

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИИ
ВЫСОКОИОНИЗОВАННОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Б. Ф. Гордиец, Л. И. Гудзенко, Л. А. Шелепин
(Москва)

Обсуждается задача релаксации в высокоионизованной однородной плазме. Приведены результаты расчета импульсной рекомбинации и ионизации в основном применительно к получению усиления излучения на переходах атомарного водорода.

Одна из актуальных прикладных задач — получение источника неравновесного излучения на основе сравнительно плотной высокоионизованной плазмы, и, в частности, создание активной среды, эффективно усиливающей электромагнитное излучение. В работах [1,2] на примере водорода были проведены первые оценки, показавшие возможность создания инверсной заселенности нескольких дискретных уровней (атомов или ионов) при импульсной рекомбинации плазмы.

В [2] приведено решение алгебраической системы уравнений для населенностей нижних дискретных уровней и плотности свободных электронов в предположении так называемого «постоянного стока» [3], когда в процессе рекомбинации населенности N_n возбужденных состояний и плотности свободных электронов N_e не изменяются во времени.

Однако при быстром охлаждении свободных электронов решение уравнений постоянного стока может оказаться непригодным для описания истинной картины релаксации даже в оптически тонкой плазме. Учет же реабсорбции резонансного излучения, сильно меняющейся в ходе рекомбинации или ионизации, требует анализа нестационарной задачи, связанной с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений релаксации.

Чтобы учесть реабсорбцию излучения, воспользуемся эффективной вероятностью радиационного перехода

$$A^*(m, n) = F(m, n) A(m, n) \tag{1}$$

Здесь $A(m, n)$ — вероятность спонтанного распада; m и n — главные квантовые числа; $F(m, n)$ — коэффициент, зависящий от характерных размеров плазмы, формы линии поглощения на переходе $m \rightarrow n$ и плотности атомов на уровне n .

Для рассматриваемых здесь параметров плазмы существенную роль в пленении излучения могут играть лишь линии серии Лаймана. Полагая, что последние имеют доплеровский контур, для бесконечно длинного цилиндра радиуса R [4] имеем

$$F(m, 1) = 1 \text{ при } k(m, 1) R < 2$$

$$F(m, 1) = \frac{1.6}{k(m, 1) R \sqrt{\pi} \ln [k(m, 1) R]} \text{ при } k(m, 1) R \geq 2$$

где $k(m, 1)$ — коэффициент поглощения в середине спектральной линии

$$k(m, 1) = 6.2 \cdot 10^{-13} m^{-3} (1 - m^{-2})^{-4} N_1$$

Уравнения баланса для населенностей дискретных уровней водорода имеют следующий вид:

$$\frac{dN_n}{dt} = -N_n \left\{ \sum_{m=n+1}^g V(n, m) N_e + \sum_{m=1}^{n-1} R(n, m) N_e + [B(n, e) + B(n, g)] N_e + A^*(n) \right\} + \sum_{m=n+1}^g [R(m, n) N_e + A^*(m, n)] N_m + \sum_{m=1}^{n-1} V(m, n) N_e N_m + N_e^3 [B(e, n) + B(g, n)] + N_e^2 [A(e, n) + A(g, n)] \tag{2}$$

Рассматривалась система девяти уравнений для нижних дискретных уровней $n = 1 \div 9$. Верхние уровни ($n > 9$) предполагались находящимися в равновесии со свободными электронами, и населенности на них определялись по формуле Саха. Совокупность этих уровней обозначена символом g . Предполагалось, что они составляют (эффективно, при данном расчете) квазинепрерывный спектр. Для вероятностей элементарных процессов введены следующие обозначения: $V(n, m)$ и $R(n, m)$ соответствуют соударениям первого и второго рода атома с электроном, $B(n, e)$ — иони-

зации, $B(e, n)$ — тройной рекомбинации, $A(e, n)$ — радиационной рекомбинации. Коэффициенты $B(n, g)$ и $B(g, n)$ соответствуют вероятностям перехода электрона с нижних дискретных уровней в квазинепрерывный спектр и обратно вследствие столкновения со свободным электроном, $A(g, n)$ — вследствие спонтанного распада. Были использованы следующие вероятности радиационных переходов¹.

$$A(n) = 1.66 \cdot 10^{10} n^{-4.5}, \quad A^*(n) = \sum_{m=1}^{n-1} A(n, m)$$

$$A(m, n) = 1.57 \cdot 10^{10} n^{-3} m^{-3} (n^{-2} - m^{-2})^{-1}$$

$$A(e, n) + A(g, n) = 5.2 \cdot 10^{-14} n^{-3} \left(\frac{Ry}{kT_e}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{E_n}{kT_e}\right) i\left(-\frac{|E_{10, n}|}{kT_e}\right)$$

$$E_{m, n} = E_m - E_n, \quad E_n = Ry n^{-2}$$

Здесь T_e — температура свободных электронов, Ry — постоянная Ридберга. Коэффициенты, описывающие столкновительные процессы, после усреднения полуэмпирических сечений, основанных на формуле Бете [6], по максвелловскому распределению для скоростей свободных электронов, имеют вид

$$V(n, m) = 1.73 \cdot 10^{-7} n^{-3} m^{-3} \left(\frac{Ry}{kT_e}\right)^{3/2} \left(\frac{E_n, m}{kT_e}\right)^{-4} \exp\left(-\frac{|E_n, m|}{kT_e}\right) U\left(\frac{|E_n, m|}{kT_e}\right)$$

$$R(m, n) = V(n, m) n^2 m^{-2} \exp\left(\frac{|E_n, m|}{kT_e}\right)$$

$$B(n, g) + B(n, e) = 8.65 \cdot 10^{-8} n^{-5} \left(\frac{Ry}{kT_e}\right)^{7/2} \int_{\xi_n}^{\infty} z^{-4} U(z) \exp(-z) dz$$

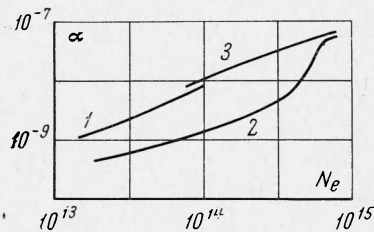
$$B(g, n) + B(e, n) = 5.5 \cdot 10^{-31} n^{-3} \left(\frac{Ry}{kT_e}\right)^5 \exp\left(\frac{E_n}{kT_e}\right) \int_{\xi_n}^{\infty} z^{-4} U(z) \exp(-z) dz$$

$$U(z) = 1 + z \exp(z) E_i(-z) \quad (\xi_n = E_n / kT_e)$$

Система уравнений (2) дополняется уравнением сохранения общего количества электронов в 1 см^3 плазмы, совпадающего с плотностью тяжелых частиц

$$N = N_e + \sum_{n=1}^g N_n + \frac{N_e^2}{3} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m Ry}\right)^{3/2} \left(\frac{Ry}{kT_e}\right)^{3/4} \left(\frac{m^3 e^6}{8\pi\hbar^6 N}\right)^{3/4}$$

Задача о распаде неравновесной плазмы численно решалась при начальных плотностях $N_e = 10^{14}, 10^{15} \text{ см}^{-3}$ и температурах $kT_e = 0.05, 0.1, 0.2 \text{ эв}$ для бесконечного цилиндра радиуса $R = 3 \text{ мм}$. Начальные заселенности нижних уровней ($n \leq 9$) были взяты в соответствии с бoльцмановским распределением для $kT_e^0 = 2 \text{ эв}$. Охлаждение свободных электронов плазмы от 2 эв до kT_e предполагалось мгновенным. Расчет проводился на ЭВЦМ методом Рунге-Кутты с переменным шагом. На фиг. 1 приведена зависимость от электронной концентрации N_e (см^{-3}) коэффициента рекомбинации $\alpha = -N_e^{-2} dN_e/dt$ ($\text{см}^3 \text{ сек}^{-1}$) при $kT_e = 0.1 \text{ эв}$ для $N = 10^{14}$ и 10^{15} см^{-3} . Роль реабсорбции излучения, которая замедляет рекомбинацию, растет с увеличением плотности плазмы. Поэтому кривая 2, соответствующая $N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, лежит ниже



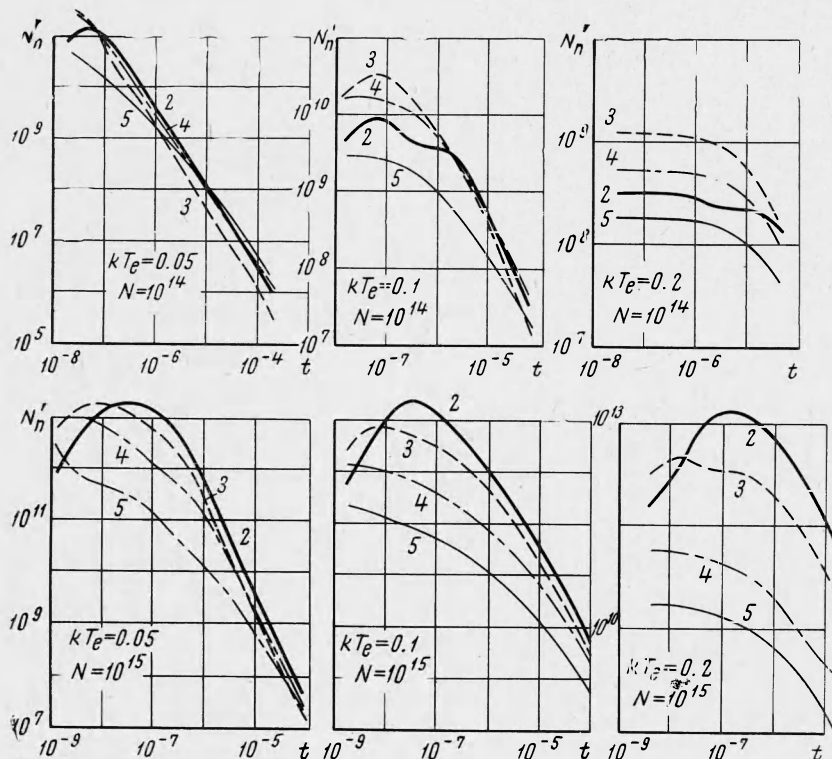
Фиг. 1

кривой 1 ($N = 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Для сравнения приведена также зависимость α от N_e при $N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ для оптически тонкой плазмы (кривая 3). На фиг. 2 показана зависимость от времени $t \text{ сек}$ приведенных населенностей N_n' (см^{-3}) уровней ($N_n' = N_n/g_n, g_n$ — статистический вес уровня n) для различных $N \text{ см}^{-3}$ и $kT_e \text{ эв}$. Как видно из графиков, в процессе рекомбинации при $kT_e = 0.05 \div 0.2 \text{ эв}$, $N = 10^{14}, 10^{15} \text{ см}^{-3}$ реализуется инверсная заселенность ряда уровней. Причиной этого является более быстрое заселение верхних уровней за счет потока электронов при импульсной

¹ Более подробно см. [5].

рекомбинации из непрерывного спектра и обеднение нижних возбужденных состояний вследствие большой вероятности их радиационного распада. Реабсорбция резонансного излучения, эффективно уменьшая вероятность радиационного распада в плотной плазме, существенно влияет на наличие инверсности.

Непосредственно после мгновенного охлаждения свободных электронов, когда заселенность основного состояния еще мала и практически отсутствует реабсорбция, в плазме существует инверсная заселенность уровней 3—2 (для $N = 10^{15} \text{ см}^{-3}$) и уровней



Фиг. 2

3—2 и 4—2 (для $N = 10^{14} \text{ см}^{-3}$). По мере того, как в основном состоянии оказывается все больше атомов, начинается существенная реабсорбция линии L_α ; при этом заселенность второго уровня несколько растет и инверсная заселенность относительно него исчезает. Отметим, что для сильно ионизованной распадающейся плазмы с параметрами $kT_e = 0.05$ и 0.1 эВ , $N = 10^{14}$ и 10^{15} см^{-3} в первый период рекомбинации, когда плотность свободных электронов еще велика ($\geq 4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$), инверсная заселенность может существовать только относительно второго уровня.

Когда вследствие рекомбинации, N_e становится меньше $4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, возникает инверсность четвертого уровня относительно третьего; при еще меньших N_e может возникнуть инверсная заселенность 5- и 4-го уровней. Это связано с тем, что при больших плотностях свободные электроны разравнивают заселенности этих состояний. Когда же N_e существенно уменьшается, возрастает роль радиационных процессов (особенно радиационного распада уровня 3, поскольку реабсорбция линий H_α и L_β невелика). Инверсность между уровнями 4 и 3 интересна еще и тем, что она может существовать и при наличии в основном состоянии большого числа атомов, в то время как инверсность относительно 2-го уровня существует лишь до тех пор, пока не вступает в игру реабсорбция линии L_α .

Коэффициент отрицательного поглощения на 1 см пути фотона вычисляется по формуле

$$\kappa_{m, n} = \frac{\lambda_{m, n}^2}{4\Gamma_{m, n}} A^*(m, n) (N_{m'} - N_n')$$

Здесь $\lambda_{m,n}$ — длина волны, а $\Gamma_{m,n}$ — ширина линии. В табл. 1 приведены коэффициенты $\kappa_{m,n}$ для нескольких значений kT_e и моментов времени t ; они вполне достаточны для создания лазера.

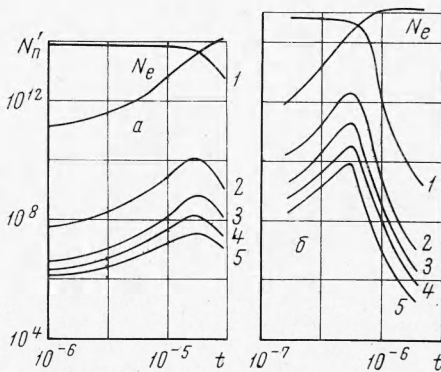
Для получения генерации в лабораторных условиях необходимо компенсировать потери в зеркале на пути в среде $l \leq 1$ м; поэтому в видимом диапазоне и примыкающих участках спектра усиление эффективно, если $\chi \geq 10^{-4}$ см⁻¹. Это приводит к ограничению плотности высокоионизованного водорода значениями $N = 10^{13} \div 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ (при $N < 10^{13}$ см⁻³ мало усиливающих атомов, при $N > 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³ из-за роста с плотностью N_e неупругих соударений падает инверсность); средняя энергия свободных электронов не должна превышать 0.2 эв. Охлаждение электронов от энергии $kT_e^0 \approx 2$ эв, соответствующей при равновесии практически полной ионизации водорода, согласно предварительным оценкам работы 1, должно происходить за время $\Delta t \leq 10^{-7}$ сек. До последнего времени анализ методов резкого охлаждения электронов не проводился, и сформулированные тут требования казались экспериментаторам неосуществимыми; поэтому важно было показать физическую реальность такой задачи.

В статье [7] обсуждалось охлаждение свободных электронов при адиабатическом расширении плазмы в вакууме: газокINETическом разлете, разлете замагниченной струи. Оценки показали, что в технических реальных условиях необходимое охлаждение достигается при разлете за достаточно малые времена. В работе [8] были проведены оценки времен охлаждения свободных электронов после резкого обрыва греющего поля — в результате упругих соударений электронов с холодными тяжелыми частицами плазмы, а также вследствие амбиплярной диффузии к стенкам газоразрядной трубки. Оказалось, что в условиях обычного газового разряда в чистом водороде и в смеси водорода с гелием время глубокого охлаждения может быть $\leq 10^{-7}$ сек.

Таблица 1
Коэффициенты отрицательного поглощения κ (см⁻¹) для некоторых переходов при различных значениях температуры kT_e (эв) и плотности N (см⁻³) в различные моменты времени t (сек)

kT_e	N	t	Переход	κ
0.2	10^{15}	$1.5 \cdot 10^{-8}$	3 = 2	$3.4 \cdot 10^{-2}$
0.05	10^{14}	$6.4 \cdot 10^{-8}$	3 = 2	$5.3 \cdot 10^{-2}$
0.1	10^{14}	$1.7 \cdot 10^{-6}$	3 = 2	$4.9 \cdot 10^{-4}$
0.2	10^{14}	10^{-5}	3 = 2	$4.9 \cdot 10^{-4}$
0.2	10^{15}	$4.4 \cdot 10^{-5}$	3 = 2	$3.1 \cdot 10^{-5}$
0.05	10^{15}	$5.7 \cdot 10^{-6}$	4 = 3	$1.8 \cdot 10^{-3}$
0.05	10^{15}	$2.3 \cdot 10^{-5}$	4 = 3	$8 \cdot 10^{-4}$
0.05	10^{14}	$1.4 \cdot 10^{-6}$	4 = 3	$5.8 \cdot 10^{-3}$
0.1	10^{14}	$3.7 \cdot 10^{-6}$	4 = 3	$6 \cdot 10^{-4}$
0.1	10^{14}	$4.5 \cdot 10^{-5}$	4 = 3	$4.1 \cdot 10^{-4}$

Детальные расчеты показывают, что сформулированные требования к времени охлаждения можно существенно смягчить. Длительности существования инверсности в импульсно рекомбинирующем водороде для нескольких переходов приведены в табл. 2, согласно которой, как правило, времена охлаждения не должны превышать $10^{-6} \div 10^{-5}$ сек. Реабсорбция ухудшает условия рекомбинации, поэтому целесообразно работать с газоразрядными трубками небольшого диаметра. С другой стороны, трубку нельзя делать и чрезмерно тонкой — это затруднит зажигание и поддержание разряда, ухудшит соотношение между полезной (для обсуждаемых здесь целей) объемной рекомбинацией и «вредной», пристеночной рекомбинацией, заселяющей безызлучательно нижние уровни. Чтобы, не снижая эффективности охлаждения, уменьшить пристеночную рекомбинацию, целесообразно вести разряд в смеси водорода с достаточным количеством газа-наполнителя, у которого потенциал ионизации существенно выше, чем у водорода. Таким газом, который, не влияя непосредственно на кинетику релаксации, создает емкий термостат холодных тяжелых частиц, может служить гелий (см. [8,9]). Грубую оценку подходящей концентрации гелия дает условие преобладания после охлаждения объемной рекомбинации над пристеночной



Фиг. 3

$$\alpha N_e^2 > \frac{DN_e}{(R/2.4)^2}$$

где D — коэффициент амбиполярной диффузии. При $T_e \approx 2000^\circ \text{K}$, $N_e \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $R \approx 0,3 \text{ см}$ получаем давление гелия $p \approx 1,3 \text{ мм рт. ст.}$. Отметим, что для уменьшения потерь свободных электронов из-за диффузии к стенке целесообразно наложить продольное магнитное поле (величина которого не должна превышать критическое значение), что облегчит зажигание разряда и его стабилизацию.

В плазме более сложного химического состава, чем чисто водородная, процессы ионизационной (и рекомбинационной) релаксации протекают сразу по нескольким каналам, характерные времена которых часто существенно различны (см. также [10]). Поэтому представляет интерес анализ возможности создания эффективно усиливающей среды непосредственно при ее быстрой ионизации. В чисто водородной плазме, релаксация которой здесь обсуждается, такая ситуация отсутствует.

Все же на анализе ионизации водорода целесообразно кратко остановиться уже потому, что она является начальной стадией импульсного изменения средней энергии свободных электронов, а предположение о том, что перед резким охлаждением как свободные, так и связанные электроны распределены равновесно с температурой $kT_e \approx \approx 2 \text{ эв}$, не вполне соответствует разумно поставленным экспериментам.

Для проведения такого анализа пригодны практически те же уравнения (2) с небольшими видоизменениями, описывающие широкий круг релаксационных процессов в водородной плазме.

Наличие отлаженной программы для решения на ЭВМ нестационарной задачи позволяет относительно анализировать процессы релаксации в высокоионизованной атомарной плазме, задаваясь различными начальными условиями. Так, в простейшей схеме ионизации вычисляется решение системы уравнений (2) при начальных условиях $N_1(0) \neq 0$, $N_2(0) = N_3(0) = \dots = N_g(0) = 0$. Степень ионизации в начальный момент меньше равновесного значения, соответствующего температуре T_e ; последняя предполагается в процессе ионизации постоянной. Результаты решения системы (2) для такой модели при $N = 1,26 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $kT_e = 5 \text{ эв}$ и $N = 1,26 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $kT_e = 10 \text{ эв}$ приведены на фиг. 3, а, б соответственно; начальная плотность свободных электронов бралась равной $N_e(0) = 9 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Необходимо подчеркнуть, что, подобно рекомбинации, ионизация является сложным многоступенчатым процессом, поэтому характеризовать ее, как это часто делается, сечением ионизации обычно нельзя. В то же время результаты последовательного расчета ионизации представляют несомненный интерес не только при анализе усиливающих свойств высокоионизованной плазмы, но и в широком круге прикладных плазменных задач, в частности в задаче о прохождении плазменной струи через вещество.

Недавно появились первые экспериментальные работы, в которых получена инверсность в атомарном водороде. В заметке [11] была отмечена инверсность заселения 5- и 4-го уровней в режиме расширения струи аргоново-водородной плазмы. Вопреки высказанной авторами [11] точке зрения, объясняющей инверсность столкновениями атомов водорода с возбужденными атомами аргона, представляется более естественным рекомбинационный механизм инверсии. Как показывают оценки, водородная плазма указанных в [11] параметров, рекомбинируя, инверсно заселяется без всякой передачи возбуждения от аргона.

В работе [12] впервые наблюдалась генерация на переходе $4 \rightarrow 3$ атомарного водорода при импульсном разряде в смеси водорода с гелием. Диаметр трубки (7 мм), парциальные давления водорода и гелия (0,03 и 3,5 мм рт. ст. соответственно) находятся в хорошем согласии с приведенными расчетами и оценками. Однако и здесь делать окончательный вывод о рекомбинационной основе работы лазера преждевременно, так как в [12] нет данных о развитии импульса генерации во времени.

Авторы благодарят А. Т. Матачун за помощь в численных расчетах.

Поступила 17.V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гудзенко Л. И., Шелепин Л. А. Отрицательное поглощение в неравновесной водородной плазме. ЖЭТФ, 1963, т. 45, № 5.
2. Гудзенко Л. И., Шелепин Л. А. Об усилении в распадающейся плазме. Магнитная гидродинамика, 1965, т. 1, № 3.

Таблица 2

Времена существования инверсии для различных переходов при различных температурах kT_e 0.05; 0.1; 0.2 (эв) свободных электронов и плотностях N (см^{-3}) рекомбинирующей плазмы

$N=10^{15}$	$N=10^{15}$	$N=10^{14}$	$N=10^{14}$
3=2	4=3	3=2	4=3
10^{-8}	10^{-4}	$9 \cdot 10^{-8}$	10^{-4}
$7 \cdot 10^{-9}$	0	$3 \cdot 10^{-7}$	10^{-4}
$2 \cdot 10^{-8}$	0	$6 \cdot 10^{-5}$	0

3. Bates D. R., Kingston A. E. Properties of a decaying Plasma. Planet. Space Sci., 1963, vol. 11, No. 1.
4. Holstein T. Imprisonment of resonance Radiation in Gases. Phys. Rev., 1947, vol. 72, p. 1212.
5. Гордиец Б. Ф., Гудзенко Л. И., Шелепин Л. А. Релаксация заселенностей уровней водорода. Инверсность в распадающейся высокоионизованной плазме. Препринт ФИАН, 1967, № 29.
6. Соболев И. И. Введение в теорию атомных спектров. М., Физматгиз, 1963.
7. Гудзенко Л. И., Филиппов С. С., Шелепин Л. А. Ускоренно рекомбинирующая плазменная струя. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 4.
8. Гордиец Б. Ф., Гудзенко Л. И., Шелепин Л. А. Об охлаждении свободных электронов плазмы. Ж. техн. физ., т. 36, вып. 9.
9. Гудзенко Л. И., Колесников В. Н., Соболев Н. Н., Шелепин Л. А. Об использовании высокоионизованной плазмы для создания лазера. Магнитная гидродинамика, 1965, т. 1, № 3.
10. Гудзенко Л. И., Финкельберг В. М. Импульсный разряд в химически активной среде как источник оптического излучения, препринт ФИАН, 1967, № 16.
11. Гольдфарб В. М., Ильина Е. В., Костычева И. Е., Лукьянов Г. А., Силантьев В. А. О заселенности уровней водорода в аргоново-водородной плазменной струе. Оптика и спектроскопия, 1966, т. 20, вып. 6.
12. Woska K., Lundholm T., Andrade O. Laser Lines in atomic and molecular Hydrogen. J. Opt. Soc. of America, 1966, vol. 56, No. 9.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ В КАНАЛЕ

Л. А. Вулс, К. Е. Джаугаштин

(Ленинград)

Приводятся результаты расчета на ЭЦВМ уравнений Навье—Стокса для течения вязкой несжимаемой проводящей жидкости, возникающего при втекании плоской ламинарной струи в канал конечной ширины при воздействии магнитного поля (для $R_m \ll 1$).

Задача сводится к следующему. В плоский канал с поперечным размером, равным единице, через щель шириной в одну десятую ширины канала, втекает струя жидкости. Внешнее однородное магнитное поле (случай малых значений магнитного числа Рейнольдса $R_m \ll 1$) ориентировано поперек канала. Индуцированные токи предполагаются короткозамкнутыми через электроды (боковые стенки канала). Начальный профиль скорости принят равномерным (значение скорости на входе равно единице). В расчете варьируется расположение щели на торцевой стенке канала относительно оси его, и значение чисел Рейнольдса R и Гартмана H .

Конкретные расчеты (для $R = 50$) выполнены для различных значений безразмерного расстояния оси щели от оси канала ($\bar{y} = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.45$) и нескольких значений чисел Рейнольдса и Гартмана.

Исходные уравнения для нестационарного течения запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + R \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - H u & \left(H = \frac{\sigma B^2 L^2}{\eta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + R \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

Вводя функцию тока

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = - \partial \psi / \partial x$$

получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + R \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \nabla^2 \psi - H \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 \psi = \Phi_1 \quad (1)$$

Уравнения записаны в безразмерном виде; в качестве масштабов скорости и размеров приняты, соответственно, значения скорости на выходе из щели и ширина рассматриваемой щели.