ПМТФ, № 5, 1961

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И НЕОБРАТИМЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПЛАВЛЕНИИ. НИТЕОБРАЗНЫЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛА

А. М. Косевич, Л. В. Танатаров

(Харьков)

В работе [1] было рассмотрено пластическое деформирование твердого тела, вызванное локальным плавлением под действием мгновенного точечного источника тепла, и было показано, что гистерезисный характер процесса нагрузка-разгрузка в пластической области может привести к образованию каверны (поры) в твердом теле после полного затвердевания шаровой области расплава.

Ниже рассматривается случай, когда тепло мгновенно выделяется вдоль бесконечно длинной прямолинейной нити. Подобный источник тепла является предельным случаем игольчатого источника, который может осуществляться, например, за счет локального выделения тепла при радиационном облучении твердого тела [2].

Основной интерес представляют эффекты, связанные с особенностями сдвигового пластического деформирования. Поэтому для простоты расчета среда предполагается несжимаемой. На примере деформирования твердого тела при локальном плавлении вокруг точечного источника тепла [1] видно, что пренебрежение сжимаемостью материала не может привести к качественному изменению основных результатов и выводов работы.

§ 1. Деформация твердого тела при плавлении (нагрузка). Рассматривается изотропное несжимаемое твердое тело, имеющее форму бесконечно длинного, кругового цилиндра радиуса R, по оси которого мгновенно выделяется некоторое количество тепла, достаточное для плавления небольшой окрестности оси цилиндра. Предельный переход $R \to \infty$ позволит получить результаты для случая локального плавления вдоль нитеобразного источника тепла в неограниченной среде.

В цилиндрической системе координат r, φ, z, полярная ось которой совпадает с осью области расплава, границей твердого тела и жидкости является цилиндрическая поверхность $r = r_0$. Радиус области расплава r_0 вначале возрастает ($\dot{r}_0 > 0$), а затем, после достижения своего максимального значения r_m, убывает ($\dot{r}_0 < 0$), возвращаясь к нулю [1]. В простейшем случае постоянных и одинаковых теплоемкостей и коэффициентов теплопроводности твердого тела и жидкости зависимость $r_0 = r_0(t)$ определяется неявным образом уравнением

$$
\begin{gathered}
2c\chi T_0 = \frac{Q}{2\pi t}\exp\left(-\frac{r_0^2(t)}{4\chi t}\right) - \\
- q\int_0^t \frac{r_0(t')\,\dot{r}_0(t')}{t-t'}\, I_0\left[\frac{r_0(t)\,r_0(t')}{2\chi(t-t')}\right]\exp\left(-\frac{r_0^2(t)+r^2(t')}{4\chi(t-t')}\right)dt'
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь Q — количество выделившегося тепла, q — теплота плавления, c — теплоемкость, χ — температуропроводность среды, а I_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Если удельный объем жидкой фазы материала превышает удельный объем твердой фазы, то, как отмечалось в работе [1], расширение области расплава вызывает нагрузку в окружающем ее твердом теле, а «вымерзание» жидкости — разгрузку. В предположении, что относительное увеличение линейных размеров материала ε_0 превышает деформацию на пределе упругости, деформирование среды происходит упруго-пластическим образом.

В силу симметрии задачи состояние твердого тела описывается тензорами напряжений σ_{ik} и деформаций u_{ik}, у которых отличны от нуля только диагональные элементы σ_r, σ_φ, σ_z и ε_r, ε_φ, ε_z (зависящие лишь от координаты r), а жидкость внутри области расплава находится под однородным давлением.

Задача, аналогичная изложенной, но отличающаяся тем, что в области $0 < r < r_0$ находится изотропное твердое тело, а не жидкость, была рассмотрена в работе [3] при анализе деформации стержня в результате полиморфного превращения. Так как характер деформирования несжимаемого твердого тела в области $r > r_0$ (в частности, зависимость u_{ik} от r) определяется лишь изменением удельного объема при плавлении, то для нахождения ε_r, ε_φ и ε_z можно непосредственно воспользоваться результатом упомянутой работы. В работе [3] показано, что

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2}\varepsilon_z - \frac{3\varepsilon_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad \varepsilon_\varphi = -\frac{1}{3}\varepsilon_z + \frac{3\varepsilon_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$
$$\varepsilon_z = u = \mathrm{const} \tag{1.2}$$

Здесь $3\varepsilon_0$ — изменение удельного объема при плавлении. Для определения деформации твердого тела необходимо найти только одну постоянную u.

Напряженное состояние твердого тела определяется через деформации при помощи уравнений состояния (уравнений связи σ_{ik} и u_{ik}), которые по теории упруго-пластических деформаций [4] можно представить в виде ([3], формула (2.3))

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \Psi(J)(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) \equiv 3\Psi(J)\,\varepsilon_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{1.3}$$

$$\sigma_z - \sigma_r = \Psi(J)(\varepsilon_z - \varepsilon_r) \equiv \frac{3}{2}\Psi(J)\left[u + \varepsilon_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] \tag{1.4}$$

где $\Psi(J)$ — некоторая функция интенсивности деформаций сдвига, не зависящая от вида нагрузки [1]. В упругом случае $\Psi(J) \equiv \alpha = \mathrm{const}$ (α — удвоенный модуль сдвига). Интенсивность деформаций сдвига J для упрощения дальнейших записей удобно определить по формуле

$$J = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}u^2 + \varepsilon_0^2 (r_0/r)^4} \tag{1.5}$$

Состояние жидкости характеризуется постоянным давлением p. Для нахождения давления в жидкости p и неизвестной постоянной u следует воспользоваться уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{1.6}$$

и очевидными граничными условиями, вытекающими из отсутствия внешних сил и непрерывности нормальных напряжений на границе раздела ([3], формулы (2.2), в которых нужно лишь учесть, что при $0 < r < r_0$ $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = -p$). Наиболее существенное для расчета граничное условие, связанное с предположением, что на концах области расплава ($z = \pm\infty$) абсолютно жесткие «донышки» сдерживают жидкость, имеет вид

$$p\pi r_0^2 = 2\pi\int_{r_0}^{R} \sigma_z r\,dr \tag{1.7}$$

[1] Строго говоря, $\Psi(J)$ не зависит от вида нагрузки только при простом нагружении [4]. Однако ниже будет показано, что $u \equiv 0$, так что в данном случае, как следует, например, из работы [4], нагружение простое.

Уравнение (1.6) при помощи соотношения (1.3) сводится к квадратуре

$$\sigma_r = -3\varepsilon_0 r_0^2 \int_r^R \Psi(J)\frac{dr}{r^3} \qquad (1.8)$$

Из (1.8) с учетом непрерывности σ_r при $r = r_0$ и конкретного вида J находится p

$$p = \frac{3}{2}\int_{x\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \Psi\left(\sqrt{\frac{1}{3}u^2 + \xi^2}\right) d\xi, \qquad x = (r_0 / R)^2 < 1 \qquad (1.9)$$

При известной постоянной u формулой (1.9) можно пользоваться для определения давления в жидкости.

Так как из (1.8) вытекает

$$\int_{r_0}^R \sigma_r r dr = \frac{1}{2} p r_0^2 - \frac{3}{2}\varepsilon_0 r_0^2 \int_{r_0}^R \Psi(J)\frac{dr}{r}$$

то при помощи (1.4) условие (1.7) может быть сведено к

$$u\int_{r_0}^R \Psi(J)\frac{dr}{r} = 0$$

Таким образом, искомая постоянная $u = 0$ (что будет следствием несжимаемости материала) и давление в жидкости

$$p = \frac{3}{2}\int_{x\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \Psi(\xi)\, d\xi \qquad (1.10)$$

Для неограниченной среды $x = 0$ и формула (1.10) для p приобретает вид

$$p = \frac{3}{2}\int_{0}^{\varepsilon_0} \Psi(\xi)\, d\xi \qquad (1.11)$$

Выражение (1.11) аналогично формуле (1.12) работы [1], так как для несжимаемого материала функция $\xi = G(\sigma)$ будет обратной по отношению к функции $\sigma = \Psi(\xi)\,\xi$.

Характерно, что как и в случае точечного источника тепла [1], давление в жидкости, окруженной неограниченной твердой средой, при плавлении не зависит от r_0.

В случае схемы Прандтля, когда

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} \alpha, & \xi < e_s \\ \dfrac{\sigma_s}{\xi}, & \xi > e_s, \qquad \sigma_s = \alpha e_s \end{cases}$$

давление в жидкости определяется выражением

$$p = \frac{3}{2}\sigma_s\left\{1 + \ln\left(\frac{\varepsilon_0}{e_s}\right)\right\} \qquad (1.12)$$

которое аналогично формуле (1.14) работы [1].

§ 2. Деформация твердого тела при затвердевании (разгрузка). При затвердевании поверхностных слоев жидкости r_0 уменьшается и в твердом теле происходит разгрузка [1]. В области $r_m < r < R$ началу разгрузки соответствует исследованное в § 1 состояние нагруженного тела при $r_0 = r_m$. В области $(r_0 < r < r_m)$ разгрузке твердого тела предшествует мгновенная нагрузка в момент затвердевания (как и в [3] при полиморфном превращении), которая создает начальное для разгрузки состояние.

Тензор деформаций по-прежнему определяется формулами (1.2), в которых явным образом следует учесть, что постоянная u зависит, как от параметра, от r_0. Другими словами, в (1.2) $u = u(r_0)$, причем $u(r_m) = 0$.

Сдвиговые деформации, соответствующие началу разгрузки в любой точке r определяются очевидным образом

$$\varepsilon_\varphi^\circ - \varepsilon_r^\circ = 3\varepsilon_0, \qquad \varepsilon_z^\circ - \varepsilon_r^\circ = \frac{3}{2}[u(r) + \varepsilon_0] \quad (r_0 < r < r_m) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_\varphi^\circ - \varepsilon_r^\circ = 3\varepsilon_0\left(\frac{r_m}{r}\right)^2, \quad \varepsilon_z^\circ - \varepsilon_r^\circ = \frac{3}{2}\varepsilon_0\left(\frac{r_m}{r}\right)^2 \quad (r_m < r < R) \tag{2.2}$$

В (2.1) учтено, что разгрузка в точке r начинается при прохождении через эту точку границы раздела $r = r_0$.

Касательные напряжения, отвечающие начальным деформациям (2.1) и (2.2), в области $(r_m < r < R)$ следуют из (1.3) и (1.4) при $r_0 = r_m$, а в области $(r_m < r < R)$ предполагаются связанными с деформациями (2.1) соотношениями (1.3) и (1.4), аналогичными (1.4) работы [1,3]

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ &= \Phi(J_0)(\varepsilon_\varphi^\circ - \varepsilon_r^\circ) \equiv \Phi(J_0)\,3\varepsilon_0 \\ \sigma_z^\circ - \sigma_r^\circ &= \Phi(J_0)(\varepsilon_z^\circ - \varepsilon_r^\circ) \equiv \Phi(J_0)\frac{3}{2}[u(r) + \varepsilon_0] \end{aligned} \tag{2.3}$$

О функции $\Phi(J_0)$, зависящей от интенсивности деформации сдвига J (инварианта (1.5), построенного по (2.1) и равного $J_0 = \sqrt{{}^1/_3 u^2 + \varepsilon_0}$), предполагается, что она четна по своему аргументу и имеет начальный горизонтальный участок, причем $\Phi(0) = \alpha$. В случае упругого деформирования в момент затвердевания $\Phi \equiv \alpha$, а в случае полного «проскальзывания» [1] нарождающегося слоя твердой фазы $\Phi \equiv 0$. В общем случае $0 \leqslant \Phi \leqslant \alpha$.

Зная состояние тела в начале разгрузки, легко записать уравнения состояния твердого тела в течение всего процесса разгрузки

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi - \sigma_r &= \sigma_\varphi^\circ - \sigma_r^\circ + \alpha(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi^\circ + \varepsilon_r^\circ) \\ \sigma_z - \sigma_r &= \sigma_z^\circ - \sigma_r^\circ + \alpha(\varepsilon_z - \varepsilon_r - \varepsilon_z^\circ + \varepsilon_r^\circ) \end{aligned} \tag{2.4}$$

которые имеют несколько различный вид в областях $(r_0 < r < r_m)$ и $(r_m < r < R)$.

Давление в жидкости при помощи (1.6) может быть представлено в следующей форме:

$$p = -\sigma_r\Big|_{r=r_0} = \int_{r_0}^{r_m} (\sigma_\varphi - \sigma_r)\frac{dr}{r} + \int_{r_m}^{R} (\sigma_\varphi - \sigma_r)\frac{dr}{r} \tag{2.5}$$

где интервал интегрирования в правой части умышленно разбит на две указанные выше области.

Чтобы по формуле (2.5) можно было конкретно вычислить давление, необходимо определить постоянную $u(r_0)$. Эта постоянная, как и в § 1, находится при помощи граничного условия (1.7), которое путем тождественных преобразований можно привести к виду

$$\int_{r_0}^{r_m} [(\sigma_r - \sigma_\varphi) - 2(\sigma_r - \sigma_z)]\,r\,dr + \int_{r_m}^{R} [(\sigma_r - \sigma_\varphi) - 2(\sigma_r - \sigma_z)]\,r\,dr = 0 \tag{2.6}$$

При подстановке уравнений связи (2.3) и (2.4) в условие (2.6) последнее сводится к интегральному соотношению для $u(r_0)$. Если учесть, что жидкость может рассматриваться как твердое тело, у которого отсутствуют сдвиговые деформации и напряжения, то искомое интегральное соотношение сразу же получается из уравнения (2.11) работы [3], в котором следует положить $\Psi_1 \equiv 0$ и

$$v(r) = \begin{cases} u(r) & (r_0 < r < r_m) \\ 0 & (r_m < r < R) \end{cases}$$

В результате $u(r_0)$ находится из следующего соотношения:

$$\alpha u(r_0)(R^2 - r_0^2) + 2\int_{r_0}^{r_m} u(r)[\Phi(J_0) - \alpha]\, r dr \qquad (2.7)$$

Так как $u(r_m) = 0$, то из (2.7) следует, что $u(r_0) \equiv 0$. Действительно, дифференцируя (2.7) по r_0, его можно свести к однородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dw}{dx} = \frac{w\Phi(J_0)}{\alpha(1-x)} \qquad \left(0 < x < \left(\frac{r_m}{R}\right)^2 < 1\right) \qquad (2.8)$$

с граничным условием

$$w = 0, \quad \text{при } x = \left(\frac{r_m}{R}\right)^2 \qquad \left(x = \left(\frac{r_0}{R}\right)^2, \; w(x) = u(r_0)\right) \qquad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) с неизбежностью вытекает, что $u = w \equiv 0$.

При $u \equiv 0$ формула для давления в жидкости (2.5) приобретает вид

$$p = 3\varepsilon_0[\Phi(\varepsilon_0) - \alpha]\ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right) + 3\varepsilon_0 r_m^2 \int_{r_m}^{R} \Psi(J_m)\frac{dr}{r^3} + \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{r_m^2 - r_0^2}{R^2}$$

$$J_m = \varepsilon_0\left(\frac{r_m}{r}\right)^2 \qquad (2.10)$$

Если обозначить через p_m давление, возникшее в жидкости в конце плавления, и учесть формулу (1.10), то (2.10) можно записать в виде

$$p = p_m - 3\varepsilon_0[\alpha - \Phi(\varepsilon_0)]\ln\frac{r_m}{r_0} + \frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{r_m^2 - r_0^2}{R^2} \qquad (2.11)$$

В предельном случае неограниченной среды ($R \to \infty$) формула (2.11) упрощается

$$p = p_m - 3\varepsilon_0[\alpha - \Phi(\varepsilon_0)]\ln\left(\frac{r_m}{r_0}\right) \qquad (2.12)$$

Выражение (2.12) аналогично (2.13) работы [1] (случай $k = k_1$ эквивалентен предположению несжимаемости).

За исключением случая упругого деформирования ($\Phi(\varepsilon_0) = \alpha$), когда $p = p_m = \text{const}$, давление в жидкости убывает по мере уменьшения радиуса расплава: $\partial p / \partial r_0 > 0$, так как $\Phi(\varepsilon_0) < \alpha$. При некотором $r_0 = \rho_0$ давление в жидкости обращается в нуль и при $r_0 < \rho_0$ становится отрицательным. Значение радиуса ρ_0, при котором $p = 0$, следует непосредственно из (2.12)

$$\ln\frac{r_m}{\rho_0} = \frac{p_m}{3\varepsilon_0(\alpha - \Phi(\varepsilon_0))} \qquad (2.13)$$

В случае $\varepsilon_0 \gg e_s$ можно считать $\Phi(\varepsilon_0) \ll \alpha$ и ρ_0 определить условием

$$\ln\left(\frac{r_m}{\rho_0}\right) = \frac{p_m}{3\alpha\varepsilon_0} \sim \frac{e_s}{\varepsilon_0} \ll 1 \qquad (2.14)$$

из которого видно, что ρ_0 мало отличается от r_m. Обозначая $r_m - \rho_0 = \eta r_m$, из (2.14) легко получить

$$\eta = \frac{p_m}{3\alpha\varepsilon_0} \ll 1 \qquad (2.15)$$