УДК 539.3

Л. А. Назаров

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЛЕКСИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Метод комплексирования, предложенный в [1], используется, как правило, для решения динамических задач теории упругости. Суть его заключается в разложении смещений в ряд по переменным x_i (одной или двум, причем на поверхностях $x_i = \mathrm{const}$ не задаются граничные условия) и сведении исходной системы уравнений динамики к серии одномерных волновых уравнений, которые решаются численно. При этом граничные условия и условия «склейки» между слоями (если они есть) должны быть однородными.

В данной работе предложен способ, позволяющий решать смешанные задачи.

Пусть в системе координат, допускающей разделение переменных в уравнениях Ляме (для определенности выбран двумерный случай),

$$\mu\Delta\mathbf{V} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{V} = \rho\ddot{\mathbf{V}},\ \mathbf{V} = (u,\ w) \tag{1}$$

(u, w — смещения по x_1, x_2, λ, μ — параметры Ляме, ρ — плотность) на координатной поверхности $x_2 = \mathrm{const}$ заданы условия равновесия

$$\sigma_{12} = \bar{\sigma}_{12},\ \sigma_{22} = \bar{\sigma}_{22} \tag{2}$$

($\{\sigma_{ij}\}$ — тензор напряжений, черта над величинами — значение по другую сторону границы) и условия

$$\sigma(u,\ \bar{u},\ w,\ \bar{w},\ \sigma_{ij}) = 0,\ \ \tau(u,\ \bar{u},\ w,\ \bar{w},\ \sigma_{ij}) = 0. \tag{3}$$

Набор функций σ, τ, имеющих физический смысл, невелик.

1. Жесткий контакт

$$\sigma = w - \bar{w},\ \tau = u - \bar{u}.$$

2. Контакт с разрывом смещений

$$\sigma = \sigma_{22} - P(w - \bar{w}),\ \tau = \sigma_{12} - T(u - \bar{u},\ \sigma_{22})$$

или дилатансией

$$\sigma = \sigma_{22} - D(u - \bar{u}),\ \tau = \sigma_{12} - T(u - \bar{u},\ \sigma_{22}),$$

где функции P, T, D, вообще говоря, нелинейны [2].

3. Свободные поверхности

$$\sigma = \sigma_{22},\ \tau = \sigma_{12}.$$

Выберем простейший случай — комбинацию 1 и 3: на части поверхности $X\left(x_2 = x_2^0 = \mathrm{const}\right)$ границы жестко скреплены, на остальной $\bar{X}$ свободны. Введем дискретизацию по x_2 с шагом h и запишем указанные условия и (2) с учетом закона Гука в виде

$$\mu\left(\frac{u - u_*}{h} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = \bar{\mu}\left(\frac{\bar{u}_* - \bar{u}}{h} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1}\right),\quad u = \bar{u},$$

$$\alpha\frac{w - w_*}{h} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1} = \bar{\alpha}\frac{\bar{w}_* - \bar{w}}{h} + \bar{\lambda}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1},\quad w = \bar{w}\ \text{при}\ x_1 \in X;$$

$$\mu\left(\frac{u - u_*}{h} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) = \bar{\mu}\left(\frac{\bar{u}_* - \bar{u}}{h} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1}\right) = 0,$$

$$\alpha\frac{w - w_*}{h} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x_1} = \bar{\alpha}\frac{\bar{w}_* - \bar{w}}{h} + \bar{\lambda}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = 0\ \text{при}\ x_1 \in \bar{X};$$

$$u_* = u(x_1,\ x_2 - h),\quad \bar{u}_* = \bar{u}(x_1,\ x_2 + h),\quad \alpha = \lambda + 2\mu,$$

откуда при $x_1 \in X$

(4) $$u = \bar{u} = bu_* + \bar{b}\bar{u}_* + h(\bar{b} - b)\frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$w = \overline{w} = aw_* + \bar{a}\overline{w}_* + h\frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\bar{\alpha} + \alpha}\frac{\partial u}{\partial x_1},$$

$$b = \mu/(\bar{\mu} + \mu),\ \bar{b} = 1 - b,\ a = \alpha/(\bar{\alpha} + \alpha),\ \bar{a} = 1 - a,$$

а при $x_1 \in \bar{X}$

(4)′ $$u = u_* - h\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad w = w_* - \delta h\frac{\partial u}{\partial x_1},$$

$$\bar{u} = \bar{u}_* + h\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_1},\quad \overline{w} = \overline{w}_* + \bar{\delta} h\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1},\quad \delta = \lambda/\alpha,\quad \bar{\delta} = \bar{\lambda}/\bar{\alpha}.$$

Пусть

(5) $$u = \sum_{n=0}^{N} U^n(x_2) S_n(x_1),\quad w = \sum_{n=0}^{N} W^n(x_2) C_n(x_1)$$

$(\{S_n,\ C_n\}$ — полная система функций).

Для декартовой системы координат $(x_1 = x,\ x_2 = y)$

$$\{S_n(x),\ C_n(x)\} = \{\sin k_n x,\ \cos k_n x\},\ k_n = \pi n/A$$

$(x = A$ — фиктивная граница [1]),

для цилиндрической $(x_1 = \theta,\ x_2 = r,\ A = \pi)$

$$\{S_n(\theta),\ C_n(\theta)\} = \{\sin n\theta,\ \cos n\theta\}$$

$(x_1 = r,\ x_2 = z)$, $S_n(r) = J_1(k_n r)$, $C_n(r) = J_0(k_n r)$ (в последнем случае k_n — корни уравнения $J_1(k_n A) = 0$, J_0, J_1 — функции Бесселя),

для сферической $(x_1 = \varphi,\ x_2 = R,\ A = \pi)$

$$S_n(\varphi) = P_n^1(\cos\varphi),\quad C_n(\varphi) = P_n^0(\cos\varphi)$$

$(P_n^0, P_n^1$ — полиномы Лежандра$)$.

Применим теперь к первым соотношениям (4) и (4)′ операцию $\int_0^A \ldots S_n(x_1)\,dx_1$, а ко вторым — $\int_0^A \ldots C_n(x_1)\,dx_1$ (используя при необходимости весовые функции) и после некоторых преобразований получим систему линейных уравнений для U^n, W^n, $\bar{U}^n$, $\overline{W}^n$:

(6) $$U^m = U_*^m - p_m W^m + \bar{b}\sum_{n=0}^{N}(Q_*^n + 2p_n W^n)A_{mn},$$

$$W^m = W_*^m - \delta p_m U^m + \bar{a}\sum_{n=0}^{N}(T_*^n + cp_n U^n)B_{mn},$$

$$\bar{U}^m = \bar{U}_*^m + p_m\overline{W}^m - b\sum_{n=0}^{N}(Q_*^n + 2p_n\overline{W}^n)A_{mn},$$

$$\overline{W}^m = \overline{W}_*^m + \bar{\delta}p_m\bar{U}^m - a\sum_{n=0}^{N}(T_*^n + cp_n\bar{U}^n)B_{mn},$$

$$Q_*^n = \bar{U}_*^n - U_*^n,\quad T_*^n = \overline{W}_*^n - W_*^n,\quad c = \delta + \bar{\delta},\quad m = 0, \ldots, N,\ p_n = hk_n,$$

$$A_{mn} = \int_0^A g(x_1) S_m(x_1) S_n(x_1)\,dx_1,\quad B_{mn} = \int_0^A g(x_1) C_m(x_1) C_n(x_1)\,dx_1,$$

$$g(x_1) = \begin{cases} 1 & x_1 \in X, \\ 0 & x_1 \in \bar{X}. \end{cases}$$

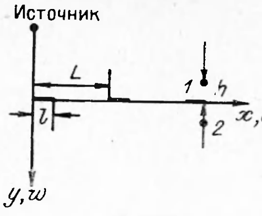

Рис. 1

Предельные случаи: $A_{mn}=B_{mn}=0$—свободные поверхности, $A_{mn}=B_{mn}=\delta_{mn}$ — жесткий контакт. Решение (6) трудностей не вызывает.

Если условия (3) нелинейны, то для определения смещений на $x_2=x_2^0$ необходимо организовывать итерационный процесс на каждом временном шаге.

С помощью предложенного подхода рассмотрим две задачи.

1. *Качественный контроль состояния межблочного контакта.*

В ряде работ (например, [3]) показано, что контакт двух блоков горных пород осуществляется не по всей поверхности, а лишь по незначительной ее части. Причем с увеличением нормального сжимающего напряжения σ_n площадь контакта (суммарная площадь «пятен») увеличивается. Принимая во внимание, что касательная прочность контакта $\tau_*=|\sigma_n|\,\mathrm{tg}\,\psi_*+\tau_0$ (ψ_* — «угол внутреннего трения», τ_0 — сцепление) и при превышении τ_* возможно динамическое явление (высвобождение запасенной энергии), можно по характеру изменения σ_n судить о тенденции поведения межблочного контакта и, если наблюдение организовано на нескольких нарушениях, участка массива в целом.

Итак, пусть импульсный точечный источник типа расширение — сжатие расположен в окрестности нарушения, причем берега последнего контактируют по некоторым участкам (рис. 1). По обеим сторонам нарушения на расстоянии h от него вертикально установлены однонаправленные датчики смещений. Источник генерирует волну, длина которой Λ много больше размера участков контакта l. Выше рассмотрен именно такой случай.

Результаты расчетов представлены на рис. 2. Смещения в верхней точке наблюдения — сплошные линии, в нижней — штриховые. За единицу выбрана максимальная амплитуда вертикального смещения в прямой волне в точке (0, 0), линии *1*—*3* отвечают $\zeta=L/l=\infty$, 10, 2 ($\zeta=\infty$ — жесткий контакт). Сигнал, излучаемый источником,— один период синусоиды. Здесь четко видно, что с уменьшением площади контакта происходит рост амплитуды первого вступления в точке *1* и падение в точке *2* (рис. 1). С течением времени эта разница значительно уменьшается. Превышение единицы амплитудой в верхней точке происходит из-за наличия свободных участков (известно, что на свободной поверхности смещения на фронте волны удваиваются).

Заметим, что точки наблюдения должны быть расположены на расстоянии, меньшем Λ, от линии контактов. В противном случае вся полезная информация пропадает вследствие наложения волн. Предложенная схема легко реализуема на прак-

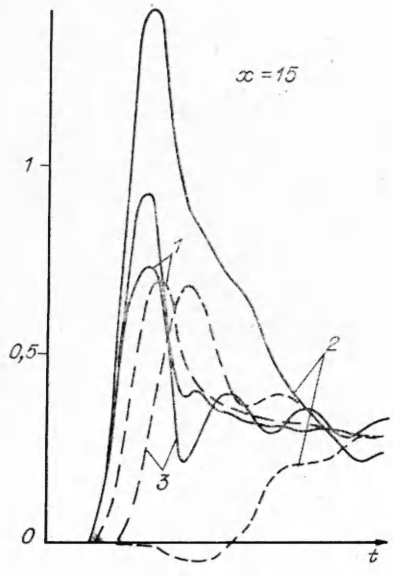

Рис. 2

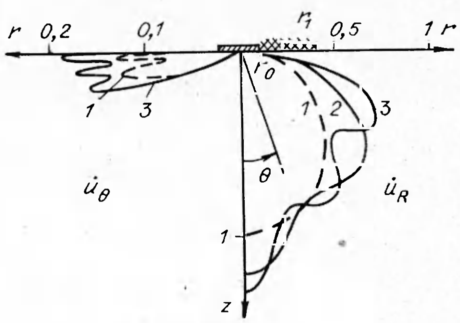

Рис. 3

тике и может дать возможность качественного контроля текущего состояния нарушения. Информационным параметром служит отношение амплитуд первого вступления в точках *1* и *2*.

Для получения количественных оценок необходимы экспериментальные исследования связи между нормальными усилиями и площадью контакта (типа задачи Герца).

2. *Способ усиления сигнала виброисточника.* Известно [4], что при работе поверхностного виброисточника продольные волны «уносят» всего от 7 до 15 % энергии. Рассмотрим один из способов усиления сигнала в продольном направлении: часть поверхности вокруг источника искусственно «зажимают» в вертикальном направлении. Не вдаваясь в технические подробности, выпишем граничные условия на поверхности $x_2 = 0$ (рис. 3):

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} -F(t) & x_1 \leqslant r_0, \\ 0 & x_1 > r_1, \end{cases} \quad w = 0 \quad r_0 < x_1 \leqslant r_1, \quad \tau = 0.$$

Здесь $F(t) = \sin \omega t \varepsilon(t)$; ε — функция Хевисайда; $\omega = 2\pi f$; f — частота; r_0 и r_1 — размеры источника и «зажатой» области. Задача решается в цилиндрической системе координат.

Согласно подходу, изложенному выше, сразу выпишем соотношения

$$\sum_{i=0}^{N} T_{mi} W^i = W_0^m, \quad U^m = U_*^m - p_m W^m, \quad m = 0, \ldots, N,$$

$$T_{mi} = \left(1 + \delta p_m^2\right) \delta_{mi} - \delta p_i^2 C_{mi},$$

$$W_0^m = \overline{W}_*^m + \delta p_m U_*^m + Q_m - W_*^0 C_{m0} - \sum_{i=1}^{N} \left(W_*^i + \delta p_i U_*^i\right) C_{mi},$$

$$C_{mi} = \int_0^A g(x_1)\, x_1 J_0(k_m x_1)\, J_0(k_i x_1)\, dx_1,$$

$$Q_m = 2F(t)\, J_1(k_m r_0) / \left(k_m J_0^2(k_m A)\right),$$

$$g(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } r_0 < x_1 \leqslant r_1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant x_1 \leqslant r_0,\ r_1 < x_1. \end{cases}$$

Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $\eta = 0{,}033$, $\gamma = 0{,}3$ ($\eta = f r_0 / V_p$, $\gamma = V_s / V_p$, V_p и V_s — скорости продольных и поперечных волн).

На рис. 3 приведены угловые диаграммы радиальных и тангенциальных скоростей смещений (за единицу выбрано максимальное значение $\dot{u}_R$ при $\xi = 0$, $\xi = r_1/r_0 - 1$) $\dot{u}_R = \dot{u} \sin\theta + \dot{w} \cos\theta$, $\dot{u}_\theta = \dot{u}\cos\theta - \dot{w}\sin\theta$ для $\xi = 0$; 4; 9 (линии *1*—*3*). Их анализ позволяет сделать вывод о положительном эффекте «зажатия» поверхности. В зависимости от значений ξ, η, γ амплитуда радиальных скоростей может увеличиваться на 30% и более. С уменьшением γ улучшается фокусировка в вертикальном направлении и сильнее подавляется компонента $\dot{u}_\theta$.

В заключение отметим, что предложенный подход непригоден для изучения «тонких» эффектов, таких как анализ концентрации напряжений в особых точках (например, в задаче 2 $x_2 = r_0$, здесь используется метод факторизации [5]), из-за того, что нужно выбирать конечным верхний предел суммирования в (5). Он эффективен для интегральной оценки параметров процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михайленко Б. Г.** Нестационарные сейсмические поля в неоднородных средах (численное исследование динамики волн): Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1982.
2. **Ревуженко А. Ф.** Вариационные постановки краевых задач разрушения // ПМТФ.— 1980.— № 4.

3. **Brown S. R., Scholz C. H.** Closure of random elastic surfaces in contact // J. Geophys. Res.— 1985.— V. 90, N B7.
4. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наук. думка, 1981.
5. **Партон В. З., Перлин П. И.** Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981.

г. Новосибирск *Поступила 12/VII 1991 г.*

УДК 539.3

Н. И. Александрова, И. В. Ефимова

ДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ПОДКРЕПЛЕННУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

Исследование прочности подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках необходимо для определения пределов применимости различных конструкций в машиностроении и строительстве. Этим объясняется большое число публикаций по разработке теории и методов расчета ребристых оболочек (см. обзор [1]). При нестационарном воздействии влияние ребер жесткости на напряженно-деформированное состояние и кинематику полых цилиндрических оболочек, погруженных в жидкость, рассматривалось в [2—4]. Основное внимание в [2] уделено изучению цепных напряжений в центральном сечении при действии плоской волны. В [3] исследуются радиальные перемещения при осесимметричной нагрузке в середине шпации. В [4] взаимодействие жидкости с оболочкой учитывалось по гипотезе плоского отражения. Поведение изгибных напряжений в подкрепленных оболочках практически не изучено.

В данной работе оцениваются изгибные и цепные напряжения и смещения периодически подкрепленных оболочек при траверзном воздействии плоской ступенчатой волны давления. Численное решение поставленной задачи получено при помощи разложения в ряд Фурье по угловой координате и конечных разностей по остальным координатам. Проведено сравнение численных и аналитических результатов. Определены коэффициент динамичности и время, начиная с которого эти результаты совпадают.

1. Исследуется нестационарное воздействие плоской ступенчатой волны давления на бесконечно длинную тонкую упругую цилиндрическую оболочку, периодически подкрепленную переборками и помещенную в идеальную сжимаемую жидкость. Оболочка либо полая, либо заполнена той же жидкостью, что и снаружи. Фронт падающей волны параллелен оси оболочки. Движение оболочки описывается линейными уравнениями классической теории Кирхгофа — Лява, возмущения в жидкости — волновым уравнением для потенциала скорости. Уравнения движения для m-й формы колебаний по углу θ имеют вид

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2}\frac{m^2}{R^2}u_m + \frac{1+\nu}{2}\frac{m}{R}\frac{\partial v_m}{\partial x} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w_m}{\partial x}, \tag{1.1}
$$

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} = \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2}\frac{m}{R}\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{m^2}{R^2}v_m - \frac{m}{R^2}w_m +
$$

$$
+ \frac{\delta^2}{12R^2}\left\{2(1-\nu)\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \frac{m^2}{R^2}v_m - \frac{m^3}{R^2}w_m + (2-\nu)\,m\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}\right\},
$$

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} = -\frac{\nu}{R}\frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{m}{R^2}v_m - \frac{w_m}{R^2} - \frac{\delta^2}{12}\left[\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} - \frac{2m^2}{R^2}\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{m^4}{R^4}w_m - \frac{m}{R^2}(2-\nu)\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{m^3}{R^4}v_m\right] - \frac{p_{\Sigma,m}}{\rho\delta c^2},
$$