

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В. О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 24. Новосибирск, 1976.
2. Алексеев Г. В. Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск, 1972.
3. Алексеев Г. В. О единственности и гладкости плоских вихревых течений идеальной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 15. Новосибирск, 1973.
4. Rato T. On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation.— «Archive for Rational Mechanics and Analysis», 1967, vol. 25, N 3, p. 188—200.
5. Wigley N. Mixed boundary value problems.— «Mathematische Zeitschrift», 1970, Bd 115, N 1, S. 33—52.
6. Markus L. Asymptotically autonomous differential systems.— In: Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Vol. III. Princeton, 1956.
7. Yoshizawa T. Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations.— In: Contributions to differential equations. Vol. 1. N. Y., Interscience, 1963.

УДК 541.24 : 532.5

ОБ УГЛАХ НАКЛОНА ГРАНИЦЫ В ДВИЖУЩИХСЯ ЖИДКИХ СЛОЯХ

О. В. Воинов

(Москва)

Рассматриваются ползущие течения в тонких слоях вязкой жидкости с учетом капиллярных сил и находятся решения, описывающие углы наклона границы.

Краевой угол жидкости на твердой поверхности в статическом состоянии выражается через удельные поверхностные энергии. При движении жидкости краевой угол (динамический) отличается от статического. Впереди жидкой массы, растекающейся по твердой поверхности, может наблюдаться очень тонкая «первичная» пленка [1, 2]. Имеются указания на то, что величина динамического краевого угла зависит от вязких сил [3].

1. Установившееся течение жидкого слоя по сухой поверхности и краевые углы. Внутри тонкого жидкого слоя на плоской твердой поверхности давление p отличается от давления p_0 в газе на величину капиллярного перепада $p = p_0 - \sigma \partial^2 h / \partial x^2$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения; x — координата вдоль слоя; h — толщина слоя).

Уравнение движения слоя при малых числах Рейнольдса под действием капиллярных сил можно записать при помощи гидродинамической теории смазки

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{3\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t}.$$

В работе [4] исследованы нестационарные решения этого уравнения в линейном приближении. Рассмотрим стационарные решения в нелинейной постановке. Для стационарной волны

$$h = h(x - vt)$$

указанное уравнение упрощается

$$(1.1) \quad (\sigma/3\mu)h^3 d^3 h/d\xi^3 = vh + K, \quad \xi = x - vt, \quad K = \text{const.}$$

Постоянная $K = 0$, если при $\xi > \xi_0$ толщина слоя $h = 0$. Это соответствует задаче, в которой слой натекает ($v > 0$) на сухую поверхность или стекает с поверхности ($v < 0$).

Зададим угол наклона свободной границы при малой толщине h_m и исследуем решения, для которых в области больших толщин h свободная граница близка к прямолинейной

$$(1.2) \quad \begin{aligned} dh/d\xi &= -\alpha_m, \quad h = h_m, \\ d^2 h/d\xi^2 &\rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Выберем величину h_m предельно малой с точки зрения применимости гидродинамического описания. Тогда можно предполагать, что микроскопический угол α_m близок к статическому краевому углу смачивания или углу статического гистерезиса смачивания. Сформулированная задача имеет единственное решение, если $v > 0$.

Смысл задачи (1.1), (1.2) состоит в том, что для различных задач движения макроскопических жидких объемов она описывает профиль поверхности в некоторой малой области, близкой к краю жидкого объема. Например, при движении жидкости, граничащей с газом в капилляре, задача (1.1), (1.2) соответствует области толщин, малых по сравнению с диаметром капилляра. Полное решение можно находить методом сращивания.

Решение ищется в виде

$$(1.3) \quad dh/d\xi = (3\mu v/\sigma)^{1/3} u(s), \quad s = \ln(h_m/h).$$

Задача (1.1), (1.2) приводится к виду

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u''u^2 + u'u^2 + u'^2u &= 1, \\ u &= -\alpha_m M^{-1/3}, \quad s = 0; \quad M = 3\mu v/\sigma, \\ u'ue^s &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Уравнение (1.4) не изменяется при сдвиге по s . Поэтому решение, удовлетворяющее условию в бесконечности, имеет вид

$$(1.5) \quad u = u(z), \quad z = s + C.$$

Постоянная C определяется из уравнения

$$(1.6) \quad u(C) = -\alpha_m M^{-1/3}.$$

Определим асимптотическое разложение $u(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Для этого можно использовать итерационный процесс, основанный на том, что в левой части уравнения (1.4) при заданном условии на бесконечности главным членом при $|z| \rightarrow \infty$ является $u'u^2$

$$u'_{i+1}u_{i+1}^2 + u_i''u_i^2 + u_i'^2u_i = 1; \quad u_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

С учетом трех приближений асимптотическое представление имеет вид

$$(1.7) \quad u(z) = (3z)^{1/3} \left(1 + \frac{\ln|z|}{9z} + \frac{\ln|z| - 4/3 \ln^2|z| - 4}{27z^2} + \dots \right).$$

Формула (1.7) пригодна при $|z| > 1$, а ее первый член качественно правильно описывает вид $u(z)$ при $z \sim 0$.

Определим, исходя из (1.7), вид решения при различных значениях $\alpha_m M^{-1/3}$. Рассмотрим прежде всего случай натекания жидкости на твердую поверхность, $v > 0$. В этом случае $u < 0$. Корень C уравнения (1.6)

изменяется от $-\infty$ до значения $C \sim 0$, когда $\alpha_m M^{-1/3}$ изменяется от $+\infty$ до 0. Отличие решения $u(s)$ от первого члена разложения (1.7) заметно проявляется только при $C > -1$, причем лишь для значений $s \sim 0$. Для $s < -1$ это отличие всегда несущественно, при $s \rightarrow -\infty$ оно стремится к нулю. Таким образом, для определения $u(s)$ при $|s| \gg 1$ неважно детальное поведение $u(z)$ при $-1 < z < 0$. Для приближенного определения корня (1.6) достаточно использовать первый член представления (1.7).

В случае стекания, когда $v < 0$, дело обстоит сложнее. Величина $u > 0$. Искомое решение $u(s)$ получается сдвигом из $u(z)$, $z > 0$. Ясно, что решение существует только в конечной области $-C < s < 0$. Величина $u \sim 0$ при $s = -C$. В связи с этим условие убывания $|u'|e^s$ с ростом $|s|$ имеет смысл рассматривать только на конечном интервале. Этот интервал должен быть достаточно большим, и, следовательно, необходимо, чтобы $C \gg 1$.

Приближенное решение, определенное по первому члену асимптотики (1.7), имеет вид

$$(1.8) \quad u = (3s - \alpha_m^3/M)^{1/3}; \quad C = -\alpha_m^3/(3M).$$

При $\alpha_m^3 \gg 3M > 0$ решение асимптотически точно для всех значений s . При $\alpha_m^3 \leq 3|M|$ для значений $s \sim 0$ решение дает только качественную картину. Однако можно показать, что более точное определение $u(s)$ при $s \sim 0$ не имеет смысла.

Пусть $\alpha_m^3 \leq 3|M|$. При этом можно рассматривать только натекание, так как в задаче стекания будет $C \sim 1$ и угол наклона свободной границы обращается в нуль на совсем небольшой высоте $h \sim 2h_m$.

В области $-1 \leq s < 0$ функция $u(s)$ изменяется существенно, т. е. угол наклона свободной границы в области высот $h \sim h_m$ с изменением высоты h изменяется резко. Это значит, что есть резкий выступ на свободной границе — микроскопический «носик». «Носик» имеет толщину порядка нескольких молекул. С появлением «носика» микроскопический краевой угол можно определить только по порядку величины, так как вблизи микроскопического «носика» наклон свободной границы меняется сильно. Конечно, возможно только качественное описание «носика», ибо это по существу микроскопическое явление.

В размерных обозначениях условие появления «носика» при натекании имеет вид

$$(1.9) \quad 9\mu v/\sigma \geq \alpha_m^3.$$

Формула для угла наклона свободной границы в функции ее высоты h над твердой поверхностью на основе (1.8), (1.3) имеет вид

$$(1.10) \quad \alpha = \left(\alpha_m^3 + \frac{9\mu v}{\sigma} \ln \frac{h}{h_m} \right)^{1/3}, \quad \alpha = -\frac{dh}{dx}.$$

Согласно данному выше определению, величина $h_m \sim 10^{-7} - 10^{-6}$ см. Макроскопическим толщинам слоя $h \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ см соответствует $\ln(h/h_m) \sim 12$. Как видно из (1.10), угол α слабо меняется с высотой в макроскопической области. Из-за этого может показаться, что имеется четко выраженный краевой угол.

Согласно формуле (1.10), за счет движения ($v > 0$) появляется ненулевой макроскопический краевой угол α , даже если равновесный краевой угол смачивания равен нулю, $\alpha_m \sim 0$. Отметим, что в случае полного смачивания, согласно (1.9), всегда есть «носик» на свободной границе.

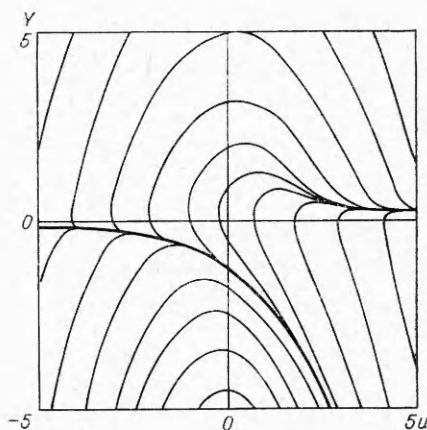
В случае стекания жидкости с твердой поверхности, когда $v < 0$, угол α убывает с высотой и на некоторой достаточно большой высоте обращается в нуль. При продолжении решения величина h проходит через

минимум и при $x \rightarrow -\infty$ решение близко к параболе, $h'' > 0$. Выше показано, что макроскопический краевой угол при стекании существует только в ограниченной области высот h . Условиями его существования будут

$$9|v|\mu/\sigma \ll \alpha_m^3, h \ll h_m \exp(\alpha_m^3 \sigma / 9\mu |v|).$$

2. Сращивание решения с мениском. Асимптотическое решение (1.7) позволяет эффективно решать задачу, когда задано условие $h'' \rightarrow \text{const} > 0$ при $h \rightarrow \infty$ и величина const мала. Профиль постоянной кривизны ($h'' = \text{const}$ в приближении тонкого слоя) называется мениском. Переход от (1.7) к мениску малой кривизны можно проследить, исследовав прежде всего точные решения дифференциального уравнения (1.4). Замена $Y = u du/ds$ приводит его к виду $dY/du = 1/Y - u$.

Интегральные кривые этого уравнения представлены на фигуре. При $|u| \gg 1$ кривые близки к кускам гипербол $Y = 1/u$, что соответствует (1.7). С ростом $|u|$ кривые удаляются от оси u , пределу $|Y| \rightarrow \infty$ соответствует парабола $h'' = \text{const}$, т. е. мениск. Решение $h'' \rightarrow 0$ при $s \rightarrow -\infty$ является огибающей семейства решений.



Замена $w = u^2$ приводит уравнение (1.4) к виду

$$(2.1) \quad d^2w/dz^2 + dw/dz = -2 \operatorname{sgn}(v)/\sqrt{w}, w = u^2.$$

Далее рассматриваем случай натекания, $v > 0$. Можно показать, что в случае стекания ($v < 0$) решение п. 1 с мениском не совместимо.

Будем искать решение в окрестности асимптотического, учитывая в (1.7) два члена,

$$(2.2) \quad w = (3z)^{2/3} (1 + (2/9)z^{-1} \ln |z|) + w_1, |w_1| \ll w.$$

Функция w_1 удовлетворяет уравнению

$$(2.3) \quad w_1'' + w_1' + \frac{1}{3} z^{-1} w_1 \left(1 - \frac{1}{3} z^{-1} \ln |z| \right) = 0.$$

Растущее при $z \rightarrow -\infty$ решение этого уравнения представляется в форме

$$(2.4) \quad w_1 = c_1 |z|^{1/3} \left(1 + \frac{3 + \ln |z|}{9z} \right) e^{-z} + \dots, |z| \gg 1,$$

где c_1 — произвольная постоянная. Величину c_1 можно найти после сращивания.

При $z \rightarrow -\infty$ решение (2.1), соответствующее $h'' > 0$, имеет вид

$$(2.5) \quad w = a_1 e^{-z} + a_2 + w_2.$$

Причем $w_2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Величину a_1 считаем известной. Для существования области применимости (2.2) необходимо, чтобы $a_1 \ll 1$. Это есть основное ограничение всего анализа. Заметим, что при $a_1 \gg 1$ не существует области, в которой бы угол наклона свободной границы менялся мало с высотой. Условие $a_1 \ll 1$ соответствует тому, что возможно появление динамического краевого угла.

Сравнение (2.2) и (2.5) позволяет сразу в первом приближении определить a_2 и область сращивания $z \sim z_*$

$$(2.6) \quad a_1 e^{-z_*} = (3z_*)^{2/3}, \quad a_2 \approx (3z_*)^{2/3} \left(1 + \frac{2}{9} z_*^{-1} \ln |z_*| \right) \gg 1.$$

Чтобы произвести асимптотическое сращивание, найдем w_2 в (2.5). С точностью до малых порядка $1/a_2^2$ функция w_2 удовлетворяет уравнению

$$(2.7) \quad d^2 w_2 / dz^2 + dw_2 / dz = -2 / \sqrt{a_1 e^{-z} + a_2}.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $z \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$(2.8) \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \left[\left(\frac{a_1}{a_2} e^{-z} + 2 \right) \left(\ln \frac{a_1}{a_2} - z - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \ln \left(1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2} e^{-z} + 1} \right) \right) + 2 \sqrt{\frac{a_1}{a_2} e^{-z} + 1} \right].$$

Представление (2.5), (2.8) применимо там, где $|w_2| \ll w$. При этом область его применимости перекрывается с областью применимости представления (2.2), (2.4). Рассмотрим значения z такие, что

$$a_1 e^{-z} \ll a_2, \quad |z - z_*| \ll |z_*|.$$

Используя один член разложения в ряд по малому $a_1/a_2 e^z$ и два члена разложения по $(z - z_*)$ в выражении (2.8), а также два члена разложения по $(z - z_*)$ в первом слагаемом в (2.2), требуем совпадения представлений (2.5), (2.8) и (2.2), (2.4). При этом находим величину c_1 в (2.4) и получаем уравнение для a_2

$$(2.9) \quad a_2 + (2 - 4 \ln 2) / \sqrt{a_2} = (3z_*)^{2/3} \left(1 + \frac{2}{9} z_*^{-1} \ln |z_*| \right).$$

Асимптотически в рамках той точности, с которой производилось сращивание, функция $a_2(a_1)$ из (2.9), (2.6) может быть найдена в виде

$$(2.10) \quad a_2 = (3 \ln(1/a_1) + \ln \ln(1/a_1) + 6 \ln 2 + 2 \ln 3 - 3)^{2/3}.$$

Согласно формуле (2.5) (с учетом (1.3)), величина $\sqrt{a_2}$ пропорциональна углу α_0 , который образует мениск с твердой поверхностью, если его формально продолжить в область $h \rightarrow 0$. Величина a_1 выражается через радиус кривизны мениска R_0

$$(2.11) \quad a_1 = 2e^C (h_m / R_0) (\sigma / 3\mu\nu)^{2/3}; \quad \alpha_0 = (3\mu\nu / \sigma)^{1/3} \sqrt{a_2}.$$

Величина C определяется в соответствии с (1.5).

Заметим, что характерная высота h_s , при которой происходит переход от решения с медленно изменяющимся по высоте углом наклона к мениску, на котором косинус угла меняется пропорционально высоте, равна $h_s \approx 1/2 \alpha_0^2 R_0$, как следует из (2.6), (1.5) (с учетом (1.3)).

Условие применимости (2.10) есть $a_1 \ll 1$ в (2.11). Если a_1 не очень мало, то более грубое приближение (2.6) может давать более высокую точность, чем (2.10), как это обычно бывает в асимптотических решениях.

3. Патекаание жидкого слоя на поверхность, покрытую тонким слоем жидкости. Пусть жидкость движется по твердой поверхности, на которую предварительно нанесен однородный слой той же самой жидкости толщины h_∞ . Тогда в (1.1) постоянная $K = -\nu h_\infty$ и первое условие (1.2) заме-

няется условием перехода слоя в пределе $x \rightarrow \infty$ к неподвижному однородному

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (\sigma/3\mu j)h^3 d^3h/dx^3 &= v(h - h_\infty), \\ h'' &\rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow -\infty), \\ h &\rightarrow h_\infty, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Коэффициент j в уравнение (3.1) введен в связи с тем, что рассматриваемая задача относится не только к движению чистой жидкости по пленке на твердой поверхности ($j = 1$), но справедлива также, когда свободная граница заторможена за счет влияния поверхностно-активных веществ ($j = 4$). В случае $j = 8$ получаем задачу о движении жидкости по свободной пленке толщины h , у которой обе границы заторможены под действием поверхностно-активных веществ. Если в последнем случае при помощи галилеева преобразования перейти к системе координат, в которой жидкость в области $h \rightarrow \infty$ неподвижна, то получим задачу о втекании свободной жидкой пленки в мениск (границу Плато) малой кривизны.

Рассматриваем случай $v > 0$. Можно показать, что при $v < 0$ решение краевой задачи (3.1) нет. Применяв замену переменных (1.3) с $h_m = h_\infty$, получим вместо (3.1)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u''u^2 + u'u^2 + u'^2u &= 1 - e^s, \\ u'ue^s &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow -\infty, \\ u &= 0, \quad s = 0. \end{aligned}$$

Если пренебречь экспоненциальными малыми членами при $s \rightarrow -\infty$, то из (3.2) получим, что асимптотика u при $s \rightarrow -\infty$ такая же, как и у решения уравнения (1.4), т. е. определяемая формулами (1.5), (1.7). Постоянная C в (1.5) определяется условием $u = 0$ при $s = 0$. Постоянная C находится путем численных расчетов. Численно удобнее решать уравнение третьего порядка (3.1), нежели (3.2), так как интегральная кривая (3.2) окружает в малой окрестности начало координат на плоскости u, s . Численные расчеты позволили найти $C = 0,61$. При этом из (1.3), (1.5) и (1.7), учитывая два члена, можно получить асимптотическое выражение для угла наклона свободной границы

$$(3.3) \quad \alpha = (9\mu v/\sigma)^{1/3} [\ln(h/h_\infty) - 0,61 - (1/3) \ln(\ln(h/h_\infty) - 0,61)]^{1/3}.$$

Как показывает сравнение с точным численным решением, условие применимости асимптотической формулы (3.3) есть $h > 3h_\infty$. При $h = 3h_\infty$ погрешность этой формулы составляет около 10%. При $h \geq 8h_\infty$ погрешность формулы (3.3) менее 2% и убывает с ростом h .

До сих пор асимптотическое поведение угла наклона α не было известно. Из численных расчетов также не удавалось определить характер предельного поведения α . В работе [5] из численных расчетов течения пленки получен неправильный результат $\alpha \rightarrow \text{const}$ при $h \rightarrow \infty$. Поэтому окончательная формула работы [5] ошибочна. Близкая к [5] точка зрения высказана в работе [6], где предполагается существование предельного угла мениска с поверхностью при стремлении кривизны мениска к нулю. В действительности, как видно из формулы (3.3), предельного угла наклона при $h \rightarrow \infty$ не существует.

Пусть жидкость вытесняет газ из капилляра, причем поверхность капилляра покрыта пленкой, толщина которой много меньше его диаметра. Для малых углов α_0 зависимость угла от скорости дается формулами (2.10), (2.11), где под h_m надо понимать h_∞ , а величина $C = 0,61$. Если значение a_1 недостаточно мало, то лучше использовать вместо (2.10) ана-

логичную более грубую формулу, вытекающую из (2.6). Если $a_1 \geq 1$, то краевого угла вообще нет. В этом случае продолжение мениска до твердой границы $h = 0$ и до высоты пленки $h = h_\infty$ дает существенно разные значения α_0 . Следовательно, краевой угол имеет асимптотический смысл, его можно определять в пределе малых значений параметра a_1 .

4. Влияние сил Ван-дер-Ваальса на динамический краевой угол. При малой кривизне свободной границы на малом масштабе могут быть важны силы Ван-дер-Ваальса. В пренебрежении капиллярными силами задача течения вязкой пленки рассмотрена в [7]. Учет сил Ван-дер-Ваальса может быть важен для случая смачивающей жидкости с нулевым равновесным краевым углом, если скорость движения мала.

Для малых углов наклона свободной границы эффективное давление внутри слоя следует уравнению

$$p = p_0 - \sigma d^2 h / dx^2 + A / 6\pi h^3.$$

Постоянная A учитывает силы Ван-дер-Ваальса (см., например, [8—10]). Для случая полного смачивания $A < 0$. С учетом сил Ван-дер-Ваальса уравнение (1.1) несколько усложняется

$$(4.1) \quad \frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \frac{A}{6\pi h^3} \right) = \eta v.$$

Условие (1.2) при $h \rightarrow \infty$ остается в силе. В области малых толщин можно потребовать $h' \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, распространяя формально решение вплоть до $h = 0$.

В безразмерных обозначениях ζ и y

$$(4.2) \quad x = h_m (\sigma / 3\mu v)^{1/3} \zeta, \quad h = h_m y$$

уравнение (4.1) примет вид

$$(4.3) \quad y^3 \frac{d^2 y}{d\zeta^2} - \frac{\beta^2}{y} \frac{dy}{d\zeta} - y = 0, \quad \beta^2 = -\frac{A}{2\pi\sigma} \left(\frac{\sigma}{3\mu v} \right)^{2/3} \frac{1}{h_m^2}.$$

Интересен случай $\beta \gg 1$. В области малых y можно искать $dy/d\zeta$ в виде ряда по β^{-2} , считая слагаемое $y^3 y'''$ в (4.3) малым,

$$(4.4) \quad \frac{dy}{d\zeta} = -\frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{6y^6}{\beta^6} + \dots \right) y^2, \quad y \ll \beta$$

Можно доказать, что асимптотический ряд по β^{-2} расходящийся. Учет больше двух членов практического смысла не имеет. В области больших значений y вид решения совпадает с исследованным в п. 1

$$(4.5) \quad y' = -3^{1/3} (\ln y - (1/3) \ln \ln y - c_1)^{1/3}, \quad y \gg \beta.$$

Сравнение (4.5) и (1.10) при $y \sim \beta$ позволяет оценить постоянную в (4.5). Величина $c_1 \sim \ln \beta$. Следовательно, высота h , на которой угол наклона свободной границы близок к нулю, вместо h_m при $\beta = 0$ будет $\sim h_m \beta$ при $\beta \gg 1$.

Используя выражение (1.10), можно показать, что для возможных значений постоянной A [8] значение $\beta \gg 1$ только при $\alpha_0 \ll 1$, где α_0 — макроскопический краевой угол. Если угол α_0 мал и значение A достаточно велико, то в формулу (1.10) вместо величины h_m , определяемой по нескольким размерам молекул, следует подставлять в $\sim \beta$ раз большую величину

$$(4.6) \quad h_m \approx \sqrt{|A| / 2\pi\sigma} (\sigma / 3\mu v)^{1/3}.$$

Согласно формулам (4.2), (4.4) и определению β^2 в (4.3), при $h \ll h_m$

$$(4.7) \quad h = |A| / 6\pi\mu v (x - x_0).$$

В экспериментах [1] при очень малой скорости смачивания наблюдали так называемую первичную пленку, движущуюся впереди растекающейся жидкости. До сих пор это явление оставалось необъясненным [2]. Анализируя два профиля первичной пленки, приведенные на фиг. 4 работы [1], можно найти, что они в пределах ошибки опытов описываются кривыми $h = c(t)/(x - x_0)$, что соответствует (4.7). Для момента $t = 18$ ч после начала растекания из данных [1] найдем, что величина $c \sim 4 \cdot 10^{-8}$ см², при этом скорость $v \sim 5 \cdot 10^{-7}$ см. Если учесть значения $\mu = 0,27$ П, $\sigma = 27,6$ дин/см [1], то из (4.7) определим разумное значение $|A| \sim 10^{-13}$ эрг, которое согласуется с типичными значениями постоянной A [8]. При этом, согласно (4.6), величина $h_m \sim 10^{-5}$ см. Длина первичной пленки, определяемая условием $h_m > h > 10^{-6}$ см, равна $\sim 0,3$ см.

Поступила 14 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Bascom W. D., Cottington R. L., Singlettery C. R. Dynamic surface phenomena in the spontaneous spreading of oils on solids.— In: Contact angles, wettability and adhesion. Amer. Chem. Soc., 1964.
2. Dussan V. E. B., Davis S. H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface.— «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 65, pt 1.
3. Hansen R. J., Toong T. Y. Dynamic contact angle and its relationship to forces of hydrodynamic origin.— «J. Colloid and Interface Sci.», 1971, vol. 37, N 1.
4. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил.— ПМТФ, 1970, № 1.
5. Friz G. Über den dynamischen Randwinkel im Falle der vollständigen Benetzung.— «Z. Angew. Phys.», 1965, Bd 19, N. 4.
6. Железный Б. В. К гидродинамике наступающего мениска смачивающей жидкости.— «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 1.
7. Huh C., Scriven L. E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line.— «J. Colloid and Interface Sci.», 1971, vol. 35, N 1.
8. Зонтар Г., Штрэнге К. Коагуляция и устойчивость дисперсных систем. Л., «Химия», 1973.
9. Архипов Р. Г. Неустойчивость течения сверхтекучей пленки.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 1.
10. Воинов О. В. К гидродинамическому описанию пленки простой жидкости.— «Журн. физ. химии», 1972, т. 46, вып. 2.

УДК 532.517.43

ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ СТЕНОК

И. А. Белов

(Ленинград)

1. Известно, что при течении ускоренных потоков вблизи неподвижных границ влияние вязкости на поле течения сказывается на весьма небольших расстояниях от границ рассматриваемой области. На значительной части области течение может быть принято идеальным, потенциальным или вихревым с интенсивностью вихря, определяемой условиями формирования потока вдали от границ области.