

Т а б л и ц а 2

α_1	α_2	β_1	β_2	$\delta, \%$
0	0	0	0	4,6
0	0	-0,093	0	2,3

в пределах $(0 \div 0,46)$, $(0 \div 0,43)$, $(0 \div 0,64)$, а коэффициенты теплопроводности исходных компонентов равны $\lambda_1 = 0,140$, $\lambda_2 = 0,153$, $\lambda_3 = 0,613$. В табл. 2 приведены расчетные значения α_1 , α_2 , β_1 , β_2 по формуле (13) и соответствующие им значения максимальной ошибки аппроксимации δ .

Случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, отвечает аппроксимации промежуточных бинарных компонентов по формуле Лихтенеккера (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хантли Г. Анализ размерностей.— М.: Мир, 1970.
2. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
3. Lichteneker K. Zur Wider standsberechnung mischkristallfreie Legierungen // Phys. Z.— 1909.— Bd 10, N 25; 1929.— N 22.
4. Кори Г., Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1968.
5. Мухамедзанов Г. Х., Усманов А. Г. Теплопроводность органических жидкостей.— Л.: Химия, 1971.
6. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов.— Л.: Энергия, 1974.
7. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций.— М.: Мир, 1968.
8. Чердынченко Г. И., Фройштетер Г. Б., Ступак П. М. Физико-химические теплофизические свойства смазочных материалов.— Л.: Химия, 1986.
9. Кучеров В. Г. Теплофизические свойства водонефтяных эмульсий и методика их расчета для условий сбора и подготовки нефти: Дис. канд. техн. наук.— М., 1987.
10. Расторгуев Ю. Л., Ганиев Ю. А. Теплопроводность жидких растворов // ИФЖ.— 1968.— Т. 14, № 4.

г. Москва

Поступила 9/1 1990 г.

УДК 539.3 : 534.1

А. А. Ляпин, А. Н. Румянцев, М. Г. Селезнев

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Рассматривается задача о возбуждении установившихся гармонических колебаний в упругом двухслойном полупространстве со сферической полостью жестким массивным штампом, действующим на плоскую поверхность. Деформация среды предполагается осесимметричной. Решение краевой задачи разбивается на два этапа. На первом исследуется задача о возбуждении установившихся гармонических колебаний в двухслойном упругом полупространстве с заглубленной сферической полостью жестким круглым невесомым штампом с плоским основанием. Краевая задача с учетом условий излучения сводится к системе интегрофункциональных уравнений, изучаемой методами приближенной факторизации матриц-функций и асимптотическими методами. В предположении, что амплитуда действующей на штамп нагрузки постоянна, находятся закон распределения контактных напряжений и амплитудно-частотные характеристики точек подошвы штампа. На втором этапе учитывается влияние массы штампа, для чего рассматривается уравнение его движения как жесткого массивного тела при воздействии на него заданной внешней нагрузки и реакции упругого сложного основания, которая в заданном частотном диапазоне определяется на первом этапе.

Приводятся результаты исследования основных закономерностей поведения амплитудно-частотных характеристик в зависимости от массы штампа, расположения полости в среде при различных соотношениях жесткостей слоя и полупространства.

1. Пусть упругая среда занимает в цилиндрической системе координат (R, z, θ) область $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{R > 0, z < 0, \theta \in (0, 2\pi), r = \sqrt{R^2 + (z+h)^2} > a\}$, $D_2 = \{R > 0, \theta \in (0, 2\pi), z \in (0, h_1)\}$, $\{a, h\}$ — радиус полости и величина заглубления ее центра в полупространстве. Свойства среды в области D_j описываются параметрами μ_j (модулем сдвига) и V_{pj}, V_{sj} (скоростями распространения продольных и поперечных волн).

Круглый жесткий невесомый штамп с плоским основанием радиуса b ($R < b$) совершает гармонические колебания с частотой ω на поверхности слоя $z = h_1$ под действием сосредоточенного усилия

$$(1.1) \quad P(R, t) = p\delta(R - R_0)\exp(-i\omega t).$$

Контакт штампа со слоем и слоя с полупространством предполагается жестким. На границе области D вне штампа задаются условия отсутствия напряжений:

$$(1.2) \quad z = h_1: \sigma_{zz} = 0, \tau_{Rz} = 0, r = a: \sigma_{rr} = 0, \tau_{r\varphi} = 0.$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии. Сферическая система координат (r, φ, θ) ($r \in (a, \infty)$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in (0, 2\pi)$) связана с центром полости. Угол φ отсчитывается от вертикали по часовой стрелке. В дальнейшем все соотношения приводятся в безразмерных параметрах. Линейные размерные параметры получаются из безразмерных умножением на размерный радиус полости a , а величины, имеющие размерность напряжений, получаются умножением соответствующих безразмерных параметров на модуль сдвига μ_1 .

Амплитудные функции $\mathbf{u}^{(j)}$ смещений точек области D_j отыскиваются в виде

$$(1.3) \quad \mathbf{u}^{(2)} = \{u_z^{(2)}, u_R^{(2)}\}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \{u_z^{(1)}, u_R^{(1)}\} = \mathbf{u}^{(1,1)} + \mathbf{u}^{(1,2)},$$

$$u_R = \int_{\Gamma} \tilde{u}_R \alpha J_1(\alpha R) d\alpha, \quad u_R = u_R^{(2)} \quad \text{или} \quad u_R = u_R^{(1,2)},$$

$$u_z = \int_{\Gamma} \tilde{u}_z \alpha J_0(\alpha R) d\alpha, \quad u_z = u_z^{(2)} \quad \text{или} \quad u_z = u_z^{(1,2)},$$

$$\tilde{u}_R^{(1,2)} = \tilde{X}_2 \alpha^2 M(\alpha, z) + \tilde{X}_1 \alpha S(\alpha, z),$$

$$\tilde{u}_z^{(1,2)} = -\tilde{X}_2 \alpha L(\alpha, z) + \tilde{X}_1 R(\alpha, z),$$

$$\tilde{u}_R^{(2)} = [\tilde{R}_2 \alpha^2 M_{\text{H}}(\alpha, z) + \tilde{R}_1 \alpha S_{\text{H}}(\alpha, z) + \tilde{q}_2 \alpha^2 M_b(\alpha, z) + \tilde{q}_1 \alpha S_b(\alpha, z)] \gamma,$$

$$\gamma = \mu_1 / \mu_2,$$

$$\tilde{u}_z^{(2)} = [-\tilde{R}_2 \alpha L_{\text{H}}(\alpha, z) + \tilde{R}_1 R_{\text{H}}(\alpha, z) - \tilde{q}_2 \alpha L_b(\alpha, z) + \tilde{q}_1 R_b(\alpha, z)] \gamma.$$

Контур Γ проводится в соответствии с принципом предельного поглощения и в данном случае совпадает с вещественной положительной полуосью всюду, за исключением полюсов и точек ветвления подынтегральной функции, которые обходятся снизу.

Выражения для функций $M, S, L, R, M_{\text{H}}, S_{\text{H}}, M_b, S_b, L_{\text{H}}, R_{\text{H}}, L_b, R_b$ приведены в [1]. Тильдой обозначено применение преобразования Ханкеля к функциям X_j, R_j, q_j , которые имеют смысл нормальных или касательных напряжений на одной из плоскостей $z = 0$ или $z = h_1$, α — параметр преобразования Ханкеля:

$$(1.4) \quad \mathbf{u}^{(1,1)} = \{u_r^{(1,1)} \sin \varphi + u_{\varphi}^{(1,1)} \cos \varphi, u_r^{(1,1)} \cos \varphi - u_{\varphi}^{(1,1)} \sin \varphi\}.$$

Функции $u_r^{(1,1)}, u_{\varphi}^{(1,1)}$ определяют смещения в пространстве со сферической полостью единичного радиуса при условно заданных на поверхности полости распределенных усилиях $\sigma_{rr}|_{r=1} = Y_1(\varphi), \tau_{r\varphi}|_{r=1} =$

$= Y_2(\varphi)$. Указанные функции находятся следующим образом:

$$(1.5) \quad u_r^{(1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n \frac{d}{dr} h_n^{(1)}(\theta_{11}r) + \frac{B_n}{r} h_n^{(1)}(\theta_{12}r) \right\} P_n(\cos \varphi),$$

$$u_\varphi^{(1,1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{r} h_n^{(1)}(\theta_{11}r) + B_n \frac{d}{dr} (r h_n^{(1)}(\theta_{12}r)) / (n(n+1)r) \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi} (P_n(\cos \varphi)).$$

Здесь $A_n = \sqrt{(2/\pi)}(Y_{1n}a_{1n} - Y_{2n}a_{2n})(\Delta_n)^{-1}$; $\Delta_n = a_{1n}a_{4n} - a_{2n}a_{3n}$; $B_n = \sqrt{(2/\pi)}(Y_{2n}a_{1n} - Y_{1n}a_{3n})(\Delta_n)^{-1}$; $h_n^{(1)}(x)$ — сферические функции Ханкеля; $P_n(\cos \varphi)$ — полиномы Лежандра; a_{jn} — известные функции приведенных частот [2]. После удовлетворения граничным условиям (1.2) при $r = 1$ (первое уравнение системы) и условиям стыковки (два последующих уравнения) получим систему интегрофункциональных уравнений относительно X_j, R_j, q_j ($j = 1, 2$):

$$(1.6) \quad \mathbf{Y}(\varphi) - \int_{\Gamma} \mathbf{G}(\alpha, \varphi) \tilde{\mathbf{X}}(\alpha) d\alpha = 0, \quad \tilde{\mathbf{X}}(\alpha) + \tilde{\mathbf{T}}(\alpha) = \tilde{\mathbf{R}}(\alpha),$$

$$\mathbf{P}(\alpha) \tilde{\mathbf{X}}(\alpha) + \tilde{\mathbf{V}}(\alpha) = \gamma \mathbf{Q}(\alpha) \tilde{\mathbf{R}}(\alpha) + \gamma \mathbf{S}(\alpha) \tilde{\mathbf{q}}(\alpha),$$

$$\mathbf{V}_* = \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n+1} \left\{ \mathbf{f} A_n \exp(-h\lambda_{11}) P_n \left(\frac{i\lambda_{11}}{\theta_{11}} \right) + \mathbf{g} B_n \exp(-h\lambda_{12}) P_n \left(\frac{i\lambda_{21}}{\theta_{21}} \right) \right\},$$

$$\mathbf{V}_* = \{\tilde{V}_1(\alpha), \tilde{V}_2(\alpha), \tilde{T}_1(\alpha), \tilde{T}_2(\alpha)\},$$

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2\}, \quad \mathbf{R} = \{R_1, R_2\}, \quad \mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2\},$$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}, \quad \mathbf{V} = \{V_1, V_2\}, \quad \mathbf{T} = \{T_1, T_2\},$$

$$\mathbf{f} = \{f_k\}, \quad \mathbf{g} = \{g_k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

($\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}$ — матрицы-функции второго порядка с компонентами $G_{nm}, P_{nm}, Q_{nm}, S_{nm}$ ($n, m = 1, 2$), являющимися функциями параметра преобразования Ханкеля α и упругих постоянных среды). При этом G_{nm}, P_{nm} имеют единственный полюс на положительной вещественной полуоси, а Q_{nm}, S_{nm} — мероморфные функции, имеющие конечное число полюсов на R^+ :

$$f_1 = \theta_{11}^{-1}, \quad f_2 = -\frac{\alpha}{\theta_{11}^2 \lambda_{11}}, \quad f_3 = \frac{2\alpha^2 - \theta_{11}^4 \theta_{21}^{-2}}{\theta_{11} \lambda_{11}}, \quad f_4 = \frac{2\alpha}{\theta_{11}},$$

$$g_1 = \alpha \theta_{21}^{-1} \lambda_{21}^{-1}, \quad g_2 = -\theta_{21}^{-1}, \quad g_3 = 2\alpha \theta_{21}^{-1}, \quad g_4 = \frac{\alpha^2 + \lambda_{21}^2}{\theta_{21}^2 \lambda_{21}},$$

$$\lambda_{ij} = \sqrt{\alpha^2 - \theta_{ij}^2}, \quad \theta_{1j} = \frac{\omega a}{V_{pj}}, \quad \theta_{2j} = \frac{\omega a}{V_{sj}} \quad (i, j = 1, 2),$$

$$G_{nm}(\alpha, \varphi) = \Delta_R^{-1}(\alpha) \sum_{j=1}^2 G_{nm}^{(j)}(\alpha, \varphi) \exp(-\lambda_{j1}(-\cos \varphi + h)).$$

Выражения для $G_{nm}^{(j)}, P_{nm}, Q_{nm}, S_{nm}$ ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

С учетом того, что в области контакта напряжения q_j неизвестны, добавим к системе (1.6) уравнение, характеризующее равенство смещений в слое под штампом заданной функции $\tilde{W}_*(t)$; оно замыкает систему (1.6) и может быть записано как

$$(1.7) \quad \int_{\Gamma} [-\tilde{R}_2 \alpha L_N(\alpha) + \tilde{R}_1 R_N(\alpha) + \tilde{q}_1 R_b(\alpha)] J_0(\alpha R) \alpha d\alpha \exp(-i\omega t) = W_*(t).$$

Исследуем полученную систему (1.6), (1.7). При условии полного заглубления полости в полупространство ($h > 1$) на основании теоремы

Арцела [3] нетрудно показать, что оператор

$$K \cdot \tilde{X} = \int_{\Gamma} G(\alpha, \varphi) \cdot \tilde{X}(\alpha) d\alpha$$

является вполне непрерывным в пространстве $\mathcal{L}^2((-\pi, \pi))$. При условии $h \gg 1$ он становится малым с оценкой

$$(1.8) \quad \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{m=1}^2 \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{\Gamma} G_{im}(\alpha, \varphi) \tilde{X}_m(\alpha) d\alpha \right|^2 d\varphi} < \\ < h^{-1} \sqrt{2\pi} \theta_{11} (1 + 3V_{s1}^2 V_{p1}^{-2}), \quad \left| \int_0^{\infty} R X_1(R) dR \right| < 1.$$

Непрерывность функций, определяющих элементы матриц P, Q, S и векторов \tilde{T}, \tilde{V} , совместно с условием (1.8) позволяет отыскивать функции Y_j, X_j, R_j, q_j ($j = 1, 2$) в виде разложений по малому параметру h^{-1} [4]:

$$(1.9) \quad f = f^{(0)} + h^{-1} f^{(1)} + \dots, \quad f = Y_j, X_j, R_j, q_j \quad (j = 1, 2).$$

При этом контурные интегралы оцениваются асимптотическими методами с точностью, необходимой для нахождения каждого последующего члена в разложении (1.9). Для определения $q_j^{(b)}$ надо на каждом этапе методом последовательных приближений решать сингулярное интегральное уравнение (1.7) с правой частью, зависящей от предыдущих членов разложения $q_j^{(i-1)}, X_j^{(i-1)}, R_j^{(i-1)}, Y_j^{(i-1)}$; функции $q_j^{(0)}$ находятся решением контактной задачи для вибрирующего штампа на двухслойной среде без полости. Для решения уравнения используются методы приближенной факторизации матриц-функций [5].

2. Предположим, что штамп является массивным и обозначим его массу через m . Учитывая, что движение штампа вызывается приложенной к нему нагрузкой, изменяющейся по закону (1.1), уравнение его движения может быть записано как

$$(2.1) \quad m\ddot{W}_* = (T_* - Q_*) \exp(-i\omega t), \\ T_* = 2\pi a^{-2} \rho R_0, \quad Q_* = 2\pi \mu_1 a \int_0^b R q_1 dR$$

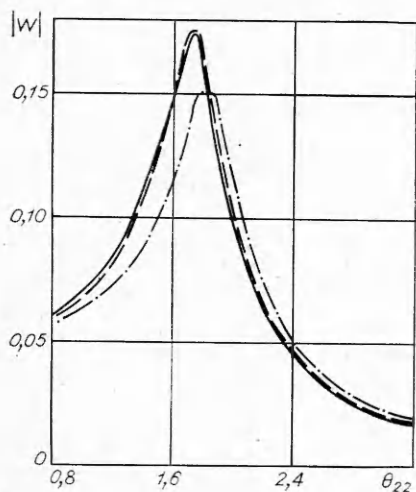
или через амплитудные функции с учетом $\ddot{W}_* = W \exp(-i\omega t)$

$$(2.2) \quad W = (Q - T)/(\theta_{22}^2 M), \quad M = mV_{s2}^2/(\mu_2 a^3), \quad Q = Q_*/(\mu_2 a), \quad T = T_*/(\mu_2 a).$$

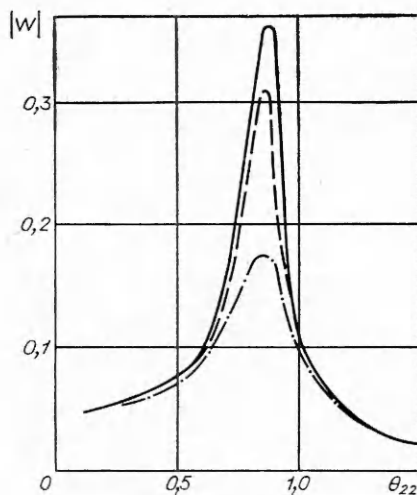
На основе совместного решения уравнений (1.6), (1.7), (2.2) можно изучать влияние массы штампа, расположения полости в среде, других параметров задачи на поведение амплитуд смещений точек среды, опираясь на расчетные формулы (1.3) — (1.5).

В качестве примера расчета амплитудно-частотных характеристик точек среды приводятся зависимости амплитудных значений перемещений W от частоты θ_{22} для различных значений масс штампа и величины заглубления полости. Для значений $M = 4$ и 26 на рис. 1 и 2 изображено поведение $|W|$ в зависимости от θ_{22} ; сплошная линия отвечает $h^{-1} = 0$, штриховая — $h^{-1} = 0,3$, штрихпунктирная — $h^{-1} = 0,5$; $h_1 = 1$, $V_{s2} = = 300$ м/с, $V_{s1} = 600$ м/с, $V_{pj} = 2V_{sj}$ ($j = 1, 2$).

Как видно из приведенных графиков, частота ограниченного резонанса слабо зависит от положения и размеров полости при фиксированной массе штампа. Зависимость же амплитуды ограниченного резонанса как от массы штампа, так и от размеров и величины заглубления полости в рамках указанных ограничений существенна. При этом, если зависи-



Р и с. 1



Р и с. 2

мость частоты ограниченного резонанса от массы носит тот же характер, что и при отсутствии полости [6], ее наличие практически всегда приводит к уменьшению амплитуды первого резонанса при любых массах штампа.

При увеличении параметра h^{-1} ($h^{-1} \in (0; 0,5)$) для любых M указанное уменьшение амплитуды первого резонанса является монотонным и может изменить характер поведения лишь при приближении полости к плоскости $z = 0$ ($h^{-1} \in (0,5; 1)$), когда существенно сказываются волны типа рэлеевских. Изучение второго и последующих резонансов позволяет сделать вывод о том, что наличие полости может привести как к уменьшению, так и к росту максимальной амплитуды по величине, пропорциональную изменению амплитуды первого резонанса, отнесенному к значению приведенной частоты соответствующего резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боев С. И., Румянцев А. Н., Селезнев М. Г. Решение задачи о возбуждении волн в упругом двухслойном полупространстве // Методы расширения частотного диапазона вибросейсмических колебаний. — Новосибирск: ИГГ СО АН СССР, 1987.
2. Бабешко В. А., Селезнева Т. Н., Селезнев М. Г., Соколов В. П. Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость // ПММ. — 1983. — Т. 47, вып. 1.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
4. Румянцева Т. Г., Селезнев М. Г., Чепиль М. В. Динамическая контактная задача для двухслойного полупространства с полостью // ПММ. — 1989. — Т. 53, вып. 2.
5. Бабешко В. А., Ворович И. И., Селезнев М. Г. Вибрация штампа на двухслойном основании // ПММ. — 1977. — Т. 41, вып. 1.
6. Ворович Е. И., Прихина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полугораниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 2.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 21/IX 1989 г.,
в окончательном варианте — 26/I 1990 г.