ПМТФ, № 6, 1974

УДК 539.374

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ОТВЕРСТИЙ ДЛЯ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Методами теории функций комплексного переменного рассмотрена задача об отыскании оптимальной формы отверстия для перфорированной пластины при изгибе, ослабленной треугольной или квадратной сеткой отверстий. Критерием, определяющим оптимальную форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на контуре или требование зарождения пластической области сразу по всему контуру отверстия.

1. Для предотвращения концентрации напряжений представляет интерес отыскание контура тела, который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков.

Напомним соотношения теории изгиба жестких пластин [1].

Смещение пластины w, нормальное к ее поверхности, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta w = q(x, y)/D \tag{1.1}$$

Здесь $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины, $q(x, y)$ — поперечная нагрузка, h — толщина пластины, E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, Δ — оператор Лапласа. В случае $q = 0$ имеют место основные представления [2]

$$\begin{gathered} M_x + M_y = -4D(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi(z) \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1-\nu)[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad N_x - \\ - iN_y = -4D\Phi'(z) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь M_x, M_y и H_{xy} — соответственно удельные изгибающие и крутящий моменты, N_x и N_y — удельные поперечные силы, $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$.

2. Пусть имеется двоякопериодическая треугольная решетка с неизвестными криволинейными отверстиями, имеющими центры в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\omega_1 = 2, \ \omega_2 = 2e^{1/3 i\pi}$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке P_{mn} через L_{mn}, а внешность контуров L_{mn} — через D_z.

На неизвестном контуре отверстия L_{mn} граничные условия имеют вид

$$M_n = M_0, \ H_{nt} = 0, \ M_t = M_* = \text{const}, \ N_t = 0, \ N_n = 0 \tag{2.1}$$

(t и n обозначают направление касательной и нормали к контуру тела).

В случае упругого тела величина $M_* = \text{const}$ подлежит определению в процессе решения. Для упругопластического материала соотношение (2.1) представляет собой условие, накладываемое на развитие пластической зоны, т. е. сводится к требованию, чтобы пластическая зона в момент зарождения охватывала сразу весь контур отверстия, не проникая в глубь тела. В этом случае $M_* = \text{const}$ — заданная величина, например, при условии пластичности Треска — Сен-Венана $M_* = M_0 \pm \sigma_s h^2 / 4$ (σ_s — постоянная пластичности при растяжении), если $M_t M_n \leqslant 0$.

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного ζ с помощью преобразования $z = \omega(\zeta)$. Аналитическая функция осуществляет конформное отображение области D_z на область D_ζ в плоскости ζ, являющуюся внешностью окружностей Γ_{mn} радиуса λ с центрами в точках P_{mn}. На основании равенств [2]

(2.2) $$M_x + M_y = M_n + M_t \quad (\zeta = \lambda e^{i\theta})$$

$$M_t - M_n + 2iH_{nt} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\lambda^2 \overline{\omega'(\zeta)}} (M_y - M_x + 2iH_{xy})$$

и граничных условий (2.1) для определения трех аналитических функций $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$ и $\omega(\zeta)$ получаем нелинейную краевую задачу на Γ_{00}

(2.3) $$\operatorname{Re} \varphi(\zeta) = a$$

(2.4) $$\zeta^2 [\overline{\omega(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \psi(\zeta)] = \lambda^2 b \overline{\omega'(\zeta)}$$

$$a = -\frac{M_0 + M_*}{4D(1+\nu)}, \quad b = \frac{M_* - M_0}{2D(1-\nu)}$$

Граничное условие (2.4) можно преобразовать.

Из решения задачи Дирихле (2.3) следует, что в области D_ζ

(2.5) $$\varphi(\zeta) = a$$

С учетом (2.5) граничное условие (2.4) на Γ_{00} запишется в виде

(2.6) $$\zeta^2 \omega'(\zeta) \psi(\zeta) = \lambda^2 b \overline{\omega'(\zeta)}$$

Функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ ищем в виде рядов [3, 4]

(2.7) $$\psi(\zeta) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!}$$

(2.8) $$\omega(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!}$$

где $\gamma(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса

$$\gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(z - P_{mn})^2} - \frac{1}{P_{mn}{}^2} \right]$$

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты выражений (2.7), (2.8). Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, которая соединяет две конгруэнтные точки в D_ζ, следует, что

(2.9) $$a = -\frac{\pi(1-\nu)}{4\sqrt{3}(1+\nu)} \beta_2 \lambda^2, \quad \beta_0 = 0$$

Условия симметрии для перфорированной пластины с треугольной сеткой отверстий запишутся в виде

$$\varphi(\zeta e^{1/3 i\pi}) = \varphi(\zeta), \quad \psi(\zeta e^{1/3 i\pi}) = e^{-2/3 i\pi} \psi(\zeta)$$

$$\omega(\zeta e^{1/3 i\pi}) = e^{1/3 i\pi} \omega(\zeta)$$

и приводят к соотношениям

(2.10) $$\beta_{6k+2\pm 2} = A_{6k\pm 2} = 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots$$

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов представлений (2.7), (2.8) функций $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки $\zeta = 0$

$$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{6k+2}\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{6k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{6k+2}\lambda^{6k+2}\sum_{j=0}^{\infty} r_{3j+2,3k}\zeta^{6j+4} \tag{2.11}$$

$$\omega(\zeta) = \zeta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{6k}\lambda}{6k-1}\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right)^{6k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{6k}\lambda^{6k}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{3j,\,3k-1}}{6j+1}\zeta^{6j+1} \tag{2.12}$$

$$r_{jk} = \frac{(2j+2k+1)!\, g_{j+k+1}}{(2j)!\,(2k+1)!\, 2^{2j+2k+2}}$$

$$g_{j+k+1} = \sum_{m,\,n}{}' \frac{1}{T^{2j+2k+2}}, \qquad T = \frac{1}{2}P_{mn}$$

Подставляя в граничное условие (2.6) на контуре Γ_{00} ($\zeta = \lambda e^{i\theta}$) вместо $\psi(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ и $\overline{\omega'(\zeta)}$ их разложения в ряды Лорана и сравнивая коэффициенты при $e^{i6k\theta}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно β_{6k+2}, A_{6k}. Уравнения первого приближения имеют вид

$$c\beta_2 + A_6\gamma_0 + A_6\beta_8\lambda^{12}r_{32} = bc,\quad c\beta_8 + A_6\beta_2 = bA_6\lambda^{12}r_{32} \tag{2.13}$$

$$c\gamma_0 + A_6\gamma_1 + A_6\beta_2\lambda^{12}r_{32} = bA_6,\quad c = 1 + A_6\lambda^6 r_{02}$$

$$\gamma_j = \beta_2 r_{3j+2,0}\lambda^{6j+6} + \beta_8 r_{3j+2,3}\lambda^{6j+12} \quad (j = 0,\ 1)$$

Результаты расчета в первых двух приближениях даны в табл. 1, в которой $M_1 = M_0 / D\,(1 - \nu)$.

Таблица 1

Коэффициенты искомых функций	λ					
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
Первое приближение						
A_6	0.00003	0.00033	0.00188	0.00716	0.02136	0.05374
β_2/M_1	—1.03777	—1.08920	—1.17040	—1.29441	—1.48620	—1.79550
β_8/M_1	0.00003	0.00036	0.00219	0.00926	0.03170	0.09551
Второе приближение						
A_6	0.00003	0.00033	0.00188	0.00716	0.02137	0.05392
A_{12}	0.00000	0.00001	0.00065	0.00025	0.00075	0.00188
β_2/M_1	—1.03777	—1.08920	—1.17040	—1.29441	—1.48620	—1.79547
β_8/M_1	0.00003	0.00036	0.00219	0.00926	0.03171	0.09585
β_{14}/M_1	0.00000	0.00001	0.00007	0.00026	0.00043	—0.00187

Положив в (2.12) $\zeta = \lambda e^{i\theta}$, получим уравнение оптимальной формы отверстия

$$R = |\,\omega(\lambda e^{i\theta})\,| = f(\theta) \tag{2.14}$$

В первом приближени ı

$$R^2 = \lambda^2(d + d_1\cos 6\theta),\quad d = c^2 + \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{49}\lambda^{24}r_{32}{}^2\right)A_6{}^2 \tag{2.15}$$

$$d_1 = 2cA_6\left(\frac{1}{7}\lambda^{12}r_{32} - \frac{1}{5}\right)$$

Постоянная M_* равна

$$M_* = \frac{\pi}{\sqrt{3}}D(1-\nu)\beta_2\lambda^2 - M_0 \tag{2.16}$$

Для упругопластической пластины соотношение (2.16) представляет собой условие разрешимости исходной задачи.

3. Пусть имеется двоякопериодическая квадратная решетка с неизвестными криволинейными отверстиями, имеющими центры в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2i$$

Рассмотрим задачу об отыскании оптимальной формы отверстия для квадратной решетки. Для получения решения следует повторить рассуждения п. 2.

Приведем решение

$$\varphi(\zeta) = -\frac{M_0 + M_*}{4D(1+\nu)} - \frac{\pi}{8}\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta_2\lambda^2 \tag{3.1}$$

Функции $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ определяются рядами (2.7), (2.8). При этом

$$\beta_0 = 0, \ \beta_{4k} = A_{4k+2} = 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

Таблица 2

Коэффициенты искомых функций	λ					
	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
			Первое приближение			
A_4	0.00095	0.00478	0.01513	0.03694	0.07668	0.14250
β_2/M_1	—1.03305	—1.07756	—1.14649	—1.24479	—1.39320	—1.59478
β_6/M_1	0.00097	0.00516	0.01733	0.04597	0.10558	0.21805
			Второе приближение			
A_4	0.00097	0.00515	0.01733	0.04605	0.10671	0.22750
A_8	0.00000	0.00000	0.00008	0.00045	0.00197	0.00700
β_2/M_1	—1.03305	—1.07756	—1.14644	—1.24736	—1.38893	—1.56897
β_6/M_1	0.00100	0.00555	0.01986	0.05730	0.14658	0.34295
β_{10}/M_1	—0.00000	—0.00002	—0.00026	—0.00207	—0.01292	—0.06713

Результаты расчета в первых двух приближениях даны в табл. 2. Постоянная M_* равна

$$M_* = \frac{\pi}{2}D(1-\nu)\beta_2\lambda^2 - M_0 \tag{3.3}$$

Уравнение оптимальной формы отверстия в первом приближении имеет вид

$$R^2 = \lambda^2(d + d_1\cos 4\theta), \quad d = c^2 + A_4^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25}\lambda^{16}r_{21}^2\right) \tag{3.4}$$
$$d_1 = 2cA_4\left(\frac{1}{5}\lambda^8 r_{21} - \frac{1}{3}\right), \quad c = 1 + A_4\lambda^4 r_{01}$$

Поступила 11 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
2. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
3. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
4. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.