

**ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ГАЗА
ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО ЗАКОНУ ДВИЖЕНИЯ
ФРОНТА**

В. В. Адушкин, И. В. Немчинов

(Москва)

Предложен метод приближенного определения параметров газа за фронтом ударной волны по известному закону движения фронта. Метод, являющийся некоторым видоизменением метода тонкого слоя Г. Г. Черного, основан на вычислении производных основных газодинамических величин в лагранжевых координатах на фронте ударной волны таким же образом, как это делалось ранее Л. И. Седовым для производных в эйлеровых координатах. По известной точной величине производной давления на фронте волны проводится линейная экстраполяция давления по массе движущегося газа. Вычисление остальных параметров течения производится по точным уравнениям.

Проведено сопоставление полученных таким образом результатов с результатами некоторых точных расчетов газодинамических движений (сильный взрыв, взрыв с противодавлением). Показано, что имеет место вполне удовлетворительное согласие результатов точных и приближенных расчетов. Предложено использовать указанный метод для неадиабатических течений с переменным показателем адиабаты γ .

В монографии [1] исследована связь между законом движения фронта ударной волны и величинами производных давления p , плотности ρ и скорости u по эйлеровой координате r в точке фронта и предлагается использовать значения этих производных для линейной экстраполяции параметров в некоторой области вблизи фронта. Однако область, где такая экстраполяция достаточно точна в некоторых задачах (например, в задаче о сильном взрыве [1]), будет сравнительно невелика. Действительно, согласно точному решению задачи о точечном взрыве в сферическом случае на расстоянии от фронта всего лишь 4% радиуса фронта R (но где сосредоточена примерно половина всей массы воздуха, захваченного ударной волной), ошибка при линейной экстраполяции в величине давления p составляет около 15% и в величине плотности ρ в 2,5 раза, так как величины производных $\partial p/\partial r$ и $\partial \rho/\partial r$ изменяются на этом расстоянии в несколько раз. Успех метода тонкого слоя [2-5] в решении задач о приближенном определении параметров за сильными ударными волнами основан на правильном использовании факта сильного повышения плотности газа в γ раз, причем $\gamma \gg 1$. В тонком слое толщиной δ порядка $R/\nu\gamma$ вблизи фронта ударной волны радиуса R сосредоточена основная доля массы газа ($\nu = 3,2,1$ соответственно для сферического, цилиндрического и плоского случаев). При очень сильном сжатии ($\gamma \rightarrow \infty$) слой весьма узок ($\delta \rightarrow 0$), и все частицы его движутся практически с одинаковой скоростью u , изменяющейся лишь со временем, т. е. $u = u(t)$, и, следовательно, с одинаковым ускорением du/dt и, согласно закону Ньютона, с одинаковым градиентом сил $\partial p/\partial m$, т. е. при сильном сжатии профиль давления p линеен по массе газа ¹ m .

Величину производных $\partial p/\partial m$, $\partial \rho/\partial m$ и du/dm на фронте ударной волны можно вычислить точно, исходя из дифференциальных уравнений газовой динамики, конечных соотношений на фронте ударной волны и закона движения фронта. Точные производные можно использовать для определения параметров за фронтом ударной волны путем линейной экстраполяции всех величин от известных значений на фронте. Из сказанного выше ясно, что наклон профиля давления в сжатом слое определяется главным образом чисто механическими причинами. Если приходится определять давление и вдали от фронта, то в силу низких плотностей в этой области (из закона сохранения массы) там нельзя ожидать значительных перепадов давления [5], и поэтому линейная экстраполяция давления может быть удовлетворительной даже вплоть до центра сильного взрыва. Указанные физические соображения достаточно обосновывают предположение о линейности профиля давления. Прибегать же к линейной экстраполяции других величин, вообще говоря, нет необходимости.

Для определения других величин за фронтом волны можно воспользоваться снова самими уравнениями газовой динамики. Так, при известной величине давления $p(m, t)$ распределение плотности можно вычислить, исходя из конечного соотношения — урав-

¹ Определение всех параметров в работах [2-5] производится путем разложения функций в ряды по $1/\gamma$. Можно предложить некоторое видоизменение этого метода, которое и рассматривается ниже.

нения сохранения энтропии S в частице или уравнения для ее изменения со временем t в данной частице ($m = \text{const}$) для неадиабатических движений, причем это уравнение, в сущности говоря, является обыкновенным дифференциальным уравнением. Путем интегрирования удельного объема v ($v = 1/\rho$) по лагранжевой координате m можно определить эйлерову координату r и, следовательно, скорость u .

Такая процедура очень близка к процедуре, применяемой в первом приближении метода тонкого слоя [2-5], но не совпадает с ним тождественно (в частности, при определении величины производной давления в лагранжевых координатах).

Для общности рассмотрены движения газа с переменным показателем адиабаты k , подводом или отводом тепла (например, объемным высвечиванием из газа). Изложенный метод можно развить для исследования процессов релаксации, если они не заканчиваются в узкой зоне вблизи фронта ударной волны (иначе следует рассматривать задачу о структуре фронта скачка), а протекают и в зоне изменения давления и плотности за фронтом ударной волны.

1. Рассмотрим одномерные ($v = 1, 2, 3$), нестационарные движения газа с учетом высвечивания из единицы массы в единицу времени f (или, наоборот, энерговыделения). Уравнения сохранения количества движения и неразрывности имеют обычный вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + r^{v-1} \frac{\partial p}{\partial m} = 0, \quad u = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$r^{v-1} \frac{\partial r}{\partial m} = v, \quad r^{v-1} \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{uv}{r}(v-1), \quad v = \frac{1}{\rho} \quad (1.2)$$

В уравнении энергии добавляется правая часть — интенсивность высвечивания f

$$\frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} = -f, \quad f = f(p, v, m, t) \quad (1.3)$$

Уравнение состояния реального газа можно записать в обычном виде, вводя эффективный показатель адиабаты k

$$e = \frac{pv}{k-1}, \quad k = k(p, v) \quad (1.4)$$

Эффективный показатель адиабаты k и интенсивность источника или стока энергии f считаются заданными функциями своих аргументов.

Система уравнений (1.1)–(1.4) относительно p, u, v позволяет вычислить производные $\partial p / \partial m, \partial u / \partial m, \partial v / \partial m$ на некоторой линии $m = M(t)$, где заданы сами функции, например на фронте ударной волны, где они все определяются параметрами перед фронтом и, скажем, скоростью фронта D — величиной, чаще всего определяемой при экспериментальных исследованиях нестационарных движений газа. Для простоты будем считать плотность газа перед фронтом постоянной и, кроме того, допустим, что $R \gg R_0$, где R_0 — начальный радиус движения фронта ударной волны; тогда закон движения фронта волны

$$\frac{dM}{dt} = \rho_0 R^{v-1} D, \quad M = \frac{1}{v} \rho_0 R^v, \quad D = \frac{dR}{dt} \quad (1.5)$$

Используем очевидное символическое соотношение

$$\frac{d}{dM} = \frac{\partial}{\partial m} + \frac{dt}{dM} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.6)$$

После преобразования уравнения (1.1) — (1.3) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} - \frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} \frac{p}{\rho_0 u D} = \frac{d \ln u}{d \ln M} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} \frac{v_0 u}{v D} + \frac{\partial v}{\partial m} \frac{M}{v} = \frac{d \ln v}{d \ln M} - \frac{v-1}{v} \frac{u}{D} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} (1 - \beta) + \frac{\partial v}{\partial m} \frac{M}{v} (k - \alpha) &= \frac{d \ln p}{d \ln M} (1 - \beta) + \frac{d \ln v}{d \ln M} (k - \alpha) + \\ &+ \frac{1}{v} \frac{(k-1) r f}{p D v} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь

$$\alpha(p, v) = \left. \frac{\partial \ln(k-1)}{\partial \ln v} \right|_p, \quad \beta(p, v) = \left. \frac{\partial \ln(k-1)}{\partial \ln p} \right|_v \quad \left(\begin{array}{l} p = \text{const} \\ v = \text{const} \end{array} \right)$$

Система уравнений (1.7) — (1.9) есть линейная алгебраическая система относительно искомых производных, и они могут быть легко определены, если известны термодинамические и некоторые оптические свойства газа и закон движения ударной волны.

Для сильных ударных волн параметры на фронте связаны со скоростью фронта D и плотностью перед фронтом ρ_0 соотношениями

$$p = \frac{2}{k+1} \rho_0 D^2, \quad u = \frac{2}{k+1} D, \quad \gamma = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{v_0}{v} = \frac{k+1}{k-1} \quad (1.10)$$

Введем обозначения

$$\varepsilon = \frac{1}{v} \frac{(k-1) r f}{p D v}, \quad \frac{d \ln \gamma}{d \ln D} = \xi, \quad \frac{d \ln D}{d \ln M} = D' \quad (1.11)$$

Для полных производных, которые определяются соотношениями на ударной адиабате (1.10), имеем

$$\frac{d \ln p_s}{d \ln M} = D' \left(2 + \frac{\xi}{\gamma-1} \right), \quad \frac{d \ln u_s}{d \ln M} = D' \left(1 + \frac{\xi}{\gamma-1} \right), \quad \frac{d \ln v_s}{d \ln M} = -\xi D' \quad (1.12)$$

Здесь индексом s отмечены величины на фронте ударной волны. Решая систему уравнений (1.7) — (1.9), находим

$$\frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} = \frac{1}{\Delta} \left[[(\gamma+1) - \alpha(\gamma-1)] \left(-\frac{v-1}{v\gamma} - D' - \frac{\xi D'}{\gamma-1} \right) - (1-\beta) \left(2D' + \frac{\xi D'}{\gamma-1} \right) - \varepsilon \right] \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} \frac{M}{v} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{v-1}{v} \frac{\gamma-1}{\gamma} (1-\beta) + 3D' (\gamma-1) (1-\beta) + \xi D' [3(1-\beta) - (\gamma+1) + \alpha(\gamma-1)] + (\gamma-1) \varepsilon \right] \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} = -\frac{1}{\Delta} \left[\frac{v-1}{v} \left((1-\alpha) + \frac{\alpha+1}{\gamma} \right) + D' (1-\beta) \left(3 + \frac{2\xi}{\gamma-1} \right) + \varepsilon \right] \quad (1.15)$$

$$\Delta = \gamma(1-\alpha) + (\alpha+\beta)$$

Сначала рассмотрим случай постоянного показателя адиабаты. Пусть

$$\kappa = k = \text{const}, \quad \alpha = \beta = 0, \quad \xi = 0, \quad \frac{d \ln D}{d \ln M} = \frac{d \ln u}{d \ln M} = U'$$

Выражения (1.13) — (1.15) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} = -\frac{v-1}{v} \frac{2\kappa(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} - \frac{2(2\kappa-1)}{\kappa+1} U' - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \varepsilon \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} \frac{M}{v} = \frac{v-1}{v} \frac{2(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} + \frac{6U'}{\kappa+1} + \frac{2\varepsilon}{\kappa+1} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} = -\frac{v-1}{v} \frac{2\kappa(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} - \frac{3(\kappa-1)}{\kappa+1} U' - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \varepsilon \quad (1.18)$$

Интересно отметить, что при $\gamma \rightarrow \infty$, т. е. $\kappa \rightarrow 1$, если величина ε остается конечной

$$\frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} \rightarrow -U', \quad \frac{\partial v}{\partial m} \frac{M}{v} \rightarrow 3U' + \varepsilon, \quad \frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} \rightarrow 0$$

Таким образом, даже при $\gamma \rightarrow \infty$ внутри сжатого слоя имеется профиль давления и плотности, причем интенсивность высвечивания влияет только на распределение плотности, приводя к увеличению плотности частиц за фронтом волны. При $\varepsilon \neq 0$ и $\kappa \neq 1$ наличие высвечивания несколько уменьшает наклон профиля давления для

затухающей ударной волны ($U' < 0$). Следует иметь в виду, что в использованные соотношения на фронте ударной волны (1.10) не вошла величина энергии, теряемая газом за фронтом ударной волны, так как предполагалось, что высвечиваемая энергия из газа, нагретого ударной волной, не поглощается в более холодном газе перед фронтом ударной волны (точнее, поглощается на расстояниях много больших, чем характерный размер газодинамической задачи). В противоположном случае в соотношениях на фронте должна фигурировать величина поглощенной энергии.

Считая профиль давления линейным по массе, выразим параметры газа за фронтом волны по массовой координате m при $\varepsilon = 0$ через полученные выражения для производных (1.16)–(1.18).

Определение плотности может быть произведено с той же точностью, что и давления, при условии, что расширение частиц после захвата их фронтом волны происходит адиабатически. Если считать эффективный показатель для данной частицы $\kappa(m) = \text{const}$, то

$$\frac{p}{p_s(m)} = \left[\frac{\rho}{\rho_s(m)} \right]^\kappa$$

где $p_s(m)$ — давление на фронте волны в момент, когда она захватывает данную частицу m . При наличии подробных термодинамических таблиц можно не предполагать постоянство показателя адиабаты в частице и пользоваться зависимостью $S(p, \rho) = S(m)$, где S — энтропия.

Для степенного закона движения фронта, т. е. при $U' = \text{const}$,

$$a(U', \kappa, \nu) = \frac{\partial p}{\partial m} \frac{M}{p} = \text{const}, \quad b(U', \kappa, \nu) = \frac{\partial u}{\partial m} \frac{M}{u} = \text{const}$$

получаем

(1.19)

$$\frac{p}{p_s(M_s)} = 1 - a(1 - \mu), \quad \mu = \frac{m}{M_s}, \quad \frac{u}{u_s} = 1 - b(1 - \mu)$$

$$\frac{\rho}{\rho_s(M_s)} = \frac{\rho}{\rho_s(m)} \frac{\rho_s(m)}{\rho_s(M_s)} = \left[\frac{1 - a(1 - \mu)}{\mu^{2U'}} \right]^{1/\kappa}, \quad \frac{p_s(m)}{p_s(M_s)} = \mu^{-2U'/\kappa}$$

Таким образом, интеграл энергии при постоянном κ равен

$$E = \frac{\lambda(\nu) p_s R_s^3}{\nu \kappa + 1} (J_k + J_h), \quad \chi = \frac{\kappa + 1}{J_k + J_h} \quad (1.20)$$

где

$$J_k = \int_0^1 [1 - b(1 - \mu)]^2 d\mu, \quad J_h = \int_0^1 [1 - a(1 - \mu)]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \mu^{\frac{2U'}{\kappa}} d\mu$$

Здесь $\lambda(\nu) = 4\pi, 2\pi, 2$ соответственно для $\nu = 3, 2, 1$. Переход к эйлеровым координатам происходит по уравнению (1.2). Принимая

$$\rho_s = (\kappa + 1) l (\kappa - 1), \quad M = \rho_0 R_s^\nu / \nu$$

уравнение (1.2) представим в виде

$$\nu r_*^{\nu-1} \frac{dr_*}{d\mu} = p_* \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad \left(r_* = \frac{r}{R_s}, \quad p_* = \frac{p}{p_s} \right) \quad (1.21)$$

Интегрируя, получим связь эйлеровой координаты с массовой

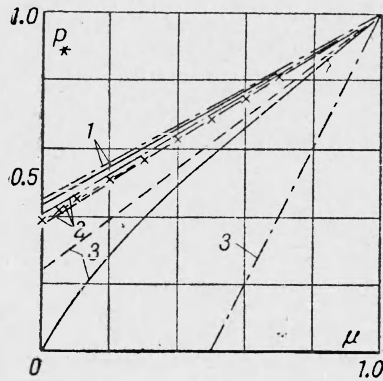
$$r_*^\nu = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \int_\mu^1 [1 - a(1 - \mu)]^{-\frac{1}{\kappa}} \mu^{\frac{2U'}{\kappa}} d\mu \quad (1.22)$$

В результате дифференцирования (1.22) получаем уточненное выражение для скорости частиц через производную давления

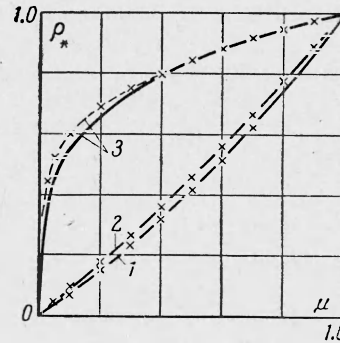
$$u_* = r_* \left\{ \frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} [1 - a(1 - \mu)]^{-\frac{1}{\kappa}} \mu^{1 + \frac{2U'}{\kappa}} r_*^{-\nu} \right\} \quad \left(u_* = \frac{u}{u_s} \right) \quad (1.23)$$

Для выявления точности и диапазона применимости полученных выше параметров течения, выраженных формулами (1.19) — (1.23), было проведено сравнение с результатами точного аналитического решения [1] в задаче о сильном точечном взрыве ($U' = -1/2$) в случае сферической симметрии ($\nu = 3$).

На графиках фиг. 1—4 соответственно показаны зависимости безразмерных величин давления $p_* = p/p_s$, плотности $\rho_* = \rho/\rho_s$, скорости $u_* = u/u_s$ и эйлеровой координаты $r_* = r/R_s$ в безразмерных лагранжевых координатах $\mu = m/M_s$. Сплошными линиями построено распределение этих величин по точному решению. Ре-

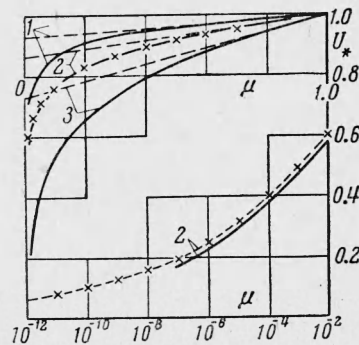


Фиг. 1

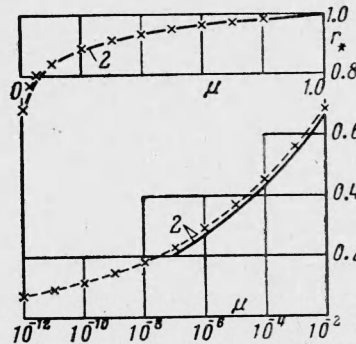


Фиг. 2

зультаты вычислений по производным на фронте представлены пунктиром. Цифрами 1, 2 и 3 обозначены соответственно случаи $\kappa = 15/13$, $\kappa = 7/5$ и $\kappa = 7$. Выше уже отмечалось, что величины плотности и скорости газа можно уточнить, используя точные уравнения неразрывности и сохранения энтропии, удовлетворяя приближенно лишь уравнению количества движения — предполагая профиль давления линейным по всей массе, захваченной ударной волной. На графиках фиг. 1—4 величины p_* , ρ_* , u_* и r_* вычисленные по формулам (1.19), (1.22) и (1.23), в слу-



Фиг. 3



Фиг. 4

чае $\kappa = 7/5$ представлены крестиками. Вычисления показали, что отклонение в определении p_* , ρ_* и u_* не превышает 4, 2 и 3% соответственно. Таким образом, имеет место хорошее совпадение с результатами точного решения и существенное улучшение по сравнению с линейной экстраполяцией для скорости, плотности и эйлеровой координаты. Численное определение величин J_h и J_k , входящих в выражение интеграла энергии (1.20), привело к значению $\chi = 0.767$. Беря для u_* выражение (1.23) и вычисляя

$$J_k = \int_0^1 u_*^2 d\mu$$

получаем $\chi = 0.811$. Эти вычисленные значения χ отличаются соответственно на 10 и 5% от точного значения $\chi = 0.851$ (см. работы [1, 6]).

Далее из фиг. 3 видно, что при $\kappa \rightarrow 1$ распределение скорости становится таким, что почти вся масса газа имеет скорость, близкую к фронтовой, и лишь небольшая часть массы имеет меньшую скорость, поскольку в центре при $m = 0$ из соображений симметрии $u = 0$. Однако эта часть массы мала и в интегральных соотношениях сохранения энергии существенно не сказывается. В задачах же о движениях газа, вытесняемых «поршнями» (например, тротиловый взрыв), скорость газа на «поршне» конечна, что с еще большим основанием позволяет пользоваться линейным профилем скорости. Рассчитав закон движения «поршня» ($m = 0$), легко определить $\partial p / \partial t$ в этой точке. В тех случаях, когда заранее не известен закон движения «поршня» ($m = 0$), он определяется по параметрам фронта. Расчет $\partial p / \partial t$ по закону движения этой точки и сравнение его с $\partial p / \partial t$ на фронте позволяет судить о точности экстраполяции. Если отличие велико, то можно, конечно, улучшить результат, учитывая изменение производной давления за фронтом, но при этом рассматриваемый способ определения параметров теряет свою простоту.

Из графика фиг. 1 видно, что при $\kappa \rightarrow 1$ все более правильным становится предположение о линейности профиля давления. Наклон давления при $\kappa = 15/13$ уже различим в случае точного решения и при построении по производным на фронте. Величина производной a становится постоянной и равной $1/2$ при $\kappa \rightarrow 1$. Это позволяет вычислить плотность по уравнению адиабаты и при переменных κ , лишь бы они были достаточно близки к единице, чтобы можно было принять $a = 1/2$.

В таблице для различных значений κ приведены: значения производных a (U', κ, v) = a_1 , определенные по соотношению (1.16); $a = a_2$ — по методу тонкого слоя [6] и $a = a_3$ — средний наклон $(1 - p_c / p_s)$ согласно точному решению задачи о сильном взрыве (p_c — давление в центре взрыва).

κ	1	$15/13$	$6/5$	$7/5$	$5/3$	2	3	7
a_1	0.5000	0.5561	0.5592	0.6204	0.6667	0.7037	0.7500	0.7500
a_2	0.5000	0.5385	0.5500	0.6000	0.6667	0.7500	1.0000	2.0000
a_3	0.5000	0.5608	0.5765	0.6345	0.6938	0.7412	0.8521	1.0000

Как следует из таблицы, производные, определенные по точным соотношениям при $\kappa < 5/3$ (т. е. до величины сжатия $\gamma > 4$), согласуются со значениями $(\kappa + 1) U' / 2$ для всех v , определенными методом тонкого слоя [6]. Естественно, что при больших значениях κ , когда исходные предположения, позволявшие производить разложение в ряд по $1/\kappa$, не выполняются, величина производной по методу тонкого слоя резко отличается как от истинной, так и от средней. На фиг. 1 профили давления, определенные по методу тонкого слоя, представлены штрих-пунктиром. Интересно отметить, что даже в том случае, когда $\kappa = 7$ и сжатие на фронте γ вовсе не велико ($\gamma = 4/3$), рассматриваемый метод линейной экстраполяции давления по точным производным на фронте ударной волны позволяет достаточно точно описать параметры во всяком случае вблизи фронта ударной волны, причем точность определения плотности и эйлеровой координаты выше, чем давления (см. фиг. 2, 3). Действительно, при известном давлении p плотность ρ определяется путем «операции извлечения корня», а эйлерова координата r путем «операции интегрирования», которые не ухудшают точности определения этих функций. Заметим, что во многих практических задачах требуется определять параметры газа именно вблизи фронта ударной волны, например в задачах воздействия взрыва на различного рода конструкции, так как давление и особенно скоростной напор резко падают при удалении от фронта ударной волны. При этом требуется знание лишь закона движения фронта, измерения которого наиболее просты. Таким образом, при помощи полученных выше значений производных (1.13) — (1.18) можно с удовлетворительным приближением определить параметры газа за фронтом ударной волны по экспериментально измеренному закону движения фронта.

2. Произведем учет противодействия при $\kappa = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$. В этом случае используем обычные соотношения на ударном фронте

$$p = \frac{2}{\kappa + 1} \rho_0 D^2 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{c_0^2}{D^2} \right), \quad \frac{v}{v_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left(1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{c_0^2}{D^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{u}{D} = \frac{2}{\kappa + 1} \left(1 - \frac{c_0^2}{D^2} \right), \quad v_0 = \frac{1}{\rho_0}, \quad c_0 = \left(\kappa_0 \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Систему уравнений (1.7) — (1.9) представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} \frac{M}{p} \Phi_1 - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{M}{u} = U'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{M}{u} \Phi_2 + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{M}{v} = -\Phi_3 U' - \frac{v - 1}{v} \Phi_4, \quad \frac{\partial p}{\partial t} \frac{M}{p} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{M}{v} \kappa = -\Phi_5 U' \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Phi_1 = \frac{p}{\rho_0 u D} = \frac{1 - 1/2 \vartheta w^2}{1 - w^2}, \quad \Phi_2 = \frac{v_0}{v} \frac{u}{D} = \frac{1 - w^2}{1/2 \vartheta \kappa + w^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{d \ln v}{d \ln M} = -\Phi_3 U', \quad \Phi_3 = -\frac{2 w^2 (1 - w^2)}{(1/2 \vartheta \kappa + w^2) (1 + w^2)}, \quad \Phi_4 = \frac{u}{D} = \frac{2}{\kappa + 1} (1 - w^2)$$

$$\frac{d \ln p}{d \ln M} + \kappa \frac{d \ln v}{d \ln M} = -\Phi_5 U', \quad \Phi_5 = \frac{2 (1 - w^2)}{1 + w^2} \left(\frac{1}{1 - 1/2 \vartheta w^2} - \frac{\kappa w^2}{1/2 \vartheta \kappa + w^2} \right)$$

При этом

$$\vartheta = (\kappa - 1) / \kappa, \quad w^2 = c_0^2 / D^2$$

Искомые производные приобретают вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} \frac{M}{p} = -\frac{v-1}{v} \frac{2\kappa(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} \left(1 + \frac{2w^2}{\kappa-1}\right) + \left[\frac{2(2\kappa-1)}{\kappa+1} + \frac{(\kappa+5)w^2}{\kappa+1} - \frac{(\kappa-1)w^4}{\kappa+1} \right] \frac{U'}{(1+w^2)(1-1/2\vartheta w^2)} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \frac{M}{v} = \frac{v-1}{v} \frac{2(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} \left(1 + \frac{2w^2}{\kappa-1}\right) - \left[\frac{6}{\kappa+1} + \frac{2(3-\kappa)w^2}{\kappa^2-1} + \frac{4(\kappa+2)w^4}{\kappa^2-1} \right] \frac{U'}{(1+w^2)[1+2w^2/(\kappa-1)]} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{M}{u} = -\frac{v-1}{v} \frac{2\kappa(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2(1-w^2)} \left(1 - \frac{(\kappa-1)w^2}{2\kappa}\right) \left(1 + \frac{2w^2}{\kappa-1}\right) + \left[3 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} + \frac{(\kappa+5)w^2}{\kappa+1} + \frac{2w^4}{\kappa+1} \right] \frac{U'}{1-w^2} \quad (2.6)$$

Полученные выражения для производных (2.4) — (2.6) представляют собой функции некоторого параметра $w^2 = c_0^2 / D^2$, характеризующего фронт волны. Считая закон фронта известным (например, из эксперимента), при помощи полученных выражений определяем производные основных параметров на фронте. Принимая профиль давления линейным в лагранжевых координатах, можно построить все параметры течения за фронтом. Чтобы проиллюстрировать возможности указанного метода расчета при уменьшении давления в ударной волне, было проведено сравнение с результатами расчета точечного взрыва с противодействием [7]. На фиг. 5 в зависимости от величины избыточного давления на фронте волны Δp_s представлено отношение давления в центре взрыва Δp_c к давлению на фронте Δp_s . Кривая 1 показывает результаты машинного счета [7], кривая 2 — результаты расчета давления в центре при помощи выражения (2.4) для производной давления

$a = (\partial p / \partial t) (M / p), \quad p_c = (1 - a) p_s$

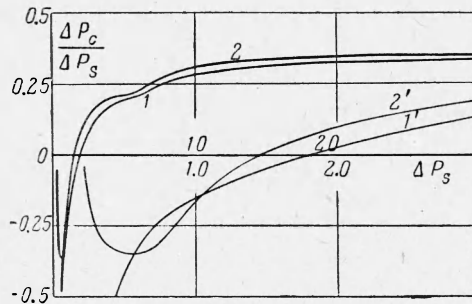
Кривые 1' и 2' представляют участки кривых 1 и 2 в диапазоне

$$0 \leq \Delta p_s \leq 3.0 \text{ атм}$$

Далее, на фиг. 6 в безразмерных лагранжевых координатах приведены профили давления ударных волн небольшой интенсивности. Сплошными кривыми

представлены профили по табличным результатам работы [7], пунктиром — линейная экстраполяция давления по производной (2.4). Профили 1, 2, 3, 4 соответствуют интенсивностям $\Delta p_s = 7.9, 2.3, 0.51, 0.11 \text{ атм}$.

Графики на фиг. 5, 6 свидетельствуют о том, что линейная экстраполяция давления в лагранжевых (массовых) координатах применима также в области, где противодействие является существенным и движение не автомодельно, и с удовлетворительной точностью описывает распределение давления за фронтом волны до центра взрыва. Действительно, из графиков фиг. 5 и 6 видно, что с точностью около 2% максимального давления на фронте возможна экстраполяция давления по линейному закону вплоть до самого центра при избыточном давлении более 5 атм, где сжатие $\gamma \geq 3$. С ошибкой до 10% максимального давления экстраполяция воз-



Фиг. 5

можно вплоть до $\Delta p_s = 0.5 \text{ атм.}$ Поскольку в дальнейшем профиль давления перестает быть монотонным (давление в центре вновь начинает расти), при более низких давлениях экстраполяция до центра по линейному закону недопустима.

В некоторых задачах линейная экстраполяция давления до центра может оказаться недостаточной, так как производная давления вдали от фронта может существенно отличаться от производной на фронте. Это имеет место, например, для случая сферического и цилиндрического поршня, движущегося с постоянной скоростью, при учете противодействия [8]. В самом деле, на поршне $u = \text{const}$, поэтому $\partial p / \partial t = 0$, в то время как из (2.4) следует, что при $U' = 0$, $\partial p / \partial t \neq 0$, однако a заметно возрастает при $c_0 / D \rightarrow 1$. Для сильных волн при $c_0 / D \rightarrow 0$ для $\nu = 3$ величина $a = \sqrt[7]{54}$ и кривизна профиля давления малосущественна.

В случае же движения плоского поршня с постоянной скоростью параметры точно определяются при любом значении c_0 / D — они равны параметрам фронта. Ясно, что область, в которой экстраполяция «назад» является надежной, определяется временем, в течение которого производились измерения скорости, и соотношением между скоростью звука и скоростью фронта. В лагранжевых координатах имеем

$$dm / dt = cpr^{\nu-1}, \quad \left. \frac{dm}{dM} \right|_{\mu=1} = \left(\kappa \frac{P_s}{\rho_0 D^2} \frac{\rho_s}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Для сильных ударных волн

$$\left. \frac{dm}{dM} \right|_{\mu=1} = \left(\frac{2\kappa}{\kappa_s^2 - 1} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dm}{dM} \rightarrow \infty \quad \text{при } \kappa \rightarrow 1, \quad \frac{dm}{dM} \rightarrow \sqrt{2} \quad \text{при } \kappa \rightarrow \infty$$

Для слабых волн $dm / dM \rightarrow 1$ и «область зависимости» становится очень малой, экстраполяция «назад» становится недопустимой, ибо по тому факту, что фронт движется со скоростью, близкой к звуковой, нельзя делать заключение, что непосредственно за ним не движется целая «пила» слабых ударных волн. Вместе с тем заранее известный характер газодинамического движения позволяет применять способ экстраполяции «назад» и для волн умеренной интенсивности.

3. Считая профиль давления заданным, можно вычислить плотность и для неадиабатических течений. Для этого в уравнении энергии (1.3) вычислим член, характеризующий работу сил давления, считая постоянным U' и соответственно a . Пусть закон движения фронта $p_s(t)$, $M_s(t)$ известен. Вводя энтальпию $h = e + pv$, уравнение энергии представим в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial t} = -f \tag{3.1}$$

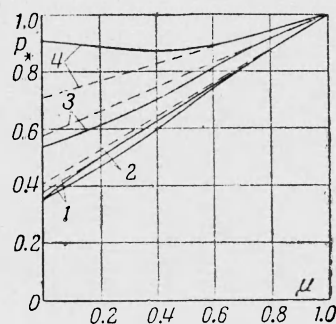
Так как
$$r = p_s [1 - a(1 - \mu)], \quad \mu = m / M_s(t) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp_s}{dt} \left\{ [1 - a(1 - \mu)] - \frac{a}{2U'} \mu \right\} \tag{3.3}$$

По изменению энтальпии h при известных параметрах фронта можно определить плотность частиц ($m = \text{const}$). Пусть

$$h = \kappa \frac{pv}{\kappa - 1} = \kappa \frac{p_s v_s T_*}{\kappa - 1}, \quad f = f_s \cdot f_*(p_*, T_*),$$

где T_* — безразмерная температура, p_s , v_s — параметры газа на фронте ударной волны, когда она приходит в данную точку. Подставляя выраже-



Фиг. 6

ние (3.3) в уравнение энергии (3.1) и используя введенное обозначение

$$\varepsilon_s = \frac{(\kappa - 1) f_s R_s}{\nu p_s v_s D} \quad (3.4)$$

и то, что при степенном законе движения фронта ударной волны

$$R \sim t^{\frac{1}{1-U'v}}, \quad D \sim t^{\frac{U'v}{1-U'v}}, \quad p \sim t^{\frac{2U'v}{1-U'v}}, \quad U' = \text{const}$$

получим уравнение для определения безразмерной температуры

$$\frac{d \ln T_*}{d \ln \tau} = \frac{2U'v}{1-U'v} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{[1 - a(1 - \mu)] - a\mu / 2U'}{1 - a(1 - \mu)} - \frac{\nu \varepsilon_s \tau}{\kappa(1 - U'v)} \frac{\varphi(T_*, p_*)}{T_*} \quad (3.5)$$

Здесь p_* — безразмерное давление, τ — безразмерное время, t_s — характерное время прихода волны в данную точку

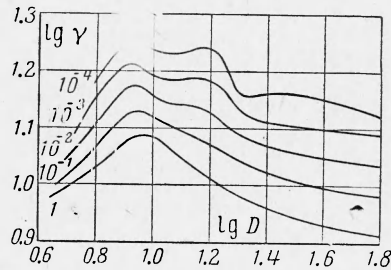
$$p_* = [1 - a(1 - \mu)] \mu^{2U'}, \quad \mu \sim \tau^{-\frac{\nu}{1-U'v}}, \quad \tau = \frac{t}{t_s}, \quad t_s = \frac{r}{D(1 - U'v)}$$

Одним из наиболее типичных примеров высвечивания является объемное тормозное высвечивание, когда

$$f \sim \rho T^{1/2} \sim p T^{-1/2}$$

В случае, когда ε_s велико, следует решать задачу о высвечивании в волне разрежения за фронтом ударной волны, выделив область «ударной волны с высвечиванием» [9], т. е. область с резким изменением параметров.

Таким образом, использование производной величины давления на фронте ударной волны для определения давления в области основной массы



Фиг. 7

газа, вовлеченного в движение, возможно и в условиях неадиабатического охлаждения газа. Если функция φ зависит степенным образом от своих аргументов, то, как указано в работе [10], при некоторых избранных степенных законах движения фронта задача будет автомодельной¹.

4. При переменном показателе адиабаты κ из выражений (1.13) — (1.15) можно отметить, что производные давления (1.13) и скорости (1.15) практически слабо зависят от ξ . Несколько сильнее эта зависимость проявляется для производной от плотности (1.14). О диапазоне изменения ξ в зависимости от интенсивности волны можно судить по величине сжатия γ во фронте ударной волны, логарифм которой отложен на фиг. 7 в зависимости от логарифма скорости фронта D км/сек. Цифры на кривых обозначают величину плотности перед фронтом ρ_n , отнесенной к плотности воздуха при наземных условиях ρ_0 . Расчет ударных адиабат проведен по таблицам термодинамических свойств воздуха [12]. Сравнение с расчетами ударных адиабат по более точным и подробным таблицам уравнения состояния воздуха, любезно предоставленными нам А. С. Компанейцем и Н. М. Кузнецовым, показало, что для целей настоящей работы точность проведенных нами расчетов ударных адиабат по довольно редкой сетке таблиц [12] вполне достаточна. Как легко видеть, сама величина ξ доста-

¹ В работе [11] для двух показателей степени получено распределение параметров в автомодельной задаче.

Сравнение результатов работы [11] с результатами настоящей работы не проведено, так как авторам они стали известны после сдачи статьи в печать.

точно мала (порядка $\pm 0.2 \div 0.3$ в рассматриваемом диапазоне). Так как в выражениях (1.12), (1.13) и (1.15) ξ входит лишь в виде комбинации $\xi / (\gamma - 1)$, где γ порядка 10, то ее влияние мало.

По величине зависимости сжатия на фронте γ от скорости D и плотности перед фронтом ρ_0 , можно найти α и β . Действительно, уравнение адиабаты $\ln \gamma = \psi(\ln D, \ln v)$ при приближенном условии на ударной волне $d \ln D = 1/2 (d \ln p + d \ln v)$ позволяет вычислить

$$\left. \frac{d \ln \gamma}{d \ln p} \right|_{v=\text{const}} - \frac{1}{2} \xi, \quad \left. \frac{d \ln \gamma}{d \ln v} \right|_{p=\text{const}} = \frac{1}{2} \xi + \eta \quad \left(\eta = \left. \frac{\partial \ln \gamma}{\partial \ln v} \right|_{D=\text{const}} \right) \quad (4.1)$$

Из фиг. 7 легко определить, что в рассматриваемом диапазоне $\eta \approx 0.05$.

Так как $d \ln(k-1) = -[\gamma / (\gamma - 1)] d \ln \gamma$, то $\alpha = -1/2 \xi$, $\beta = -(1/2 \xi + \eta)$, и, следовательно, величины α и β малы по сравнению с единицей. Интересно, что отличие α и β от нуля характеризует отличие истинного показателя адиабаты κ от эффективного. Действительно,

$$\kappa = \left. \frac{d \ln p}{d \ln \rho} \right|_S - \left. \frac{d \ln p}{d \ln v} \right|_S \quad (S = \text{const})$$

Из уравнения адиабатичности $de + p dv = 0$ и определения эффективного показателя адиабаты $e(p, v) = pv / (k - 1)$ следует

$$\kappa = (k - \alpha) / (1 - \beta) \quad (4.2)$$

Таким образом, для многих приложений при определении производной давления за фронтом с достаточной степенью точности можно полагать $\alpha = \beta = \xi = 0$ и определять κ по мгновенному значению сжатия γ . Гораздо существеннее учитывать отличие уравнения состояния от $\kappa = \text{const}$ при определении плотности за фронтом ударной волны.

Рассмотренный способ определения параметров газа за фронтом ударных волн при известном законе движения фронта в сочетании с методом интегральных соотношений [13, 14] для определения закона движения фронта может позволить производить приближенные расчеты газодинамических движений.

Поступила 6 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4. Гостехиздат, 1957.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
3. Черный Г. Г. Одномерные неустановившиеся движения совершенного газа с сильными ударными волнами. Докл. АН СССР, 1956, т. 107, № 5.
4. Черный Г. Г. Задача о точечном взрыве. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 4.
5. Черный Г. Г. Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 3.
6. Коробейников В. П. и др. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
7. Хоцимский Д. Е. и др. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. L, М.—Л., 1957.
8. Taylor G. F. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc., A, 1946, vol. 186, No. 100.
9. Каплан С. А. Межзвездная газодинамика. Физматгиз, 1958.
10. Немчинов И. В. Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. ПМТФ, 1961, № 1, стр. 17—26.
11. Ромишевский Е. А. Обтекание тонких тел гиперзвуковым потоком газа с учетом излучения. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 1, стр. 12—26.
12. Селиванов В. В., Шляпинтох И. Я. Термодинамические свойства воздуха при термической ионизации и ударная волна. Ж. физ. химии, 1958, т. XXXII, № 3.
13. Черный Г. Г. Метод интегральных соотношений для расчета течений газа с сильными ударными волнами. ПММ, 1951, т. XXV, вып. 1, стр. 101—107.
14. Черный Г. Г. Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1, стр. 121—125.