ПМТФ, № 5, 1966

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В СИСТЕМЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫХ СФЕР ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. Б. Восканян, А. М. Головин, В. В. Толмачев

(Москва)

Показано, что при обтекании системы сфер радиуса a, расположенных в узлах кубической решетки с периодом b, вдоль направления одной из основных трансляций решетки при условии, что $(a / b)P^{1/3} \ll 1$ (P — число Пекле, $P \gg 1$), концентрация растворенного вещества, поглощающегося на поверхности сфер, убывает по логарифмическому закону на больших расстояниях — по сравнению с b, но малых — по сравнению с $L = Pb^2 / 4\pi a$. На расстояниях, существенно превышающих L, убывание описывается экспоненциальным законом, совпадающим с законом убывания концентрации на расстояниях, много больших b, в случае пространственно однородного распределения сфер.

Рассматривается система сфер радиуса a, обтекаемая потоком несжимаемой жидкости со скоростью U. Предполагается, что число Рейнольдса $R = Ua / \nu \ll 1$ (ν — коэффициент кинематической вязкости). В жидкости растворено вещество с концентрацией c, поглощающееся на поверхности сфер. Коэффициент диффузии D предполагается достаточно малым, так что число Пекле $P = Ua / D \gg 1$. Сферы расположены в узлах кубической решетки с периодом b, причем, как ниже показано, необходимо потребовать, чтобы $P (a / b)^3 \ll 1$.

При этих допущениях изменение концентрации будет происходить в тонком диффузионном слое порядка $aP^{-1/3}$ вблизи поверхности каждой сферы. За каждой сферой образуется область диффузионного следа, поперечные размеры которого для достаточно редкой решетки ($aP^{1/3} \ll b$) превосходят эффективную толщину диффузионного пограничного слоя, что позволяет свести задачу о поглощении концентрации на поверхности системы сфер к задаче, рассмотренной В. Г. Левичем [1], к конвективной диффузии вещества с постоянной концентрацией, натекающей на отдельную сферу.

В работе Хасимото [2] рассматривается решение уравнения Стокса, описывающего движение вязкой жидкости, обтекающей систему сфер, расположенных в узлах кубической решетки. Но необходимое для решения диффузионной задачи выражение поля скоростей, пригодное вблизи поверхности какой-либо сферы, отсутствует в [2].

В соответствии с методом Ламба [3] (§ 336) и Бюргерса [4], при обтекании отдельной сферы вязким потоком вместо решения уравнения в пространстве вне сферы с граничными условиями на ее поверхности рассматривается уравнение движения во всем пространстве, включая внутреннюю область сферы, причем в центре сферы помещается сосредоточенная сила и система мультиполей, величина которых подбирается таким образом, чтобы обеспечить удовлетворение требуемых граничных условий.

Эта идея введения эффективного потенциала используется в работе [2] для отыскания поля скоростей движения жидкости, обтекающей систему сфер. Ниже предлагается несколько отличное от [2] изложение метода эффективного потенциала.

1. Будем исходить из уравнения

$$\mu\Delta \mathbf{v} = \operatorname{grad} p + (\mathbf{F}_0 + a^2\mathbf{F}_1\Delta + \ldots) \sum_{\mathbf{n}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mathbf{n}) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (\mathbf{r}_\mathbf{n} = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + l\mathbf{c}) \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости в точке $\mathbf{r}$, μ — коэффициент динамической вязкости, p — давление, $\mathbf{r}_n$ — радиус вектор n-го узла решетки (n, m, $l = 0, 1, 2, \ldots$). Плотность силы, действующей со стороны сфер на жидкость, ищется в виде ряда, содержащего δ-функцию и ее производные с некоторыми постоянными коэффициентами F_0, F_1 и т. д. Введение этих членов позволяет найти такую комбинацию частных периодических решений, которая удовлетворяет условию обращения в нуль скорости на поверхности сфер.

Далее показано, что учет первых двух членов ряда с коэффициентами F_0 и F_1 позволяет при $a / b \to 0$ перейти к решению Стокса об обтекании отдельной сферы. Малость отброшенных членов ряда означает, что старшие производные от поправки к полю скоростей, создаваемой всеми сферами, кроме той, в окрестности которой рассматривается поток, малы, по сравнению с соответствующими производными поправки к полю скоростей, создаваемой ближайшей сферой. Поэтому необходимым условием применимости этого метода будет условие $a / b \ll 1$.

Как и в работе [2], искомое решение, предполагая суммирование по повторяющимся греческим индексам, можно записать в виде

$$v^\alpha = v_0{}^\alpha - \frac{F_0{}^\beta + a^2 F_1{}^\beta \Delta}{4\pi\mu}\left(\delta_{\alpha\beta} S_1 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^\alpha \partial r^\beta}\right) \tag{1.3}$$

где v^α — компоненты скорости движения жидкости, а $v_0{}^\alpha$ — их предельные значения при $a / b \to 0$

$$S_1 = \frac{1}{\pi a^3} \sum_{\mathbf{k}\neq 0}{}' \frac{1}{k^2} e^{-2\pi i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \qquad S_2 = -\frac{1}{4\pi a^3} \sum_{\mathbf{k}\neq 0}{}' \frac{1}{k^4} e^{-2\pi i (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — вектор обратной решетки, связанный с векторами прямой решетки условиями $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}) = n$, $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}) = m$, $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{c}) = l$.

Известно (см., например, [2]) разложение решеточных сумм S_1 и S_2 в области малых r с точностью до членов порядка $(r / b)^3$

$$\delta_{\alpha\beta} S_1 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^\alpha \partial r_\beta} = \frac{r^\alpha r^\beta}{2r^3} + \delta_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2r} + \frac{1.88}{b}\right) \tag{1.5}$$

Подставляя разложение (1.5) в (1.3) и воспользовавшись граничным условием $v^\alpha \equiv 0$ при $r = a$, получим (1.6)

$$8\pi\mu a v_0{}^\alpha = F_0{}^\beta \left[n^\alpha n^\beta + \delta_{\alpha\beta}(1 - 3.76\, a/b)\right] - F_1{}^\beta (3n^\alpha n^\beta - \delta_{\alpha\beta}) \qquad (n^\alpha = r^\alpha / r)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых сферических гармониках, вычисляем

$$F_0{}^\alpha = 6\pi\mu a U^\alpha, \qquad F_1{}^\alpha = \pi\mu a U^\alpha \qquad U^\alpha = \frac{v_0{}^\alpha}{1 - 2.84\, a / b} \tag{1.7}$$

Таким образом, в области $r^3 \ll b^3$, т. е. в окрестности выделенной сферы поле скоростей жидкости, обтекающей систему сфер, имеет вид

$$v^\alpha = U^\beta \left[\delta_{\alpha\beta} - 3(n^\alpha n^\beta + \delta_{\alpha\beta})\, a / 4r + (3n^\alpha n^\beta - \delta_{\alpha\beta})\, a^3 / 4r^3\right] \tag{1.8}$$

Как и следовало ожидать, вблизи поверхности сферы поле скоростей аналогично полю скоростей вязкого потока, обтекающего одиночный шар, но скорость натекающего потока $\mathbf{U}$ отличается от $\mathbf{v}_0$.

Если $a^3 \ll b^3$, то существует область, где $r \gg a$ и $r^3 \ll b^3$, в которой еще законно использование выражения (1.8), поэтому скорость потока можно считать постоянной и равной $\mathbf{U}$.

2. Прежде чем изучать конвективную диффузию в потоке, обтекающем систему сфер, рассмотрим задачу о конвективной диффузии на поверхности одиночной сферы, на которую натекает поток со скоростью $\mathbf{U}$.

Уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\mathbf{v}\nabla c = D\,\Delta c \tag{2.1}$$

В сферической системе координат компоненты скорости v_r, v_θ могут быть выражены через функцию тока ψ

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2.2}$$

$$\psi = -{}^1/_2\, U \sin^2\theta\,(r^2 - {}^3/_2\, ar + {}^1/_2\, a^3 / r)$$

В диффузионном пограничном слое, следуя работе В. Г. Левича [1], в уравнении оставим только наиболее существенные члены

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \tag{2.3}$$

при помощи преобразования Р. Мизеса перейдем от переменных r, θ к переменным ψ, θ, где

$$\psi = -\,{}^3/_4\, U\,(r-a)^2 \sin^2\theta \tag{2.4}$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], получим уравнение

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial c}{\partial t} \qquad \left(\xi = (-\psi)^{1/2},\ t = \frac{Da^2 (3U)^{1/2}}{8}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right) \tag{2.5}$$

с граничными условиями

на поверхности сферы

$$c\,(0, t) = 0, \qquad t \neq 0 \tag{2.6}$$

в области вне пограничного слоя

$$\lim_{\xi \to \infty} c\,(\xi, t) = c_0 \tag{2.7}$$

распределение концентрации в потоке, попадающем в окрестность точки набегания

$$c\,(\xi, 0) = c_0, \qquad \xi \neq 0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.5) с граничными условиями (2.6) — (2.8) имеет решение, полученное В. Г. Левичем [1]

$$c\,(\xi, t) = \frac{c_0}{\Gamma(1/3)}\, \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t}\right) \tag{2.9}$$

$$\gamma\left(\frac{1}{3}, x\right) = \int_0^x e^{-u} u^{-2/3} du, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$$

Область применимости уравнения (2.2), а следовательно и решения (2.9), определяется условием $\partial c / \partial r \gg c_0 / R$, что выполняется, как непосредственно видно из (2.9), при выполнении неравенства $\pi - \theta \gg P^{-1/3}$.

Главные члены уравнения конвективной диффузии (2.1) в области $\pi - \theta \ll P^{-1/3}$ вдали от поверхности сферы ($r \gg a$) (в декартовых координатах с осью x вдоль направления натекающего потока) удовлетворяют уравнению, которое имеет вид уравнения теплопроводности

$$U \frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \tag{2.10}$$

Допущение о постоянстве скорости U можно оправдать тем, что характерное расстояние вдоль оси x, на котором происходит изменение концентрации, как будет видно из полученного решения, имеет порядок $aP^{1/3}$, т. е. существенно превышает радиус сферы, т. е. размеры той области, в которой скорость потока заметно отличается от U.

Второе допущение, используемое при записи уравнения (2.11), связано с условием $|U\, \partial c / \partial x| \gg D\, |\partial^2 c / \partial x^2|$, выполнение которого для монотонно меняющейся концентрации следует из условия $P \gg 1$.

Если было бы известно граничное условие для уравнения (2.10) $c\,(0, y, z)$, то решение этого уравнения можно было бы записать в виде

$$c\,(x, y, z) = \int c\,(0, y', z')\, G\,(x, y - y', z - z')\, dy' dz' \tag{2.11}$$

$$G\,(x, y, z) = \frac{U}{4\pi D x} \exp\left[-\frac{U\,(y^2 + z^2)}{4Dx}\right]$$

Функцию $c\,(0, y', z')$ можно определить следующим образом. Рассмотрим коническую поверхность с фиксированным углом $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx P^{-1/3}$.

Распределение концентрации на этой поверхности определяется формулой В. Г. Левича (2.9), если подставить для t значение $\theta = \pi - \varepsilon_0$. С точностью до членов порядка $1 / \mathrm{P}$ имеем $t = t_0 = {}^1/_8\, \pi D a^2 (3U)^{1/2}$. Теперь, считая фиксированным углом ε_0 и распределение концентрации на конической поверхности, предположим, что $\mathrm{P} \to \infty$. Тогда уравнение конвективной диффузии (2.1) во всей области, в том числе и внутри конической поверхности, перейдет в уравнение конвективного переноса

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = 0 \qquad (2.12)$$

В соответствии с уравнением (2.12), заданное на поверхности конуса распределение концентрации переносится внутри него по линиям тока. Таким образом, при $P \to \infty$ внутри конической поверхности распределение концентрации будет определяться выражением (2.9) с заменой t на t_0

$$c(\xi) = \frac{c_0}{\Gamma(^1/_3)} \Upsilon\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t_0}\right) \qquad (2.13)$$

К такому же выражению должно стремиться решение (2.11) при $P \to \infty$ достаточно далеко от поверхности сферы ($x \gg a$). Отсюда следует, что

$$c(0, y, z) = \frac{c_0}{\Gamma(^1/_3)} \Upsilon\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t_0}\right) \qquad \left(\xi^2 = \frac{U}{2}(y^2 + z^2)\right) \qquad (2.14)$$

При достаточно больших x выражение (2.11) с граничным условием (2.14) может быть записано в виде

$$\frac{c(x, y, z)}{c_0} = 1 - \frac{G(x, x, z)}{\Gamma(^1/_3)} \iint \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi'^3}{9t_0}\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{U}{2Dx}(yy' + zz') - \frac{U}{4Dx}(y'^2 + z'^2) + \ldots\right\} dy'\, dz' \qquad (2.15)$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{3}, x\right) = \int\limits_x^\infty e^{-u} u^{-2/3} du$$

Вклад в интеграл от второго члена в фигурной скобке отсутствует в силу нечетности подынтегральной функции, а от третьего мал, если $x \gg y_*^2\, U / D$. Но величина $y_* \approx (9t)^{1/3}\, U^{-1/2}$. Поэтому должно выполняться условие $x \gg (9t_0)^{2/3} / D \approx a P^{1/3}$, чтобы распределение концентрации в диффузионном следе совпало с распределением концентрации от точечного источника

$$\frac{c(x, y, z)}{c_0} = 1 - \frac{(9t_0)^{2/3}}{2\Gamma(^1/_3)\, Dx} \exp\left[-\frac{U(y^2 + z^2)}{4Dx}\right] \qquad (2.16)$$

3. Рассмотрим теперь конвективную диффузию в потоке, обтекающем систему сфер, расположенных в узлах кубической решетки с периодом $b \gg a P^{1/3}$. Вне пограничных диффузионных слоев распределение концентрации будет определяться диффузионными следами от всех сфер, имеющих, согласно п. 2, вид диффузионных следов от точечных источников. Ввиду периодичности распределения концентрации в плоскости, перпендикулярной потоку ($x = \mathrm{const}$), достаточно рассмотреть поток в окрестности сферы (kb, 0, 0)

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} A_n \frac{a}{x_n'} \sum_{m,\, l} \exp\left[-\frac{U(y_m'^2 + z_e'^2)}{4Dx_n'}\right] \qquad (3.1)$$
$$x_n' = x - nb, \qquad y_m' = y - mb, \qquad z_e' = z - lb$$

Постоянная A_n может быть определена из условия, что разность потоков растворенного вещества через плоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, из кото рых одна взята впереди, а другая позади k-й сферы ($a \ll kb - x_1 \ll b$

$a \leqslant x_2 - kb \leqslant b$), равна диффузионному потоку на сферы, находящиеся внутри рассматриваемого слоя. Отсюда следует

$$I_k = c_0 U A_k \frac{a}{x} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{U\rho^2}{4Dx}\right) 2\pi\rho d\rho = 4\pi D c_0 a A_k \qquad (3.2)$$

где I_k — полный диффузионный поток на поверхности k-й сферы.

Величину I_k можно рассчитать, рассмотрев уравнение конвективной диффузии в пограничном слое вблизи поверхности k-й сферы (2.3).

Соответствующие граничные условия можно определить, воспользовавшись (3.1).

Вблизи поверхности k-й сферы в области вне диффузионного пограничного слоя распределение концентрации создается диффузионными следами всех сфер в системе, расположенных слева от плоскости $x = bk$. Наиболее существенным в сумме оказывается слагаемое от k—1-й сефры. Но так как период решетки $b \gg a\mathrm{P}^{1/3}$, то дифузионный след от k—1-й сефры имеет поперечную ширину, значительно большую, чем $a\mathrm{P}^{-1/3}$, т. е. бóльшую эффективной толщины диффузионного пограничного слоя. В продольном направлении в диффузионном следе концентрация существенно меняется на расстояниях $a\mathrm{Pe}^{1/3} \gg a$. В силу этих обстоятельств концентрация потока, натекающего на k-ю сферу в области вне диффузионного пограничного слоя, может считаться совпадающей с концентрацией, которая создавалась бы всеми диффузионными следами в k-м узле решетки, поэтому

$$\lim_{\xi \to \infty} c(\xi, t) = c_k, \qquad c(\xi, 0) = c_k, \qquad \xi \neq 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{c_k}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{A_n a}{(k-n)b} \sum_{m,l} \exp\left[-\frac{Ub(m^2+l^2)}{4D(k-n)}\right]$$

Тем самым задача сводится к задаче В. Г. Левича [1]. Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое определяется формулой (2.9) с заменой c_0 на c_k. Плотность диффузионного потока на поверхность k-й сферы равна

$$j = D\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{D(3U)^{1/2}}{2\Gamma(1/3)}\left(\frac{3}{t}\right)^{1/3} c_k \sin\theta \qquad (3.4)$$

Полный диффузионный поток на поверхность k-й сферы

$$I_k = 2\pi a^2 \int_0^\pi j \sin\theta\, d\theta = 4\pi D\lambda b c_k$$

$$\lambda = \frac{(3U)^{1/3}}{2Db\,\Gamma(1/3)}\left(\frac{9\pi}{8} Da^2\right)^{2/3} = 0.65\frac{a}{b}\mathrm{P}^{1/3} \qquad (3.5)$$

Из соотношений (3.2) и (3.5) следует, что

$$A_k = \lambda b c_k / a c_0. \qquad (3.6)$$

Таким образом, для определения концентрации в окрестности k-го узла решетки получается следующее рекурентное соотношение:

$$\frac{c_k}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda c_n}{(k-n)c_0} \sum_{m,l} \exp\left[-\frac{Ub(m^2+l^2)}{4D(k-n)}\right] \qquad (3.7)$$

Пользуясь определением тэта-функции [5] $\vartheta_3(z | \tau)$

$$\partial_3(0 | \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau m^2} \qquad (3.8)$$

выражение (3.7) можно представить в виде

$$c_k = c_0 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda c_n}{k-n} \vartheta_3^2 \left(0 \,\middle|\, \frac{iL}{b(k-n)}\right) \qquad \left(L = \frac{Ub^2}{4\pi D}\right) \tag{3.9}$$

При $k \gg 1$ уравнение (3.9) эквивалентно интегральному уравнению

$$c(x) = c_0 - \int_0^{x-b} \frac{\lambda c(x')}{x-x'} \vartheta_3^2 \left(0 \,\middle|\, \frac{iL}{x-x'}\right) dx' \tag{3.10}$$

В области $x \ll L$, пренебрегая членами порядка $e^{-\pi L/x}$ и считая $\lambda \ll 1$, получим следующее решение уравнения (3.10):

$$c(x) = c_0 \Big/ \left(1 + \lambda \ln \frac{x}{b}\right) \tag{3.11}$$

Если $x \gg L$, то, используя мнимое преобразование Якоби

$$\vartheta_3(0 \mid \tau) = (-i\tau)^{-1/2} \vartheta_3 \left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) \tag{3.12}$$

и пренебрегая членами порядка $e^{-\pi}$, уравнение (3.10) можно заменить на более простое

$$c(x) = c_0 - \frac{\lambda}{L} \int_0^{x-L} c(x')\,dx' - \lambda \int_{x-L}^{x-b} \frac{c(x')}{x-x'}\,dx' \tag{3.13}$$

решением которого будет

$$\frac{c(x)}{c_0} = \left(1 + \lambda \ln \frac{L}{b}\right)^{-1} e^{-\lambda (x-L)/L} \tag{3.14}$$

Таким образом, концентрация натекающего потока в окрестности узлов решетки в области $x \ll L$ меняется по логарифмическому закону, а при $x \gg L$ убывает экспоненциально.

На расстояниях $x \sim L$, как видно из (3.1), эффективная ширина диффузионного следа становится сравнимой с периодом решетки b. Поэтому в области $x \ll L$ распределение концентрации будет близким к тому, какое возникает при обтекании одиночной цепочки в бесконечной среде. Влияние соседних цепочек еще не успевает стать существенным. Для $x \gg L$ решение задачи, полученное в первом приближении по малому параметру λ, переходит в решение, соответствующее хаотическому распределению сфер в пространстве. Действительно, в этом случае уравнение для концентрации, усредненной по области, существенно превышающей b^3, будет описываться уравнением конвективного переноса с поглощением (при $P \gg 1$ диффузионный поток для усредненного значения концентрации пренебрежимо мал по сравнению с конвективным)

$$L dc / dx = -\lambda c \tag{3.15}$$

решение которого при $x \gg L$, очевидно, согласуется с точностью до постоянного множителя с (3.14).

Однако область применимости этого решения в случае хаотического распределения сфер в пространстве соответствует $x \gg b$, а если сферы образуют цепочки, то лишь для $x \gg L$. В области $b \ll x \ll L$ характер изменения концентрации в окрестности сфер при пространственно однородном распределении сфер и распределении их в виде цепочек качественно отличается.

Авторы благодарят В. Г. Левича и В. С. Крылова за обсуждение.

Поступила 18 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич Б. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959,
2. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No 2.
Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
3. Burgers J. M., Second Report on viscosity and plasticity, ch III. Amsterdam,
4. 1938.
5. Уиттекер Э. Т., Дж. Н. Ватсон. Курс. современного анализа, ч. II. Физматгиз, 1963.