

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПРИ  
ОТСУТСТВИИ МАССОВЫХ СИЛ

Л. Я. Любин, А. С. Повицкий

(Москва)

Рассматривается движение изолированных и вытянутых в ряд по движению и попереку движения пузырьков идеального газа или капель идеальной нетеплопроводной жидкости в неравномерно нагретой вязкой жидкости, а также движение внутри жидких фигур и витание капли в вязком газе или жидкости в присутствии горячего экрана. Массовые силы не учитываются (например, из соображений малости размеров капель или пузырьков или близости удельных весов обеих жидкостей).

Как известно [1], коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры  $\sigma = \sigma(T)$ ; для всех жидкостей  $\partial\sigma/\partial T < 0$ .

Граничное условие, которому должны удовлетворять решения всех рассматриваемых задач [2] на поверхности раздела фаз

$$\left[ p_1 - p_2 - \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] n_i = (P_{ik}^{(1)} - P_{ik}^{(2)}) n_k + \frac{\partial\sigma}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} = \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

может быть удовлетворено только при наличии движения вязкой жидкости.

Здесь  $n = \{n_i, n_k\}$  — единичный вектор нормали, направленный внутрь первой жидкости;  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности раздела;  $p_1$  и  $p_2$  — давления в первой и второй жидкостях;  $P_{ik}^{(1)}$  и  $P_{ik}^{(2)}$  — компоненты тензора вязких напряжений для первой и второй жидкостей соответственно; по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование.

При решении внешней задачи определяется закон распределения температур в жидкости, при котором реализуется безвихревое стационарное обтекание пузырьков, мало отличающихся по форме от сферы и кругового цилиндра. Кроме того, используя работу Жуковского [3] об обтекании пузырьков идеальной жидкостью при неизменном вдоль поверхности коэффициенте поверхностного натяжения, дается точное решение двумерной задачи для цепочки пузырьков, вытянутых попереку движения. При решении внутренней задачи рассматриваются лишь случаи движения с малым числом Рейнольдса ( $N_{Re} \ll 1$ ), что позволяет пренебречь в уравнении Навье — Стокса для жидкости внутри фигуры членом  $(V \cdot \nabla)V$ .

1. Будем предполагать, что пузырь имеет форму, мало отличающуюся от сферы, т. е. граничные условия в сферической системе координат с началом в центре пузыря могут быть записаны в виде (фиг. 1)

$$\mu \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial\sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$p - 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} + p_\sigma = p_1, \quad V_r = 0 \quad \text{при } r = a$$

Здесь  $\mu$  — динамическая вязкость,  $p$  и  $p_1$  — давления в жидкости и в газе.

При безвихревом обтекании пузырька, наполненного идеальным газом

$$p = \text{const} - \frac{\rho V^2}{2}, \quad p_1 = \text{const} \quad (1.2)$$

Безвихревое движение жидкости, удовлетворяющее третьему граничному условию (1.1), описывается известными формулами

$$V_r = V_\infty \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad V_\theta = V_\infty \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (1.3)$$

Подстановка последних соотношений в первое граничное условие (1.1) дает искомый закон распределения температур в жидкости

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \text{const} \quad (1.4)$$

Принимая для не очень больших перепадов температур  $\partial \sigma / \partial T = \text{const}$ , можно заменить это условие равенством

$$\partial T / \partial x = \text{const} \quad \text{при } r = a \quad (1.5)$$

т. е. безвихревое обтекание в данном случае реализуется при линейном законе изменения температуры  $T = T_0 - kx$  вдоль поверхности капли.

Таким образом, при изменении температур, отвечающем условию (1.4), распределение скоростей частиц жидкости относительно пузыря описывается формулами (1.3), в которых

$$V_\infty = \frac{a}{3\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.6)$$

Очевидно, что пузырек в неравномерно нагретой, покоящейся на бесконечности жидкости при условии (1.4) будет двигаться в направлении  $\text{grad } T$  со скоростью

$$V_1 = - \frac{a}{3\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{или} \quad V_1 = - \frac{1}{6\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \Delta T \quad (1.7)$$

Здесь  $\Delta T$  — изменение температуры на длине пузырька. Например, для воды, учитывая, что  $\partial \sigma / \partial T = -0,15 \text{ эрг} / \text{см}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ , получим:  $V_1 = 2,5 \Delta T \text{ см} / \text{сек}$ .

Точность сделанных допущений (сохранение сферической формы пузырька) оценим величиной максимального относительного изменения средней кривизны

$$\delta = \frac{2K_1 - 2K_2}{2/a}$$

вдоль поверхности пузырька.

Предполагая это изменение малым, будем считать, что

$$p_\sigma = \frac{\sigma(T)}{a/2} + \sigma_1 \Delta(2K) \quad \left( \Delta(2K) = 2K - \frac{2}{a} \right) \quad (1.8)$$

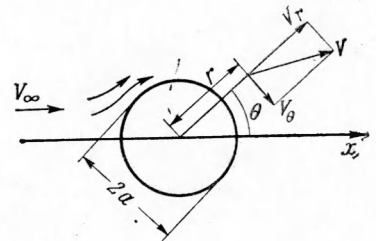
Здесь  $\sigma_1$  — среднее значение коэффициента  $\sigma$ .

Используя второе граничное условие (1.1), соотношения (1.3), (1.6) и выражение (1.8), получим следующие оценки для параметра  $\delta$ :

$$\delta = \frac{9}{16} \frac{\rho}{\sigma} a V_1^2 = A_1 a \bar{V}_1^2 \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\rho}{64\sigma\mu^2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 a \Delta T^2 = A_2 a \Delta T^2 \quad (1.9)$$

Здесь коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  зависят только от физических констант; например, для воды  $\rho = 1 \text{ гсм}^{-3}$ ,  $\sigma = 72,7 \text{ дн/см}$ ,  $\mu = 10^{-2} \text{ пуаз}$ , и в этом случае вычисления дают  $A_1 = 0,00775$ ,  $A_2 = 0,0485$ , или  $a V_1^2 = 129 \delta$ , т. е. для того чтобы максимальное относительное изменение средней кривизны не превышало 1%, должно быть  $a V_1^2 < 1,29 \text{ см}^3 / \text{сек}^2$ .

2. Хотя возникновение внутри жидкости пузыря цилиндрической формы маловероятно, однако пузырь, близкий к цилиндрическому, можно представить как цепочку слипших пузырьков или пузырь, охватывающий твердое тело (типа катушки). Поэтому решение двумерной задачи представляет некоторый интерес для оценки скорости термокапиллярного движения пузырей удлиненной формы.



Фиг. 1

Предполагая сохранение окружности в поперечном сечении пузыря, получим граничные условия аналогичные (1.1) (в цилиндрической системе координат с началом на продольной оси пузыря).

Безвихревое плоское движение жидкости, соответствующее третьему граничному условию, описывается известными формулами

$$V_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad V_\theta = V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta \quad (2.1)$$

Подстановка последних соотношений в первое граничное условие дает искомый закон распределения температур в жидкости

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \text{const} \quad (2.2)$$

или, принимая, как и в п. 1, для не очень больших перепадов температур  $\partial \sigma / \partial T = \text{const}$ , можно заменить это условие равенством

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{const} \quad \text{при } r = a \quad (2.3)$$

При изменении температур, отвечающем условию (2.2), распределение скоростей частиц жидкости относительно пузыря описывается формулами (2.1), в которых

$$V_\infty = \frac{a}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.4)$$

Пузырь в неравномерно нагретой, покоящейся на бесконечности жидкости при условии (2.2) будет двигаться в направлении  $\text{grad } T$  со скоростью

$$V_1 = - \frac{a}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.5)$$

Сравнивая результаты пп. 1 и 2, видим, что при одинаковом законе изменения температур вдоль оси  $x$  распределение скоростей по поверхности цилиндрического пузырька и по продольному сечению поверхности сферического ( $\psi = 0$ ) совпадают.

Скорость же поступательного движения цилиндрического пузырька составляет  $3/4$  скорости сферического. Таким образом, даже значительное отклонение формы пузырька от сферической не можем заметно изменить скорость его термокапиллярного движения. Это дает возможность распространить результаты двух следующих пунктов на движение групп нецилиндрических пузырьков. Погрешность, которая вносится принятым допущением, будет такого же порядка, как и от допущения в п. 1.

3. Для оценки взаимного влияния пузырьков рассмотрим двумерную задачу о движении цепочки пузырьков вытянутой вдоль движения. Предполагая, как и выше, что поперечное сечение пузырьков мало отличается от окружности, получаем на поверхности каждого пузырька условия, аналогичные (1.1). Так как рассматривается безвихревое движение ( $\text{rot } V = 0$ ), то в каждой точке поверхности пузырька имеет место равенство

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial r} = - \frac{V_\theta}{a} \quad (3.1)$$

Поэтому первое граничное условие может быть написано в виде

$$2\mu \frac{V_\theta}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (3.2)$$

Из этого условия получаем искомый закон распределения температур

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{2\mu}{a} \frac{V_\infty}{\partial \sigma / \partial T} \frac{u(q, \theta)}{\sin \theta} \quad \left( q = \frac{2a}{t}, u(q, \theta) = \frac{V_\theta}{V_\infty} \right) \quad (3.3)$$

Здесь  $t$  — шаг цепочки (расстояние между центрами окружностей).  
Остальные обозначения прежние. Интегрируя уравнение (3.2) по  $\theta$  и учи-  
тывая, что на поверхности пузырька

$$V_\theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

получим перепад температур на диаметре пу-  
зырька

$$\Delta T = \frac{8\mu V_\infty}{\partial \sigma / \partial T} \frac{\Phi(q, 0)}{q} \quad \left( \Phi(q, \theta) = \frac{\Phi}{iV_\infty} \right) \quad (3.4)$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал скорости.

В работе Б. Л. Гинзбурга [4] приведены таб-  
лицы распределения безразмерного потенциала  
 $\Phi(q, \theta)$  и безразмерной скорости  $u(q, \theta)$  при обте-  
кании решетки круговых цилиндров, при этом  
принимается  $\Phi(q, \frac{1}{2}\pi) = 0$ .

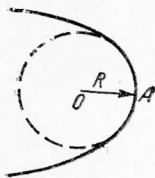
Очевидно, что цепочка пузырьков, вытянутая  
вдоль оси  $x$ , будет двигаться в неравномерно на-  
гретой жидкости, покоящейся на бесконечности,  
в направлении  $\text{grad } T$  со скоростью

$$V_0 = (1 + \kappa)V_1, \quad \kappa = \frac{q - \Phi(q, 0)}{\Phi(q, 0)}$$

Здесь  $V_1$  — скорость термокапиллярного движения единичного пу-  
зырька (2.5),  $\kappa$  — относительное увеличение скорости движения пузырька,  
обусловленное близостью соседних пузырьков.

Зависимость  $\kappa$  от параметра  $q = 2a/t$  показана на фиг. 2. Вычисления  
по формуле (3.3) показывают, что максимальные относительные колебания  
 $|\text{grad } T|$  равны 0.5, 4.7 и 22.4% соответственно при  $q = 0.2, 0.4$  и  $0.6$ .  
Точность допущения (сохранение круглой формы) того же порядка,  
что и выше.

4. Покажем, что рассмотренное Жуковским [3] движение идеальной  
жидкости в канале в присутствии пузырька (двумерная задача) кинема-  
тически совпадает с некоторым термокапиллярным движением вязкой  
жидкости около цепочки пузырьков, расположенной поперек движения,  
и найдем закон распределения температур в жидкости, при котором такое  
движение реализуется. Для этого надо показать, что при некотором за-  
коне распределения температур в жидкости и определен-  
ном давлении внутри пузырьков это движение удовлетворяет  
граничному условию. Выбрав произвольную точку  
 $A$  на поверхности пузырька и введя полярную систему  
координат с началом в центре кривизны (фиг. 3), перепи-  
шем граничное условие в этой системе. Учитывая, что на  
поверхности пузырьков имеют место равенства



Фиг. 3

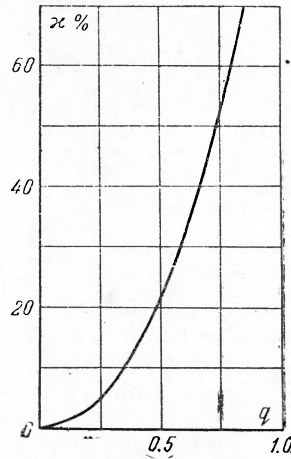
$$V_r = 0, \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = -\frac{V_\theta}{R} \quad (\text{rot } V = 0)$$

получим первое граничное условие (фиг. 3)

$$2\mu \frac{V_\theta}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \quad (4.1)$$

Здесь  $R$  — радиус кривизны. Кроме того, в каждой точке поверхности  
пузырька в силу несжимаемости жидкости имеем

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \quad (4.2)$$



Фиг. 2

Используя соотношение  $V_\theta = \omega \sin \theta$  работы [3], напишем второе граничное условие

$$p + \frac{2\mu}{R} \omega \cos \theta + p_\sigma = p_1 \quad \left( p_\sigma = \frac{\sigma}{R} \right) \quad (4.3)$$

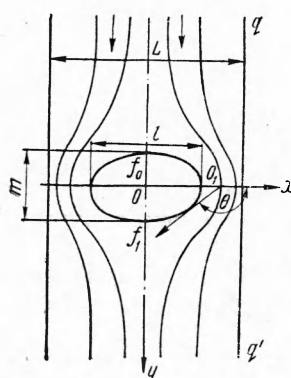
Здесь  $p_1$  — давление газа в пузырьке,  $\omega$  — скорость жидкости относительно пузырька в точке  $O_1$ .

Искомый закон распределения температур получим из первого граничного условия (4.1) и соотношения, найденного Жуковским [3]

$$\frac{dT}{dy} = \frac{2B\omega^3\mu(\alpha^2/c^2)[1 - (c^2/\alpha^2)\cos^2\theta]}{\partial\sigma/\partial T} \quad \left( B = \frac{\rho}{2\sigma_0} \right) \quad (4.4),$$

Здесь  $\sigma_0$  — поверхностное натяжение (фиг. 4) в точке  $f_0$  ( $\theta = 0$ ) (у Жуковского  $\sigma = \text{const}$ ).

Капиллярное давление можно разложить на два слагаемых



Фиг. 4

$$p_\sigma = \frac{\sigma_0}{R} + \frac{\Delta\sigma(\theta)}{R}, \quad \Delta\sigma(\theta) = \int_0^\theta \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} d\theta \quad (4.5)$$

Очевидно, что при распределении температур в жидкости, соответствующем выражению (4.4), в каждой точке поверхности пузырька имеет место равенство [3]

$$\frac{\sigma_0}{R} = p_1 - \left( C_1 - \frac{\rho V^2}{2} \right), \quad C_1 = \text{const} \quad (4.6)$$

С другой стороны, из условия (4.1) имеем

$$\Delta\sigma(\theta) = 2\mu\omega(1 - \cos\theta) \quad (4.7)$$

Таким образом, второе граничное условие (4.3) удовлетворяется при

$$C_1 = p_0 + \frac{2\mu\omega}{R} \quad (4.8)$$

где  $p_0$  — давление в жидкости в точке  $f_0$ . При этом параметр

$$\frac{\alpha^2}{c^2} = 1 + \frac{p_1 - p_0 - 2\mu\omega/R}{1/2\rho\omega^2}$$

Параметр  $\alpha^2/c^2$  равен относительному изменению кривизны на контуре пузырька [3]

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}, \quad dS^2 = dx^2 + dy^2, \quad dx = \frac{c^2}{B\omega^2} \frac{\cos\theta d\theta}{\alpha^2 - c^2 \cos^2\theta}$$

Интегрируя уравнение (4.1), получаем приращение температуры  $\Delta T$  на участке  $f_0 f_1$ , формулы для определения максимальной скорости  $\omega$  и скорости движения группы пузырьков  $V_0$  в неравномерно нагретой жидкости, покоящейся на бесконечности

$$\Delta T = f(\Delta\sigma, T_1), \quad \omega = \frac{\Delta\sigma}{4\mu}, \quad V_0 = 2V_1 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - c^2/\alpha^2}} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

Здесь  $V_1$  — скорость движения изолированного пузырька при равном перепаде температур  $\Delta T$  на диаметре

$$\Delta T = \frac{4\mu\omega}{\partial\sigma/\partial T} \quad \text{при} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial T} = \text{const} \quad (4.10)$$

Нелинейность распределения температур вдоль оси  $y$  можно оценить максимальным относительным изменением  $\delta$  величины  $|dT/dy|$  на участке  $f_0 f_1$ , для которого, согласно уравнению (4.4), имеем  $\delta = c^2/\alpha^2$ . Максимальная скорость жидкости на средней линии между соседними пузырями  $qq'$  равна

$$V_q = \omega \left( 0.5 - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - c^2/\alpha^2}} \right) \quad (4.11)$$

Например  $V_q = 0.075 V_0 = 0.035\omega$  при  $c/\alpha = 0.5$ .

Таким образом, при умеренных значениях параметра  $c/\alpha$  полученные результаты применимы приблизительно также для случая движения пузырька в неравномерно нагретой жидкости в канале шириной  $L$ .

Контур пузырька описывается уравнениями [3]

$$x = \frac{1}{B\omega^2} \frac{c^2}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{c \sin \theta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}$$

$$y = \frac{1}{B\omega^2} \frac{c}{2\alpha} \ln \frac{\alpha - c \cos \theta}{\alpha + c \cos \theta}$$

Расстояние между центрами соседних пузырьков, или ширина канала

$$L = \frac{\pi}{B\omega^2} \frac{c}{\alpha} \left( 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} \right)$$

Движение пузырьков происходит в направлении  $\operatorname{grad} T$ .

5. Будем считать, следуя Адамару и Рыбчинскому, что движение жидкости внутри жидких фигур при  $N_{Re} \ll 1$  описывается приближенно линейным уравнением

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{V} \quad (5.1)$$

Воспользовавшись решением Стокса уравнения (5.1) и решая аналогично это уравнение для цилиндра, получим распределение скоростей и давлений в рассматриваемых фигурах, удовлетворяющее граничному условию при следующем законе изменения температур на поверхности фигуры

$$\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial T} = \operatorname{const} \quad (5.2)$$

Для жидкого шара в идеальном газе

$$V_r = \frac{a}{3\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \cos \theta$$

$$V_\theta = - \frac{a}{3\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \sin \theta$$

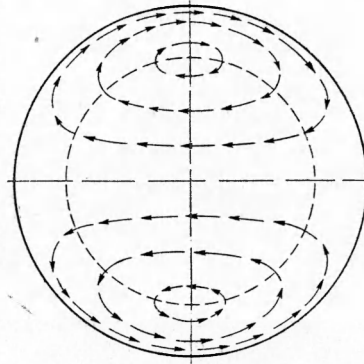
$$p = p_0 - \frac{10}{3} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{r}{a} \cos \theta \quad (5.3)$$

Для жидкого цилиндра в идеальном газе

$$V_r = \frac{a}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \cos \theta$$

$$V_\theta = - \frac{a}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \left[ 1 - 3 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \sin \theta$$

$$p = p_0 - 2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{r}{a} \cos \theta \quad (5.4)$$



Фиг. 5

Траектории частиц жидкости в сферической капле (фиг. 5) описываются уравнением

$$\frac{dr}{V_r} = \frac{rd\theta}{V_\theta} \quad \text{или} \quad \theta = \arcsin \frac{c}{\rho \sqrt{1-\rho^2}} \quad \left( \begin{array}{l} \rho = r/a \\ c = \text{const} \end{array} \right) \quad (5.5)$$

Распределение скоростей и давлений в жидких фигурах, витающих в вязком газе, может быть получено из выражений (5.3) и (5.4) введением коэффициента  $\beta$ , если принять, что фигуры сохраняют правильную форму и газ несжимаем

$$V_r' = \beta V_r, \quad V_\theta' = \beta V_\theta, \quad (p' - p_0') = \beta (p - p_0) \quad (5.6)$$

Коэффициент  $\beta$  определяется из условия непрерывности тангенциальных слагающих тензора напряжений. Для шара

$$\beta = \frac{1}{1 + 2/3 \mu_1 / \mu}$$

Здесь  $\mu_1$  — динамическая вязкость газа; в случае вода — воздух  $\beta = 0.89$  при  $T = 20^\circ \text{C}$ .

Так как распределение скоростей на поверхности рассматриваемых фигур соответствует безвихревому обтеканию, то очевидно, что фигуры будут двигаться в покоящемся на бесконечности несжимаемом газе в направлении роста температуры. Скорость шара

$$V = -\beta \frac{2a}{9\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.7)$$

Полная кинетическая энергия движения жидкости в рассматриваемых случаях равна соответственно

$$\begin{aligned} T &= \frac{23}{14} T_n \approx 1.64 T_n \text{ — шар} \\ T &= \frac{5}{3} T_n \approx 1.666 T_n \text{ — цилиндр} \end{aligned} \quad \left( T_n = \frac{mV^2}{2} \right) \quad (5.8)$$

Здесь  $m$  — масса фигуры,  $V$  — скорость поступательного движения фигуры.

Точность принятого допущения (сохранение правильной формы при  $\mu_1 \neq 0$ ) оценим максимальным относительным изменением средней кривизны поверхности фигуры  $\delta$ .

Из условия непрерывности нормальных слагающих тензора напряжений, пренебрегая величинами порядка  $1/2 \rho_1 V_1^2$  ( $\rho_1, V_1$  — плотность и скорость движения газа), получим следующую оценку для шара:

$$\delta = 2 \left[ (1 - \beta) + \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{\mu} \beta \right] \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{a}{\sigma} \quad (5.9)$$

Поступила 21 II 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
3. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Поли. собр. соч., т. 3, М., ОНТИ, 1936.
4. Гинзбург Б. Л. Вычисление потенциала и скорости обтекания плоско-параллельным потоком решетки круговых цилиндров. Сб. ЦКТИ, кн. 18. Теплопередача и аэродинамика. Машгиз, 1950, вып. 4.