в виде

$$\eta_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\psi}{r}\right)^2 + \frac{\psi}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \varkappa |z|. \quad (9)$$

Используя (8) и (9), компоненты напряжений (7) представим в следующем виде:

$$\sigma_\varphi = [\phi(\mu)]^{1/n} a \varkappa^{(1-n)/n} \alpha_\varphi |z|^{(1-n)/n} z, \quad \sigma_r = [\phi(\mu)]^{1/n} a \varkappa^{(1-n)/n} \alpha_r |z|^{(1-n)/n} z. \quad (10)$$

Здесь

$$a = \frac{(2/\sqrt{3})^{(n+1)/n}}{(B_1)^{1/n}}, \quad \alpha_\varphi = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r}, \quad \alpha_r = \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{2} \frac{\psi}{r}, \quad \psi = \psi(r, t). \quad (11)$$

Подставив (10) в (4), получим

$$\sigma_i = (\sqrt{3}/2)[\phi(\mu)]^{1/n} a z^{1/n} |z|^{1/n}. \quad (12)$$

Интенсивности окружного и радиального изгибающих моментов в радиальном и кольцевом сечениях пластины связаны с окружным и радиальным напряжениями известными соотношениями [1–3]

$$M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z dz, \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz.$$

Соотношения (10) можно привести к виду [1, 2]

$$\sigma_\varphi = [\phi(\mu)]^{1/n} (a/D) |z|^{(1-n)/n} z M_\varphi = l M_\varphi, \quad \sigma_r = [\phi(\mu)]^{1/n} (a/D) |z|^{(1-n)/n} z M_r = l M_r, \quad (13)$$

где

$$D(r, t) = 2a \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz. \quad (14)$$

Уравнения равновесия имеют вид [1–3]

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q, \quad \frac{d}{dr} (Qr) = -pr. \quad (15)$$

Здесь Q — интенсивность поперечной силы в кольцевом сечении пластины; p — интенсивность внешней равномерно распределенной нагрузки; граничные условия для $M_r(r)$ на внутреннем и внешнем радиусах считаются заданными.

Используя (4) и (13), в соотношениях (1) компоненты скорости деформаций ползучести выразим через интенсивности изгибающих моментов:

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_\varphi}, \quad \eta_r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_r}. \quad (16)$$

Здесь $M_i = \sqrt{M_\varphi^2 - M_\varphi M_r + M_r^2}$; $\sigma_i = l M_i$.

Система уравнений (2)–(16) позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных круглых и кольцевых пластин в любой момент времени вплоть до начала разрушения.

2. Решение ряда практических задач с использованием критерия Мизеса ($\sigma_\varepsilon = \sigma_i$) вызывает затруднения и в общем случае возможно только численными методами, например методом конечных элементов. Для упрощения соответствующих вычислений квадратичный критерий Мизеса можно линеаризовать. При постоянной величине M_i графиком зависимости между интенсивностями изгибающих моментов M_r и M_φ является эллипс, главные оси которого наклонены к осям координат под углом, равным 45° , и который отсекает на этих осях отрезки, равные M_i (рис. 1). Этот эллипс может быть заменен шестиугольником $ABCDEF$. Тогда величина M_i может быть приближенно выражена через интенсивности M_r и M_φ [1, 2], что эквивалентно линеаризации критерия Мизеса и переходу к критерию Треска в определяющих уравнениях (1) и соответственно в (16). Например,

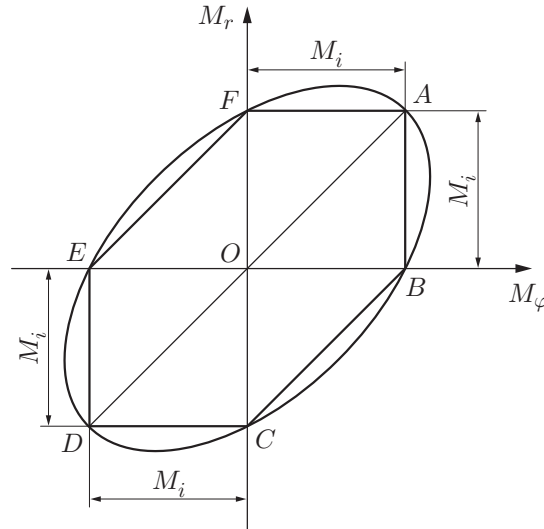


Рис. 1. Зависимость между интенсивностями изгибающих моментов M_r и M_φ

при $M_\varphi > M_r > 0$ точка (M_φ, M_r) принадлежит области AOB и $M_i = M_\varphi$; при $M_\varphi > 0, M_r < 0$ точка (M_φ, M_r) принадлежит области BOC и $M_i = M_\varphi - M_r$ и т. д.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $M_i = M_\varphi - M_r$. Согласно (16)

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n, \quad \eta_r = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $\eta_\varphi + \eta_r = 0$ или с учетом (8)

$$\psi(r, t) = C(t)/r, \tag{18}$$

где $C(t)$ — константа интегрирования. В дальнейшем целесообразно вместо $C(t)$ рассматривать функцию $X(t)$, введенную соотношением

$$[C(t)]^{1/n} = (C^0)^{1/n} [X(t)]^{-1} = \frac{B_1^{1/n}}{JJ_1} [M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)] [X(t)]^{-1}. \tag{19}$$

Здесь

$$J = 2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz, \quad J_1 = \int_a^b r^{-1-2/n} dr,$$

$M_r(a), M_r(b)$ — значения $M_r(r)$ на внутреннем ($r = a$) и внешнем ($r = b$) радиусах пластины. Далее, пусть $\bar{Q}(r) = \int_a^r Q(\zeta) d\zeta$, тогда $\bar{Q}(b) = \int_a^b Q(\zeta) d\zeta$. В этом случае (18) с учетом (19) принимает вид

$$\psi(r, t) = (C^0/r) [X(t)]^{-n} = \psi^0 [X(t)]^{-n}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что переход от $C(t)$ к $X(t)$ выполнен на основании гипотезы о том, что поле $\psi(r, t)$ подобно некоторому стационарному полю $\psi^0(r)$. Более того, константа C^0 в (19) выбрана так, что поле ψ^0 совпадает с аналогичным, следующим из решения рассматриваемой задачи в предположении установившейся ползучести материала. Поэтому оно считается известным и является кинематически возможным [1–3].

С использованием (18) из (8) находим скорости деформаций ползучести. Сопоставляя их с (17), получаем

$$M_\varphi - M_r = (\sqrt{3}/2)^{(n+1)/n} (C^0)^{1/n} D(r, t) r^{-2/n} [X(t)]^{-1}. \quad (21)$$

Значения $M_r(r)$ на внутреннем и внешнем радиусах пластины считаем заданными. Тогда из первого уравнения равновесия с использованием (21) находим

$$M_r(r, t) = M_r(a) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)/n} (C^0)^{1/n} [X(t)]^{-1} \int_a^r D(\zeta, t) \zeta^{-1-2/n} d\zeta + \bar{Q}(r). \quad (22)$$

Из (22) с учетом граничного условия при $r = b$ и (19) получаем

$$\int_a^b D(r, t) r^{-1-2/n} dr = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)/n} \frac{JJ_1}{B_1^{1/n}} X(t).$$

С учетом выражений (14) для $D(r, t)$ и (11) для a окончательно получаем

$$\int_a^b \left(2 \int_0^{h/2} [\phi(\mu)]^{1/n} z^{(n+1)/n} dz\right) r^{-1-2/n} dr = JJ_1 X(t). \quad (23)$$

В дальнейшем потребуется выражение $\sigma_i = lM_i$, где l вычисляется согласно (13), а M_i — согласно (21). С учетом выражения (19) для $(C^0)^{1/n}$ получаем

$$lM_i = \frac{[\phi(\mu)]^{1/n}}{X(t)} \frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{JJ_1} r^{-2/n} |z|^{(1-n)/n} z. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение функцию $t^0(r, z)$:

$$t^0 = [(\alpha + 1)(m + 1)B_2(\sigma_i^0)^{g+1}]^{-1}, \quad (25)$$

где верхний индекс 0 при соответствующей функции означает, что она зависит только от координат точек тела. Иными словами, σ_i^0 есть выражение интенсивности напряжений в аналогичной задаче в предположении установившейся ползучести материала, и $\sigma_i^0 = l^0 M_i^0$ [1]. С учетом выражений

$$l^0 = \frac{|z|^{(1-n)/n}}{J}, \quad M_i^0 = \frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{JJ_1} r^{-2/n}$$

получаем

$$l^0 M_i^0 = \frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{JJ_1} r^{-2/n} |z|^{(1-n)/n} z. \quad (26)$$

С учетом (26) выражение (24) записывается в виде

$$lM_i = l^0 M_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t). \quad (27)$$

В качестве критерия длительной прочности выберем критерий Каца. В этом случае $\sigma_{*g} = \sigma_i$. Подставляя в уравнение (2) выражение (27) с учетом выражения (1) для функции $\phi(\mu)$ и выражения (25), получаем

$$\int_1^\mu \Psi(z) dz = -[(m + 1)t^0]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau, \quad (28)$$

где $\Psi(z) = z^{m(n-g-1)/n} (1 - z)^{-\alpha(g+1)/(n(\alpha+1))}$.

Уравнения (23), (28) есть система уравнений для определения функции времени $X(t)$ и параметра повреждаемости $\mu(r, z, t)$, зная которые можно рассчитать напряженно-деформированное состояние пластины в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Действительно, из (20) получаем зависимость $\psi(r, t) = \psi^0 [X(t)]^{-n}$, с использованием которой из (8) находим поле скоростей деформаций ползучести $\eta_\varphi(r, z, t)$, $\eta_r(r, z, t)$, скорость прогиба срединной плоскости и сам прогиб $w(r, t)$ при известных условиях закрепления пластины, а из (9) — интенсивность скоростей деформации ползучести $\eta_i(r, z, t)$. Из (14) вычисляем $D(r, t)$, тем самым с использованием (11) и (19) из (21) находим интенсивность изгибающих моментов

$$M_i = M_\varphi - M_r = \frac{M_i^0}{aJ} \frac{D(r, t)}{X(t)}, \quad (29)$$

а из (22) — интенсивность радиального изгибающего момента $M_r(r, t)$ на единицу длины кольцевого сечения пластины. Из (22) и (29) получаем $M_\varphi(r, t) = M_r(r, t) + M_i(r, t)$. По известным величинам M_i , M_φ , M_r из (27) находим интенсивность напряжений $\sigma_i(r, z, t) = \sigma_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t)$, а из (13) — компоненты напряжений $\sigma_\varphi(r, z, t)$ и $\sigma_r(r, z, t)$.

Время начала разрушения определяем из условия $\mu(r^*, z^*, t_*) = 0$. Очевидно, что по известной функции μ можно найти не только t_* , но и координаты r^* , z^* точки, в которой μ впервые обращается в нуль.

Следует отметить, что интеграл в левой части (28) в зависимости от характеристик материала может представлять собой несобственный интеграл от неограниченной функции при $\mu = 1$ (нижний предел интегрирования) и $\mu = 0$ (верхний предел интегрирования). Для сходимости интеграла на характеристики материала необходимо наложить ограничения, которые не являются жесткими и согласуются с имеющимися экспериментальными данными [5].

Остановимся на некоторых принципиальных вопросах, связанных с решением системы уравнений (23), (28). Очевидно, что в общем случае эта система допускает только численное решение. Поэтому целесообразно рассмотреть варианты, когда в (28) $\alpha \neq 0$, $m = 0$, что характерно для упрочняющихся в процессе ползучести материалов [2, 4], или $\alpha = 0$, $m \neq 0$, что характерно для многих конструкционных сплавов [2, 4]. Легко показать, что при $\alpha \neq 0$, $m = 0$ система уравнений (23), (28) имеет аналитическое решение. В случае $\alpha = 0$, $m \neq 0$ из (28) получаем

$$\mu^{m/n} = \left(1 - \frac{\nu}{t^0} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right)^\beta, \quad (30)$$

где

$$\beta = \frac{m}{n + m(n - g - 1)}, \quad \nu = \frac{n + m(n - g - 1)}{n(m + 1)}. \quad (31)$$

Согласно (1) $\phi(\mu) = \mu^m$ при $\alpha = 0$, $m \neq 0$, поэтому $\phi(\mu)^{1/n} = \mu^{m/n}$. Подставим (30) в (23):

$$\int_a^b \left[2 \int_0^{h/2} \left(1 - \frac{\nu}{t^0} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right)^\beta z^{(n+1)/n} dz \right] r^{-1-2/n} dr = J J_1 X(t). \quad (32)$$

Практический интерес представляет случай $\beta = 1$. При $\beta = 1$ уравнение (32) принимает вид

$$1 - \frac{\nu}{t^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau = X(t)$$

и имеет решение

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+2)}, \quad (33)$$

где величина \bar{t}^0 получена с использованием теоремы о среднем

$$\int_a^b \left(2 \int_0^{h/2} [z^{(n+1)/n}/t^0(r, z)] dz \right) r^{-1-2/n} dr = \frac{JJ_1}{\bar{t}^0}, \quad \bar{t}^0 = t^0(\bar{r}, \bar{z}),$$

\bar{r} , \bar{z} — координаты “средней” точки при $a \leq r \leq b$, $0 \leq z \leq h/2$. Подставляя (33) в (30), находим

$$[\mu(r, z, t)]^{m/n} = \left\{ 1 - \frac{t^0(\bar{r}, \bar{z})}{t^0(r, z)} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0} \right)^{1/(g+2)} \right] \right\}. \quad (34)$$

Из условия $\mu(r^*, z^*, t_*)$ с использованием (34) получаем

$$t_* = \bar{t}^0 [1 - (1 - t_*^0/\bar{t}^0)^{g+2}]. \quad (35)$$

Здесь $t_*^0 = t^0(r^*, z^*)$ — время начала разрушения, соответствующее решению рассматриваемой задачи в предположении установившейся ползучести материала. При $\beta \neq 1$ решение уравнения (32) можно получить численно любым из известных методов.

3. Прежде чем перейти к анализу полученного решения, характеризующего напряженно-деформированное состояние пластины в любой момент времени вплоть до начала ее разрушения, запишем систему уравнений (23), (28) в ином виде, что позволит сделать вывод о применимости методики, предложенной в пп. **1**, **2**, для расчета напряженно-деформированного состояния других элементов конструкций (трубы под действием внутреннего давления, балки в условиях изгиба и т. д.). Очевидно, что уравнение (28), полученное на основе уравнения (2), справедливо для любой конструкции. Рассмотрим уравнение (23). Прежде всего вычислим мощность диссипируемой энергии пластины $W^0 = \eta_{ij}^0 \sigma_{ij}^0$ в предположении установившейся ползучести ее материала. Известно, что $\eta_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = \eta_i^0 \sigma_i^0 = B_1 (\sigma_i^0)^n \sigma_i^0$ [2]. Учитывая, что $\sigma_i^0 = l^0 M_i^0$, на основании (26) получаем

$$W^0 = B_1 \left(\frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{JJ_1} \right)^{n+1} z^{(n+1)/n} r^{-2(n+1)/n}.$$

Мощность диссипируемой энергии всей пластины есть

$$\int_V W^0 dV = A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \left(2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz \right) r^{-1-2/n} dr = 2\pi A J J_1. \quad (36)$$

Здесь коэффициент $A = B_1 [(M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b))/(JJ_1)]^{n+1}$. Уравнение (23) с использованием (36) записывается в виде

$$\int_V W^0 [\phi(\mu)]^{1/n} dV = X(t) \int_V W^0 dV. \quad (37)$$

Очевидно, что уравнение (37) выполняется не только для пластины, нагруженной изгибающим моментом или давлением, но и для других элементов конструкций с различными условиями нагружения и закрепления, при этом W^0 — мощность диссипируемой энергии рассматриваемого элемента конструкции, а V — его объем.

Проведем анализ полученного решения. Как отмечено выше, поле и интенсивность скоростей деформации ползучести находятся из (8), (9) с использованием (18) и (19):

$\eta_\varphi(r, z, t) = \eta_\varphi^0 [X(t)]^{-n}$, $\eta_r(r, z, t) = \eta_r^0 [X(t)]^{-n}$, $\eta_i(r, z, t) = \eta_i^0 [X(t)]^{-n}$, где $\eta_\varphi^0 = z\psi^0/r$; $\eta_r^0 = z d\psi^0/dr$. Из (19) для константы C^0 и выражения $\psi^0 = C^0/r$ следует, что величины η_φ^0 , η_r^0 , η_i^0 совпадают с теми же величинами, вычисленными в задаче установившейся ползучести [1–3]. Поэтому величины η_φ^0 , η_r^0 , η_i^0 считаем известными, причем они являются кинематически возможными. Данному полю скоростей деформаций ползучести соответствует поле напряжений, с которым оно связано законом установившейся ползучести. Указанное поле напряжений может не удовлетворять уравнениям равновесия. В данном случае таким полем напряжений является поле, определяемое соотношениями (10), которые с использованием (11), (18), (19) можно представить в виде

$$\sigma_\varphi(r, z, t) = \sigma_\varphi^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \quad \sigma_r(r, z, t) = \sigma_r^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t). \quad (38)$$

Здесь σ_φ^0 , σ_r^0 — компоненты напряжений, соответствующие решению задачи установившейся ползучести [1–3]; следовательно, они являются статически допустимыми.

Компоненты напряжений в (38) не являются статически допустимыми, так как не удовлетворяют уравнениям равновесия. Статически допустимыми являются напряжения σ_φ , σ_r , определяемые соотношениями (13), где M_φ и M_r удовлетворяют уравнениям равновесия (15) (M_r находится из (22), а M_φ — из (21) с использованием (22)). Учитывая, что $\sigma_i = lM_i$, из (24) с использованием (26) получаем

$$\sigma_i(r, z, t) = \sigma_i^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t), \quad (39)$$

где σ_i^0 — интенсивность напряжений в задаче установившейся ползучести.

Отметим, что если (38) подставить в выражение для интенсивности напряжений (4), то получим соотношение (39). Отсюда следует, что поле (38) можно сделать статически допустимым. Положим

$$\sigma_\varphi(r, z, t) = \sigma_\varphi^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + C, \quad \sigma_r(r, z, t) = \sigma_r^0 [\phi(\mu)]^{1/n} / X(t) + C. \quad (40)$$

Гидростатическая составляющая C вычисляется из условия удовлетворения компонент напряжений (40) уравнениям равновесия. Получить уравнение для величины C легко, поэтому оно здесь не приводится.

На основе изложенного выше можно сделать следующий вывод. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии кольцевых и круглых пластин с учетом накопления повреждений в материале в процессе ползучести можно свести к решению аналогичной задачи в предположении установившейся ползучести. Методы решения таких задач разработаны достаточно полно, поэтому решение задачи установившейся ползучести будем считать известным [1–3]. Для того чтобы получить решение неустановившейся ползучести, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на функции от $\mu(r, z, t)$ и $X(t)$, которые являются решением системы уравнений (28), (37).

Данный вывод остается справедливым применительно к другим элементам конструкций: толстостенным трубам, нагруженным внутренним давлением, изгибаемым балкам, вращающимся дискам и т. д. Это означает, что полученный результат можно распространить на произвольное неравномерно нагретое тело, тем более что система уравнений (28), (37) соответствует именно такому телу.

4. На рис. 2–5 представлены результаты расчетов для кольцевой пластины, нагруженной по внутреннему радиусу изгибающим моментом $M_r(a) = -M = -600 \text{ Н} \cdot \text{м}$, на внешнем радиусе $M_r(b) = 0$. Толщина пластины $h = 0,01 \text{ м}$, радиусы $a = 0,05 \text{ м}$ и $b = 0,1 \text{ м}$, безразмерный радиус $\rho = b/a$ изменяется в интервале $1 \leq \rho \leq 2$. На внешнем контуре ($\rho = 2$) пластина шарнирно оперта, внутренний контур ($\rho = 1$) не закреплен. В расчетах использованы следующие характеристики материала: $\alpha = 0$, $n = 6$, $g = 4,75$, $m = 8$,

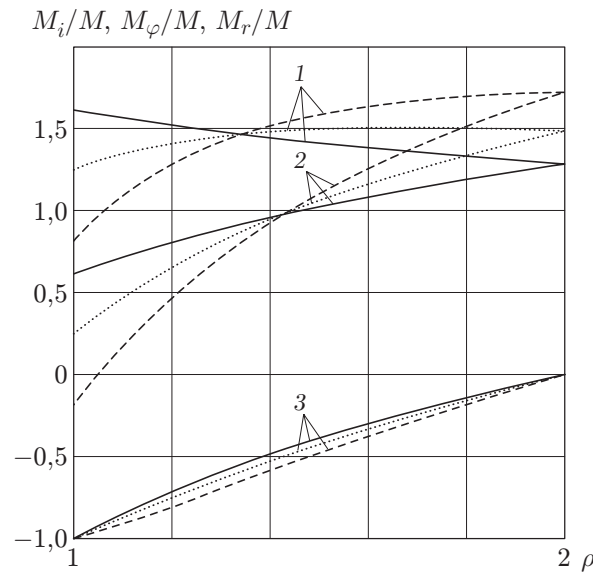


Рис. 2. Зависимости функций M_i/M , M_φ/M и M_r/M от ρ при $\varphi = \text{const}$:
 1 — $M_i/M(\rho)$; 2 — $M_\varphi/M(\rho)$; 3 — $M_r/M(\rho)$; сплошные линии — $\tau_0 = 0$;
 пунктирные — $\bar{\tau} = 2,1$; штриховые — $\tau_* \approx 2,456$

$B_1 = 3,5172 \cdot 10^{-15}$ МПа $^{-n}$ /ч, $B_2 = 2,7563 \cdot 10^{-15}$ МПа $^{-g-1}$ /ч. Эти характеристики соответствуют сплаву Д16 при $T = 250$ °С [4]. В рассматриваемом случае согласно (31) $\beta = 1$, поэтому функции $X(t)$, $\mu(r, z, t)$ и время начала разрушения t_* находятся из (33)–(35).

На рис. 2 линиями 1–3 представлены соответственно распределения функций M_i/M , M_φ/M и M_r/M в зависимости от ρ в сечениях пластины $\varphi = \text{const}$. Расчет выполнен согласно (21), (22). Сплошные, пунктирные и штриховые линии соответствуют трем фиксированным значениям времени $\tau = t/t_*^0$: начальному $\tau_0 = 0$, промежуточному $\bar{\tau} = 2,1$ и времени начала разрушения $\tau_* = t_*/t_*^0 \approx 2,456$ ($t_*^0 = 1,867 \cdot 10^4$ ч). Очевидно, что в процессе ползучести в пластине происходит непрерывное перераспределение изгибающих моментов, которым нельзя пренебрегать даже на стадии проектирования. Изгибающие моменты M_φ , M_r и интенсивность M_i существенно отличаются от M_φ^0 , M_r^0 , M_i^0 (сплошные линии на рис. 2), полученных из решения задачи установившейся ползучести.

На рис. 3 представлены изолинии интенсивности напряжений $\sigma_i = lM_i$ в сечении $\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$ для тех же моментов времени, что и на рис. 2. Величина lM_i вычисляется по формуле (24) или (27). На рис. 4 приведены изолинии функции повреждаемости $\mu(\rho, z, \tau)$ (34) в моменты времени $\bar{\tau}$ и τ_* . При $\tau = \tau_0$ $\mu = 1$ во всем сечении. Изолинии, представленные на рис. 3, 4, свидетельствуют о накоплении повреждений в материале пластины в различных ее сечениях. Очевидно, что опасными являются области $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho^* = 1$, $z^* = \pm h/2$. Именно отсюда при $\tau_* > t_*/t_*^0$ начинает распространяться фронт разрушения. В рассматриваемом случае значение t_* превышает t_*^0 более чем в 2,4 раза. Это свидетельствует о том, что t_*^0 представляет собой одну из нижних оценок времени t_* , т. е. является приближенным временем начала разрушения пластины.

На рис. 5 сплошными линиями 1–3 показаны зависимости напряжений σ_φ , σ_r от ρ при $z = h/2$ в те же моменты времени, что и на рис. 2. Расчет проводился с использованием соотношений (13), (21) и (22). Пунктирными линиями показаны зависимости для компонент напряжений σ_φ , σ_r , рассчитанные согласно (38). Из анализа данных на рис. 5 следует, что поле напряжений (38) можно использовать в качестве оценочного.

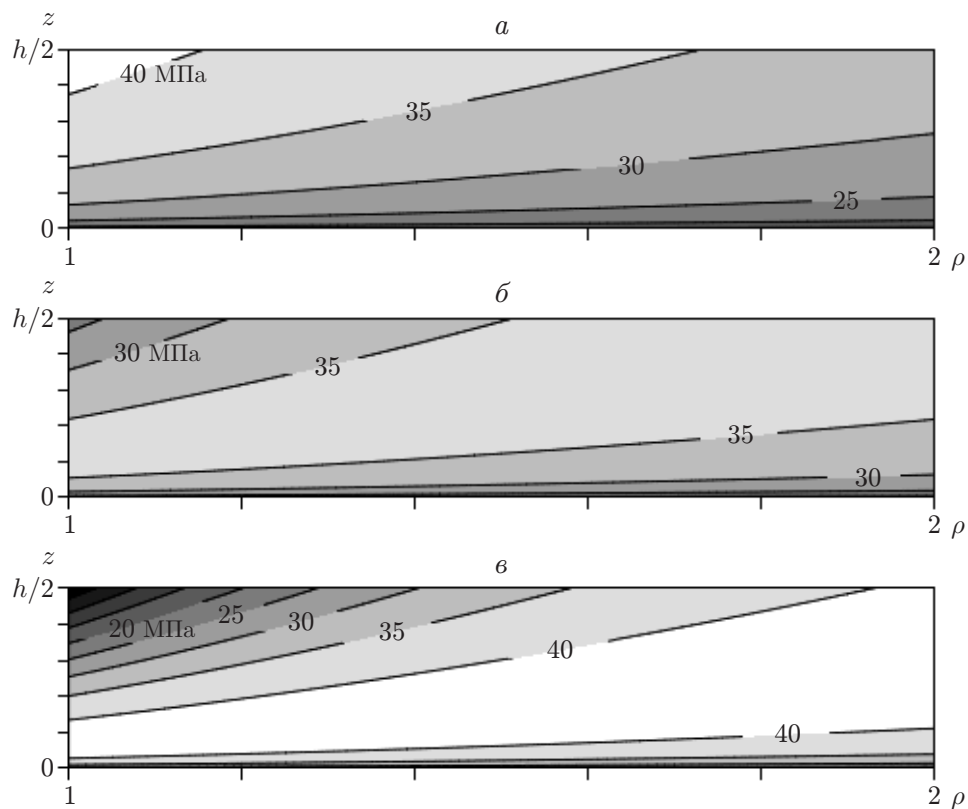


Рис. 3. Изолинии интенсивности напряжений σ_i в сечении $\varphi = \text{const}$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq z \leq h/2$:

a — $\tau_0 = 0$; b — $\bar{\tau} = 2,1$; v — $\tau_* \approx 2,456$

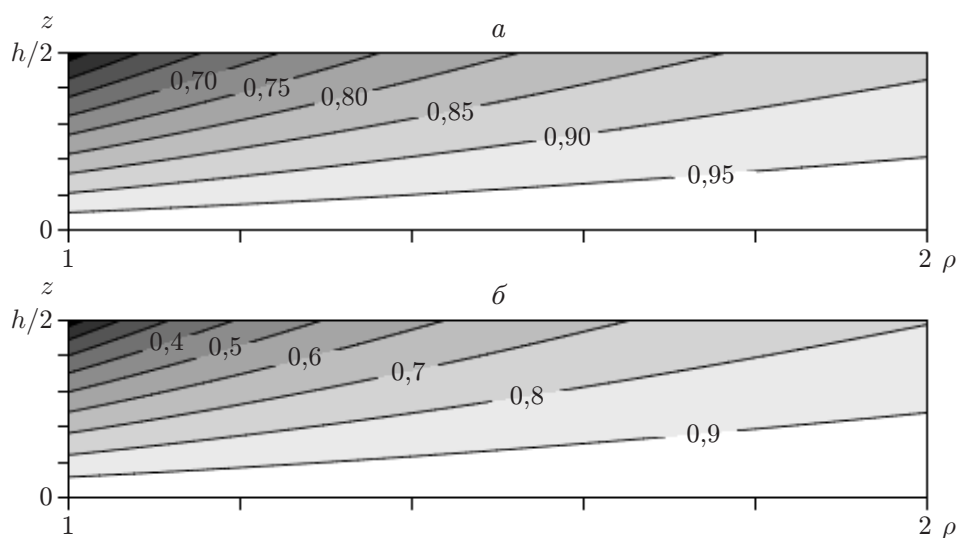


Рис. 4. Изолинии функции повреждаемости $\mu(\rho, z, \tau)$:

a — $\bar{\tau} = 2,1$; $б$ — $\tau_* \approx 2,456$

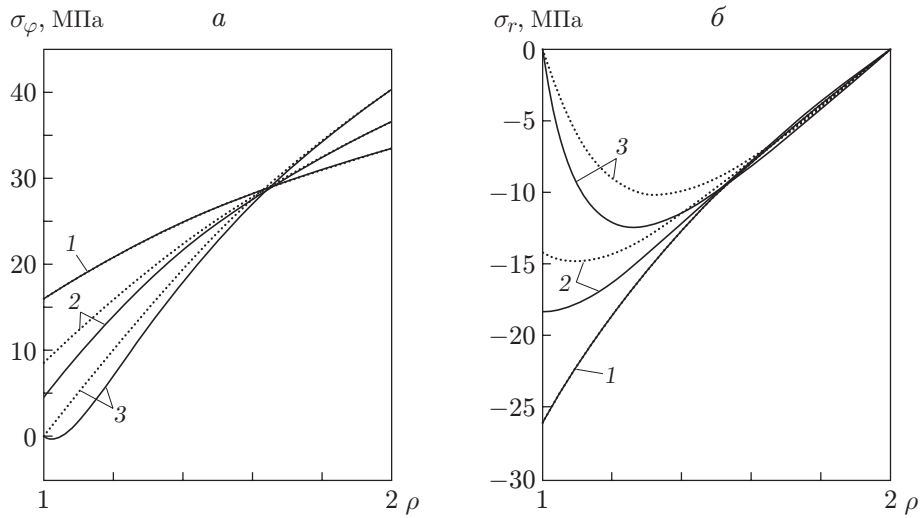


Рис. 5. Зависимости напряжений σ_φ , σ_r от ρ при $z = h/2$:
 а — $\sigma_\varphi(\rho)$; б — $\sigma_r(\rho)$; 1 — $\tau_0 = 0$; 2 — $\bar{\tau} = 2,1$; 3 — $\tau_* \approx 2,456$; сплошные линии —
 расчет с использованием (13), (21), (22); пунктирные — расчет по формулам (38)

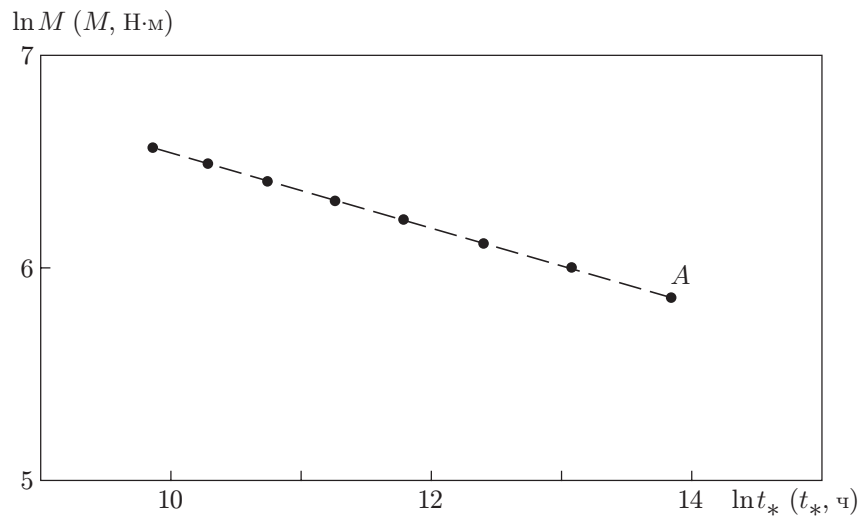


Рис. 6. Зависимость времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного к внутреннему радиусу пластины

На рис. 6 приведена зависимость времени начала разрушения t_* от величины изгибающего момента M , приложенного к внутреннему радиусу пластины, в логарифмических координатах. Видно, что зависимость представляет собой прямую линию. Используя эту прямую или ее продолжение, можно прогнозировать время начала разрушения при различных значениях изгибающего момента M . Точка А на рис. 6 соответствует значению $M = 350 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $t_* = 1,017 \cdot 10^6 \text{ ч}$.

В заключение следует отметить, что методика расчета напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений для кольцевых и круглых пластин при других условиях нагружения и закрепления (например, изгиб моментом, приложенным на внешнем радиусе, нагружение равномерно распределенным давлением и т. д.) аналогична предложенной в данной работе. Ряд примеров решения таких задач в предположении уста-

новившейся ползучести рассмотрен в [1]. Для того чтобы получить решение, учитывающее накопление повреждений, необходимо известное решение установившейся ползучести умножить на функции координат и времени, для определения которых получена система уравнений (28), (37). При этом данная система уравнений, как показано в п. 3, применима для расчета не только пластин, но и других элементов конструкций с различными условиями нагружения и закрепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Малинин Н. Н.** Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1963. Вып. 9. С. 173–195.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. **Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.** Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1981.
4. **Никитенко А. Ф.** Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997.
5. **Закономерности** ползучести и длительной прочности: Справ. / Под общ. ред. С. А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983.

*Поступила в редакцию 28/VII 2005 г.,
в окончательном варианте — 29/IX 2005 г.*
