

КОНВЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ В СИСТЕМЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ
РАСПОЛОЖЕННЫХ СФЕР ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. Б. Восканян, А. М. Головин, В. В. Толмачев

(Москва)

Показано, что при обтекании системы сфер радиуса a , расположенных в узлах кубической решетки с периодом b , вдоль направления одной из основных трансляций решетки при условии, что $(a/b)P^{1/3} \ll 1$ (P — число Пекле, $P \gg 1$), концентрация растворенного вещества, поглощающегося на поверхности сфер, убывает по логарифмическому закону на больших расстояниях — по сравнению с b , но малых — по сравнению с $L = Pb^2/4\pi a$. На расстояниях, существенно превышающих L , убывание описывается экспоненциальным законом, совпадающим с законом убывания концентрации на расстояниях, много больших b , в случае пространственно однородного распределения сфер.

Рассматривается система сфер радиуса a , обтекаемая потоком несжимаемой жидкости со скоростью U . Предполагается, что число Рейнольдса $R = Ua/\nu \ll 1$ (ν — коэффициент кинематической вязкости). В жидкости растворено вещество с концентрацией c , поглощающееся на поверхности сфер. Коэффициент диффузии D предполагается достаточно малым, так что число Пекле $P = Ua/D \gg 1$. Сферы расположены в узлах кубической решетки с периодом b , причем, как ниже показано, необходимо потребовать, чтобы $P(a/b)^3 \ll 1$.

При этих допущениях изменение концентрации будет происходить в тонком диффузионном слое порядка $aP^{-1/3}$ вблизи поверхности каждой сферы. За каждой сферой образуется область диффузионного следа, поперечные размеры которого для достаточно редкой решетки ($aP^{1/3} \ll b$) превосходят эффективную толщину диффузионного пограничного слоя, что позволяет свести задачу о поглощении концентрации на поверхности системы сфер к задаче, рассмотренной В. Г. Левичем [1], к конвективной диффузии вещества с постоянной концентрацией, натекающей на отдельную сферу.

В работе Хасимото [2] рассматривается решение уравнения Стокса, описывающего движение вязкой жидкости, обтекающей систему сфер, расположенных в узлах кубической решетки. Но необходимое для решения диффузионной задачи выражение поля скоростей, пригодное вблизи поверхности какой-либо сферы, отсутствует в [2].

В соответствии с методом Ламба [3] (§ 336) и Бюргерса [4], при обтекании отдельной сферы вязким потоком вместо решения уравнения в пространстве вне сферы с граничными условиями на ее поверхности рассматривается уравнение движения во всем пространстве, включая внутреннюю область сферы, причем в центре сферы помещается сосредоточенная сила и система мультиполей, величина которых подбирается таким образом, чтобы обеспечить удовлетворение требуемых граничных условий.

Эта идея введения эффективного потенциала используется в работе [2] для отыскания поля скоростей движения жидкости, обтекающей систему сфер. Ниже предлагается несколько отличное от [2] изложение метода эффективного потенциала.

I. Будем исходить из уравнения

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \text{grad } p + (F_0 + a^2 F_1 \Delta + \dots) \sum_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (\mathbf{r}_n = n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + l\mathbf{c}) \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость жидкости в точке \mathbf{r} , μ — коэффициент динамической вязкости, p — давление, \mathbf{r}_n — радиус вектор n -го узла решетки ($n, m, l = 0, 1, 2, \dots$). Плотность силы, действующей со стороны сфер на жидкость, ищется в виде ряда, содержащего δ -функцию и ее производные с некоторыми постоянными коэффициентами F_0, F_1 и т. д. Введение этих членов позволяет найти такую комбинацию частных периодических решений, которая удовлетворяет условию обращения в нуль скорости на поверхности сфер.

Далее показано, что учет первых двух членов ряда с коэффициентами F_0 и F_1 позволяет при $a/b \rightarrow 0$ перейти к решению Стокса об обтекании отдельной сферы. Малость отброшенных членов ряда означает, что старшие производные от поправки к полю скоростей, создаваемой всеми сферами, кроме той, в окрестности которой рассматривается поток, малы, по сравнению с соответствующими производными поправки к полю скоростей, создаваемой ближайшей сферой. Поэтому необходимым условием применимости этого метода будет условие $a/b \ll 1$.

Как и в работе [2], искомое решение, предполагая суммирование по повторяющимся греческим индексам, можно записать в виде

$$v^\alpha = v_0^\alpha - \frac{F_0^\beta + a^2 F_1^\beta \Delta}{4\pi a} \left(\delta_{\alpha\beta} S_1 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} \right) \quad (1.3)$$

где v^α — компоненты скорости движения жидкости, а v_0^α — их предельные значения при $a/b \rightarrow 0$

$$S_1 = \frac{1}{\pi a^3} \sum'_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{-2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad S_2 = - \frac{1}{4\pi a^3} \sum'_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^4} e^{-2\pi i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{k} — вектор обратной решетки, связанный с векторами прямой решетки условиями $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) = n$, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = m$, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}) = l$.

Известно (см., например, [2]) разложение решеточных сумм S_1 и S_2 в области малых r с точностью до членов порядка $(r/b)^3$

$$\delta_{\alpha\beta} S_1 - \frac{\partial^2 S_2}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} = \frac{r^{\alpha\beta}}{2r^3} + \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2r} + \frac{1.88}{b} \right) \quad (1.5)$$

Подставляя разложение (1.5) в (1.3) и воспользовавшись граничным условием $v^\alpha \equiv 0$ при $r = a$, получим

$$8\pi a v_0^\alpha = F_0^\beta [n^\alpha n^\beta + \delta_{\alpha\beta} (1 - 3.76 a/b)] - F_1^\beta (3n^\alpha n^\beta - \delta_{\alpha\beta}) \quad (n^\alpha = r^\alpha / r)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых сферических гармониках, вычисляем

$$F_0^\alpha = 6\pi a U^\alpha, \quad F_1^\alpha = \pi a U^\alpha \quad U^\alpha = \frac{v_0^\alpha}{1 - 2.84 a/b} \quad (1.7)$$

Таким образом, в области $r^3 \ll b^3$, т. е. в окрестности выделенной сферы поле скоростей жидкости, обтекающей систему сфер, имеет вид

$$v^\alpha = U^\beta [\delta_{\alpha\beta} - 3(n^\alpha n^\beta + \delta_{\alpha\beta}) a / 4r + (3n^\alpha n^\beta - \delta_{\alpha\beta}) a^3 / 4r^3] \quad (1.8)$$

Как и следовало ожидать, вблизи поверхности сферы поле скоростей аналогично полю скоростей вязкого потока, обтекающего одиночный шар, но скорость натекающего потока U отличается от v_0 .

Если $a^3 \ll b^3$, то существует область, где $r \gg a$ и $r^3 \ll b^3$, в которой еще законно использование выражения (1.8), поэтому скорость потока можно считать постоянной и равной U .

2. Прежде чем изучать конвективную диффузию в потоке, обтекающем систему сфер, рассмотрим задачу о конвективной диффузии на поверхности одиночной сферы, на которую натекает поток со скоростью U .

Уравнение конвективной диффузии имеет вид

$$\mathbf{v} \nabla c = D \Delta c \quad (2.1)$$

В сферической системе координат компоненты скорости v_r , v_θ могут быть выражены через функцию тока ψ

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.2)$$

$$\psi = -1/2 U \sin^2 \theta (r^2 - 3/2 ar + 1/2 a^3 / r)$$

В диффузионном пограничном слое, следуя работе В. Г. Левича [1], в уравнении оставим только наиболее существенные члены

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \quad (2.3)$$

при помощи преобразования Р. Мизеса перейдем от переменных r, θ к переменным ψ, θ , где

$$\psi = -\frac{3}{4} U (r - a)^2 \sin^2 \theta \quad (2.4)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], получим уравнение

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial c}{\partial t} \quad \left(\xi = (-\psi)^{1/2}, t = \frac{Da^2(3U)^{1/2}}{8} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right) \quad (2.5)$$

с граничными условиями

на поверхности сферы

$$c(0, t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.6)$$

в области вне пограничного слоя

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} c(\xi, t) = c_0 \quad (2.7)$$

распределение концентрации в потоке, попадающем в окрестность точки набегания

$$c(\xi, 0) = c_0, \quad \xi \neq 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.5) с граничными условиями (2.6) — (2.8) имеет решение, полученное В. Г. Левичем [1]

$$c(\xi, t) = \frac{c_0}{\Gamma(1/3)} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t}\right) \quad (2.9)$$

$$\gamma\left(\frac{1}{3}, x\right) = \int_0^x e^{-u} u^{-2/3} du, \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$$

Область применимости уравнения (2.2), а следовательно и решения (2.9), определяется условием $\partial c / \partial r \gg c_0 / R$, что выполняется, как непосредственно видно из (2.9), при выполнении неравенства $\pi - \theta \gg P^{-1/3}$.

Главные члены уравнения конвективной диффузии (2.1) в области $\pi - \theta \ll P^{-1/3}$ вдали от поверхности сферы ($r \gg a$) (в декартовых координатах с осью x вдоль направления натекающего потока) удовлетворяют уравнению, которое имеет вид уравнения теплопроводности

$$U \frac{\partial c}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

Допущение о постоянстве скорости U можно оправдать тем, что характерное расстояние вдоль оси x , на котором происходит изменение концентрации, как будет видно из полученного решения, имеет порядок $aP^{1/3}$, т. е. существенно превышает радиус сферы, т. е. размеры той области, в которой скорость потока заметно отличается от U .

Второе допущение, используемое при записи уравнения (2.11), связано с условием $|U \partial c / \partial x| \gg D |\partial^2 c / \partial x^2|$, выполнение которого для монотонно меняющейся концентрации следует из условия $P \gg 1$.

Если было бы известно граничное условие для уравнения (2.10) $c(0, y, z)$, то решение этого уравнения можно было бы записать в виде

$$c(x, y, z) = \int c(0, y', z') G(x, y - y', z - z') dy' dz' \quad (2.11)$$

$$G(x, y, z) = \frac{U}{4\pi Dx} \exp\left[-\frac{U(y^2 + z^2)}{4Dx}\right]$$

Функцию $c(0, y', z')$ можно определить следующим образом. Рассмотрим коническую поверхность с фиксированным углом $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx P^{-1/3}$.

Распределение концентрации на этой поверхности определяется формулой В. Г. Левича (2.9), если подставить для t значение $\theta = \pi - \varepsilon_0$. С точностью до членов порядка $1/P$ имеем $t = t_0 = 1/8 \pi D a^2 (3U)^{1/2}$. Теперь, считая фиксированным углом ε_0 и распределение концентрации на конической поверхности, предположим, что $P \rightarrow \infty$. Тогда уравнение конвективной диффузии (2.1) во всей области, в том числе и внутри конической поверхности, перейдет в уравнение конвективного переноса

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = 0 \quad (2.12)$$

В соответствии с уравнением (2.12), заданное на поверхности конуса распределение концентрации переносится внутри него по линиям тока. Таким образом, при $P \rightarrow \infty$ внутри конической поверхности распределение концентрации будет определяться выражением (2.9) с заменой t на t_0

$$c(\xi) = \frac{c_0}{\Gamma(1/3)} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t_0}\right) \quad (2.13)$$

К такому же выражению должно стремиться решение (2.11) при $P \rightarrow \infty$ достаточно далеко от поверхности сферы ($x \gg a$). Отсюда следует, что

$$c(0, y, z) = \frac{c_0}{\Gamma(1/3)} \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi^3}{9t_0}\right) \quad \left(\xi^2 = \frac{U}{2}(y^2 + z^2)\right) \quad (2.14)$$

При достаточно больших x выражение (2.11) с граничным условием (2.14) может быть записано в виде

$$\frac{c(x, y, z)}{c_0} = 1 - \frac{G(x, x, z)}{\Gamma(1/3)} \int_0^x \int_0^x \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi'^3}{9t_0}\right) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{U}{2Dx}(yy' + zz') - \frac{U}{4Dx}(y'^2 + z'^2) + \dots \right\} dy' dz' \quad (2.15)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}, x\right) = \int_x^\infty e^{-u} u^{-2/3} du$$

Вклад в интеграл от второго члена в фигурной скобке отсутствует в силу нечетности подынтегральной функции, а от третьего мал, если $x \gg y_*^2 U/D$. Но величина $y_* \approx (9t)^{1/3} U^{-1/2}$. Поэтому должно выполняться условие $x \gg (9t_0)^{2/3}/D \approx aP^{1/3}$, чтобы распределение концентрации в диффузионном следе совпало с распределением концентрации от точечного источника

$$\frac{c(x, y, z)}{c_0} = 1 - \frac{(9t_0)^{2/3}}{2\Gamma(1/3)Dx} \exp\left[-\frac{U(y^2 + z^2)}{4Dx}\right] \quad (2.16)$$

3. Рассмотрим теперь конвективную диффузию в потоке, обтекающем систему сфер, расположенных в узлах кубической решетки с периодом $b \gg aP^{1/3}$. Вне пограничных диффузионных слоев распределение концентрации будет определяться диффузионными следами от всех сфер, имеющих, согласно п. 2, вид диффузионных следов от точечных источников. Ввиду периодичности распределения концентрации в плоскости, перпендикулярной потоку ($x = \text{const}$), достаточно рассмотреть поток в окрестности сферы $(kb, 0, 0)$

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} A_n \frac{a}{x_n'} \sum_{m,l} \exp\left[-\frac{U(y_m'^2 + z_l'^2)}{4Dx_n'}\right] \quad (3.1) \\ x_n' = x - nb, \quad y_m' = y - mb, \quad z_l' = z - lb$$

Постоянная A_n может быть определена из условия, что разность потоков растворенного вещества через плоскости $x = x_1$ и $x = x_2$, из которых одна взята впереди, а другая позади k -й сферы ($a \ll kb - x_1 \ll b$)

$a \ll x_2 - kb \ll b$), равна диффузионному потоку на сферы, находящиеся внутри рассматриваемого слоя. Отсюда следует

$$I_k = c_0 U A_k \frac{a}{x} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{U r^2}{4Dx}\right) 2\pi r dr = 4\pi D c_0 a A_k \quad (3.2)$$

где I_k — полный диффузионный поток на поверхности k -й сферы.

Величину I_k можно рассчитать, рассмотрев уравнение конвективной диффузии в пограничном слое вблизи поверхности k -й сферы (2.3).

Соответствующие граничные условия можно определить, воспользовавшись (3.1).

Вблизи поверхности k -й сферы в области вне диффузионного пограничного слоя распределение концентрации создается диффузионными следами всех сфер в системе, расположенных слева от плоскости $x = bk$. Наиболее существенным в сумме оказывается слагаемое от $k-1$ -й сферы. Но так как период решетки $b \gg aP^{1/3}$, то диффузионный след от $k-1$ -й сферы имеет поперечную ширину, значительно большую, чем $aP^{-1/3}$, т. е. большую эффективной толщины диффузионного пограничного слоя. В продольном направлении в диффузионном следе концентрация существенно меняется на расстояниях $aPe^{1/3} \gg a$. В силу этих обстоятельств концентрация потока, натекающего на k -ю сферу в области вне диффузионного пограничного слоя, может считаться совпадающей с концентрацией, которая создавалась бы всеми диффузионными следами в k -м узле решетки, поэтому

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} c(\xi, t) = c_k, \quad c(\xi, 0) = c_k, \quad \xi \neq 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{c_k}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{A_n a}{(k-n)b} \sum_{m,l} \exp\left[-\frac{Ub(m^2+l^2)}{4D(k-n)}\right]$$

Тем самым задача сводится к задаче В. Г. Левича [1]. Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое определяется формулой (2.9) с заменой c_0 на c_k . Плотность диффузионного потока на поверхность k -й сферы равна

$$j = D \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{D(3U)^{1/2}}{2\Gamma(1/3)} \left(\frac{3}{t} \right)^{1/3} c_k \sin \theta \quad (3.4)$$

Полный диффузионный поток на поверхность k -й сферы

$$I_k = 2\pi a^2 \int_0^\pi j \sin \theta d\theta = 4\pi D \lambda b c_k$$

$$\lambda = \frac{(3U)^{1/2}}{2Db \Gamma(1/3)} \left(\frac{9\pi}{8} D a^2 \right)^{1/3} = 0.65 \frac{a}{b} P^{1/3} \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.2) и (3.5) следует, что

$$A_k = \lambda b c_k / a c_0. \quad (3.6)$$

Таким образом, для определения концентрации в окрестности k -го узла решетки получается следующее рекуррентное соотношение:

$$\frac{c_k}{c_0} = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda c_n}{(k-n)c_0} \sum_{m,l} \exp\left[-\frac{Ub(m^2+l^2)}{4D(k-n)}\right] \quad (3.7)$$

Пользуясь определением тэта-функции [5] $\vartheta_3(z|\tau)$

$$\vartheta_3(0|\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau m^2} \quad (3.8)$$

