

О ЗАТУХАНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

В. И. Карман

(Новосибирск)

Исследуется влияние слабых столкновений на свойства волн конечной амплитуды. Рассмотрен предельный переход к теории Ландау.

1. В работе [1] был вычислен декремент затухания продольной плазменной волны конечной (но малой) амплитуды в предположении достаточной малости частоты столкновений. Метод, использованный при этом, состоял в следующем. Из кинетического уравнения определялась функция распределения электронов¹ (предполагалось, что изменением амплитуды волны, связанным с ее затуханием, можно пренебречь, так что в системе, где волна покоится, ее можно было считать стационарной).

Затухание волны вычислялось затем по формуле

$$\langle W' \rangle = - \langle (Ej) \rangle, \quad j = e \int_{-\infty}^{\infty} f(v) v dv \quad (1.1)$$

где E — напряженность поля волны, j — плотность тока, индуцированного волной (в системе, где плазма покоится), а W — плотность энергии волны; угловые скобки означают осреднение, так например $\langle W \rangle$ — средняя плотность по периоду колебаний.

Кинетическое уравнение для функции распределения в системе покоя волны с учетом столкновений можно написать в виде ([1], уравнение (14))²

$$u \frac{\partial f}{\partial y} - \Psi'(y) \frac{\partial f}{\partial u} = \mu \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial f}{\partial u} + (u + \alpha) f \right] \quad (1.2.1)$$

где все величины приведены к безразмерному виду

$$\Psi(y) = -\frac{e\Phi}{T}, \quad y = kx, \quad \Phi(x) = \Phi_0 \cos^2 \frac{kx}{2} \\ \alpha = v_f \left(\frac{T}{m} \right)^{-1/2}, \quad \mu = \frac{3}{2kv_f \tau_D}, \quad \tau_D = \frac{m^2 v_f}{8\pi e^4 n L} \quad (1.2.2)$$

где $\Phi(x)$ — потенциал волны в системе, где она покоится, k и v_f — ее волновое число и фазовая скорость, соответственно, τ_D — эффективное время столкновений для электронов, скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны [2], L — кулоновский логарифм, $\Phi(y)$, y , α и μ — безразмерные потенциальная энергия, координата, фазовая скорость и частота столкновений соответственно.

В работе [1] предполагалось, что безразмерная частота столкновений μ и амплитуда потенциала Φ_0 удовлетворяют соотношению

$$\mu \ll \Phi_0 \ll 1 \quad (1.3)$$

¹ Ионы для упрощения расчета предполагаются бесконечно тяжелыми (покоящимися) и равномерно распределенными в пространстве.

² В уравнениях (14) работы [1] допущена опечатка: перед $\Psi'(y)$ стоит знак +

что соответствует волне конечной, но малой амплитуды и исчезающе малой частоте столкновений. Физический смысл (1.3) состоит в том, что амплитуда волны должна значительно превышать уровень теплового шума, однако потенциальная энергия частиц в поле волны должна быть значительно меньше, чем их тепловая энергия, частота же столкновений может быть сколь угодно малой. При условии (1.3) удобно перейти к новым независимым переменным для функции распределения

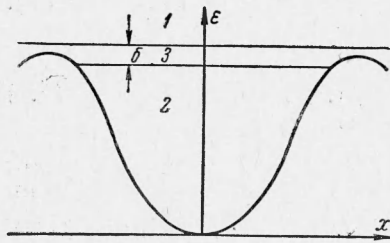
$$u, y \rightarrow \varepsilon = \frac{u^2}{2} + \varphi(y), y$$

где ε — безразмерная полная энергия частицы в поле волны. Тогда уравнение (1.2.1) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial y} = v \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\pm \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \left(f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) + cf \right] \quad (1.4)$$

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = v_f \left(\frac{2T}{m} \right)^{-1/2}, \quad v = \sqrt{2} \mu = \frac{3}{\sqrt{2} k v_T \tau_D}$$

где знаки \pm перед корнем отвечают различным направлениям скоростей электронов относительно волны (плюс берется для частиц, опережающих волну).



1 — внешняя область,
2 — внутренняя область,
3 — пограничный слой

При решении уравнения (1.4) рассматривались два случая: $\varepsilon > \varphi_0$ (внешняя область) и $\varepsilon < \varphi_0$ (внутренняя область, см. фигуру). Решение уравнения (1.4) искалось в виде разложения по степеням v

$$f(\varepsilon, y) = f_0(\varepsilon) + v f_1(\varepsilon, y) + \dots \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\pm \sqrt{\varepsilon - \varphi(y)} \left(f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) + c f_0 \right] \quad (1.6)$$

Как было показано в [1], функция нулевого приближения $f_0(\varepsilon)$ во внешней области однозначно определяется условием периодичности $f_1(\varepsilon, y)$ относительно y и граничным условием, заключающимся в том, что при $\varepsilon \gg \varphi_0$ величина $f_0(\varepsilon)$ должна асимптотически приближаться к распределению Максвелла для плазмы, движущейся со скоростью — c относительно волны. Выражение для $f_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon > \varphi_0$ имеет вид

$$f_0^\pm(\varepsilon) = \frac{n}{\sqrt{2\pi} v_T} e^{-c^2} \exp \left[-\varepsilon \mp \frac{c\pi}{2} \sqrt{\varphi_0} \int_1^{\varepsilon/\varphi_0} \frac{dt}{\sqrt{t} E(t^{1/2})} \right] \quad (1.7)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz \quad (k \leq 1)$$

$$f_0^\pm(\varepsilon) = A \exp \left(-\varepsilon \mp \frac{c\pi}{2} \frac{\varepsilon - \varphi_0}{\sqrt{\varphi_0}} \right), \quad \frac{\varepsilon - \varphi_0}{\varphi_0} \ll 1, \quad A = \frac{n}{\sqrt{2\pi} v_T} e^{-c^2} \quad (1.8)$$

$$f_0^\pm(\varepsilon) = \frac{n}{\sqrt{2\pi} v_T} \exp [-(\sqrt{\varepsilon} \mp c)^2] \quad (\varepsilon \gg \varphi_0)$$

Выражение для f_1 имеет вид

$$f_1(y) = \frac{c\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ f_0(\varepsilon) \int dy \left[\frac{2}{\pi} - \left(1 - \frac{\varphi_0}{\varepsilon} \sin^2 \frac{y}{2} \right)^{1/2} E^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varepsilon}} \right) \right] \right\} \quad (1.9)$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k = (\varphi_0/\varepsilon)^{1/2}$.

Из (1.8), (1.9) следует, что при $\varepsilon \rightarrow \varphi_0 + 0$ величина $f_1(\varepsilon, y)$ имеет логарифмическую расходимость, так что разложение (1.5) при $\varepsilon \rightarrow \varphi_0$ уже неприменимо.

Что касается внутренней области, то в [1] было предположено, что функция распределения там выражается одним из частных решений уравнения (1.2)

$$f(\varepsilon, y) = A e^{-\varepsilon - \nu cy}, \quad -2 \arcsin \sqrt{\varepsilon/\varphi_0} < y < 2 \arcsin \sqrt{\varepsilon/\varphi_0} \quad (1.10)$$

При этом, как легко видеть, функция распределения в нулевом приближении по ν является непрерывной на границе внешней и внутренней областей ($\varepsilon = \varphi_0$), однако ее первая производная претерпевает при $\varepsilon = \varphi_0$ скачок. Этот факт не вызывает удивления, так как разложение по степеням ν в окрестности линии $\varepsilon = \varphi_0$ неприменимо. В связи с этим в [1] было высказано предположение, что между внешней областью (где плазма движется относительно волны) и внутренней областью (где плазма покоится относительно волны) имеется узкая область, названная, по аналогии с гидродинамикой, пограничным слоем, где решение из внешней области непрерывно переходит вместе со своими производными в решение для внутренней области. В пограничном слое, очевидно, уже нельзя пользоваться разложением по степеням ν .

Вид функции распределения в пограничном слое не был найден в [1], однако там было показано, что этот слой вносит существенный вклад в затухание волны. Этот вклад оказалось возможным учесть без знания детальной структуры пограничного слоя. Таким образом, справедливость результатов работы [1] существенно зависит от вопроса о существовании пограничного слоя с постулированными в [1] общими свойствами. Далее рассмотрим исследование этого вопроса.

2. В принципе возможны два случая. Первый состоит в том, что разложение (1.5), справедливость которого нарушается при $\varepsilon = \varphi_0$, не имеет также места и во внутренней области. В этом случае, однако, не существует предельного перехода при $\nu \rightarrow 0$ к плазме без столкновений, что, очевидно, не является удовлетворительным. Вторая возможность состоит в том, что функция распределения при $\varepsilon < \varphi_0$ (но не слишком близко к линии $\varepsilon = \varphi_0$) может быть разложена по степеням ν . Тогда имеет место уравнение (1.9) для f_1 . Аналогичные уравнения можно получить для поправок высшего порядка. Легко видеть, что для того чтобы в высших приближениях не появлялось расходимостей в «точках поворота» $\varepsilon = \varphi(y)$, необходимо потребовать выполнения условия

$$f_0 + \frac{df_0}{d\varepsilon} = 0, \quad f_0 = \text{const } e^{-\varepsilon} \quad (2.1)$$

Таким образом, функция распределения во внутренней области в нулевом приближении по ν совпадает с распределением Максвелла — Больцмана, что вполне естественно для частиц, «захваченных» волной. Постоянную интегрирования в (2.1) можно выбрать так, чтобы f_0 непрерывно переходила в $f_0(\varepsilon)$ для внешней области.

Вычисляя теперь высшие приближения и суммируя получающийся ряд, приходим к выражению (1.10), совпадающему с решением, полученным в [1].

Однако, как показано выше, разложение (1.5), справедливое как во внешней, так и во внутренней областях, не может быть справедливым при $\varepsilon \rightarrow \varphi_0$. Поэтому в данном случае должен существовать пограничный слой,

в котором осуществляется непрерывный переход функции распределения из внешней области во внутреннюю и где последняя уже не разлагается по степеням ν . Из соображений о существовании предельного перехода к плазме без столкновений при $\nu \rightarrow 0$ можно ожидать, что ширина этого слоя должна исчезать при $\nu \rightarrow 0$.

Приступим к исследованию структуры пограничного слоя. Очевидно, изменение функции распределения в этой области должно быть малым. Ее первая производная $\partial f / \partial \varepsilon$ должна изменяться там на конечную величину. Поэтому вторая производная в пограничном слое должна быть значительно больше, чем f и $\partial f / \partial \varepsilon$. Благодаря этому в кинетическом уравнении (1.2.1) в пограничном слое можно отбросить члены с f и $\partial f / \partial \varepsilon$ в правой части, а также положить $\varepsilon = \varphi_0$. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \pm \varphi_0^{1/2\nu} \cos \frac{y}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \quad (2.2)$$

Следует отметить, что это уравнение несправедливо в достаточно малых окрестностях максимумов потенциала, ибо там уже нельзя пренебрегать членами, содержащими $\sqrt{\varepsilon - \varphi(y)}$ в знаменателе. Вводя обозначения

$$z = 1/2 \sin 1/2 y \quad (2.3)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \pm \nu \varphi_0^{1/2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \quad (2.4)$$

из которого следует, что ширина пограничного слоя должна быть порядка

$$\delta \sim \varphi_0^{1/4} \nu^{1/2} \quad (2.5)$$

Изменение функции распределения в пределах пограничного слоя можно оценить, исходя из того, что $\partial f / \partial \varepsilon \sim 1$. Сопоставляя это с (2.5), получаем

$$\frac{\Delta f}{f} \sim \varphi_0^{1/4} \nu^{1/2} \quad (2.6)$$

Таким образом ширина пограничного слоя значительно больше тех значений $|\varepsilon - \varphi_0|$, при которых становится существенной логарифмическая расходимость в функции $f_1(\varepsilon, y)$, поэтому изменение функции распределения в пограничном слое оказывается значительно большим, чем поправка к $f_0(\varepsilon)$ в окрестности пограничного слоя, которая равна $\nu f_1(\varepsilon, y)$. Поэтому в качестве граничных условий для $f(\varepsilon, y)$ вне пограничного слоя можно взять значения $f_0(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь функцию распределения частиц, обгоняющих волну, для которых берется знак $+$ в (2.4). В этом случае (2.4) совпадает с уравнением теплопроводности, и для функции распределения в пограничном слое можно написать выражение

$$f(\varepsilon, y) = \left[2\nu\varphi_0^{1/2} \left(\cos \frac{y}{2} - \cos \frac{y_1}{2} \right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon', y_1) \exp \left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4\nu\varphi_0^{1/2} (\cos 1/2 y - \cos 1/2 y_1)} \right] d\varepsilon' \quad (y < y_1) \quad (2.7)$$

где y_1 — точка, лежащая достаточно близко от правой вершины потенциала, но вне малого интервала, где уравнение (2.4) уже не имеет места. Формула (2.7) определяет функцию распределения во всех точках $y < y_1$ между двумя максимумами потенциала, где справедливо (2.4), через зна-

чения функции распределения при $y = y_1$. Функцию $F(\varepsilon', y_1)$ можно считать совпадающей с $f_0(\varepsilon)$ во внешней и внутренней областях вне узкого интервала $\varphi_0 \pm (\varphi_0^{1/2} \nu)^{1/2}$, где становится большой $\partial^2 f / \partial \varepsilon^2$.

Для функции распределения частиц, отстающих от волны (когда в (2.4) стоит минус), можно написать аналогичное выражение, только в качестве y_1 берется точка, лежащая у левого максимума $\varphi(y)$:

$$f(\varepsilon, y) = [2\pi\nu\varphi_0^{1/2} (\cos^{1/2} y_1 - \cos^{1/2} y)]^{-1/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon', y_1) \exp \frac{-(\varepsilon - \varepsilon')^2}{4\nu\varphi_0^{1/2} (\cos^{1/2} y_1 - \cos^{1/2} y)} d\varepsilon' \quad (y > y_1) \quad (2.8)$$

Таким образом, получаем формулы, определяющие решение во всех точках у пограничного слоя через «начальные» значения при $y = y_1$. Хотя последние нам неизвестны, формулы (2.7), (2.8) полностью определяют структуру пограничного слоя. Из них, в частности, следует, что на протяжении всей области изменения y порядок толщины пограничного слоя остается неизменным ($\Delta\varepsilon \sim (\nu\varphi_0^{1/2})^{1/2}$). Подтверждаются также и другие качественные особенности пограничного слоя, о которых говорилось выше. Из (2.7) и (2.8) видно, каким образом осуществляется непрерывный переход функции распределения и ее производных от значений во внешней области к внутренней, где эти величины определяются различными аналитическими выражениями.

Полученные выше результаты относительно пограничного слоя¹ подтверждают справедливость гипотез работы [1] при вычислении затухания волны в случае, когда амплитуда волны достаточно велика (в смысле неравенства (1.3)). Затухание волны, вычисленное по формуле (1.1), в этом случае имеет вид

$$\gamma = - \frac{\tau \langle W \rangle}{2W} = \frac{12\alpha}{\tau_D} \left(\frac{v_f}{v_T} \right)^2 \exp \left(- \frac{v_f^2}{2v_T^2} \right) \left(\frac{e\Phi_0}{T} \right)^{-3/2} \\ \langle W \rangle = \frac{E_0^2 i}{16\pi}, \quad \alpha = \frac{7\pi + 6}{16\sqrt{\pi}} \approx 0.95 \quad (2.9)$$

3. Представляет интерес рассмотреть, с изложенной точки зрения, другой предельный случай достаточно слабых волн, когда вместо (1.9) имеет место соотношение

$$\varphi_0 \ll \mu \ll 1 \quad (3.1)$$

Очевидно, здесь разложение по степеням μ уже неприменимо, и вместо него можно разлагать функцию распределения по степеням φ_0 . Разумеется, это можно сделать только для внешней области, достаточно далекой от пограничного слоя. Однако из полученных ниже результатов будет видно, что именно эта область вносит основной вклад в затухание волны, так как при условии (3.1) влияние столкновений на функцию распределения существенно при столь больших энергиях частиц, где поле еще можно рассматривать как возмущение.

При разложении по степеням поля удобнее исходить из кинетического уравнения в форме (1.24). Ищем решение этого уравнения в виде

$$f(u, y) = f_0(u) + \varphi_0 f_1(u, y) + \dots \quad (3.2)$$

¹ Разумеется существование пограничного слоя и все вытекающие из него следствия обусловлены диффузионным характером столкновительного члена в (1.2.1). В τ -приближении ($st(f) = (f_0 - f)/\tau$) результаты будут совершенно другими.

где f_0 — решение уравнения (1.2.1) при $\varphi_0 = 0$, которое является, очевидно, распределением Максвелла для плазмы, движущейся со скоростью $-\alpha$ относительно плазмы (напоминаем, что уравнение (1.2.1) написано в системе покоя волны, α — ее фазовая скорость)

$$f_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u+\alpha)^2}{2}\right] \quad (3.3)$$

Тогда для $f_1(u, y)$ получаем уравнение (при этом подставлено выражение функции $\varphi(y) = \varphi_0 \sin^2(y/2)$)

$$u \frac{\partial f_1}{\partial y} - \mu \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial f_1}{\partial u} + (u + \alpha) f_1 \right] = \sin y \frac{df_0}{du} \quad (3.4)$$

Как обычно, можно написать

$$f_1(u, y) = \frac{i}{2i} [e^{iy} F(u) - e^{-iy} F^*(u)] \quad (3.5)$$

где $F(u)$ удовлетворяет уравнению

$$iuF - \mu \frac{d}{du} \left[\frac{dF}{du} + (u + \alpha) F \right] = \frac{df_0}{du} \quad (3.6)$$

Это уравнение является стационарным аналогом уравнения, рассматривавшегося Ленардом и Бернштейном [3]. Его можно решить, разлагая обе части (3.6) в интеграл Фурье:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sigma) e^{-i\sigma u} d\sigma \quad (3.7)$$

$$\frac{df_0}{du} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \exp\left\{-\left[\frac{\sigma^2}{2} - i\sigma(\alpha + u)\right]\right\} d\sigma \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7), (3.8) в (3.6), получим

$$\frac{dQ}{d\sigma} (1 + \mu\sigma) + \mu (\sigma^2 + i\alpha\sigma) Q = -i\sigma \exp\left[-\left(\frac{\sigma^2}{2} + i\sigma\alpha\right)\right] \quad (3.9)$$

Положим

$$Q(\sigma) = \exp(-1/2\sigma^2 - \gamma\sigma) \psi(\sigma) \quad (\gamma = 1/\mu - i\alpha) \quad (3.10)$$

Тогда $\psi(\sigma)$ удовлетворяет простому уравнению

$$(1 + \mu\sigma) \psi' + \gamma\psi = -i\sigma \exp(-\sigma/\mu) \quad (3.11)$$

решение которого имеет вид

$$\psi(\sigma) = -i(1 + \mu\sigma)^{-\gamma/\mu} \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma' (1 + \mu\sigma')^{\gamma/\mu - 1} \sigma' e^{-\sigma'/\mu} \quad (3.12)$$

где σ_0 — постоянная интегрирования. Для того чтобы $\psi(\sigma)$ не имело особенностей на вещественной оси (в противном случае интеграл Фурье (3.7) потеряет смысл), необходимо положить $\sigma_0 = -1/\mu$. Вводя в интеграле (3.12) новую переменную интегрирования $t = \mu^{-1} \ln(1 + \mu\sigma)$ и разлагая

подынтегральное выражение по степеням μ , получим

$$\int_{-1/\mu}^{\sigma} (1 + \mu\sigma')^{\gamma/\mu-1} \sigma' e^{-\sigma'/\mu} d\sigma' = \int_{-\infty}^{\sigma} t \exp\left(-ita - \frac{t^2}{2}\right) dt + O(\mu) \quad (3.13)$$

Далее нетрудно убедиться, что

$$(1 + \mu\sigma)^{-\gamma/\mu} = \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu} + i\alpha\sigma + \frac{\sigma^2}{2} + O(\mu)\right) \quad (3.14)$$

Подставляя (3.12) — (3.14) в (3.10), будем иметь

$$Q(\sigma) = -i \int_{-\infty}^{\sigma} t \exp\left(-ita - \frac{t^2}{2}\right) dt + O(\mu) \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.7), получаем решение кинетического уравнения (3.6) в комплексной форме

$$F(u) = \frac{1}{i(u-i\delta)} \frac{df_0}{du} \quad (\delta \rightarrow +0) \quad (3.16)$$

Это решение, с точностью до малой мнимой добавки в знаменателе, соответствует тому, что получается непосредственно из уравнения (3.6), если там формально положить $\mu = 0$. В (3.16), кроме того, автоматически содержится правило обхода полюса при $u \rightarrow 0$. Подстановка (3.16) в (3.5), (3.2) приводит к известным результатам линейной теории Ландау. Если теперь подставить найденную функцию распределения в формулу (1.1) для изменения энергии волны, то получим обычное затухание Ландау

$$\gamma = -\frac{\langle W \rangle}{E_0^2/8\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \omega_0 \left(\frac{v_f}{v_T}\right)^2 \exp\left(-\frac{v_f^2}{2v_T^2}\right)$$

Таким образом, решение стационарного кинетического уравнения (1.2.1) при $\mu \neq 0$ и условия (3.1) приводит к тем же результатам, что и решение Ландау соответствующей нестационарной задачи с $\mu = 0$.

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение работы.

Поступила 30 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е., Карпман В. И. К нелинейной теории затухания плазменных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 43, стр. 490.
2. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. Изд. иностр. лит., М., 1957.
3. Leonard A., Bernstein I. Plasma Oscillations with Diffusion in Velocity Space. Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 1956.