

## К ОБОСНОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

УДК 66.067.5

Е. В. Семенов

Московская государственная академия пищевых производств, 125080 Москва

В данной работе для расходящегося потока вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемого линейным источником, расположенным на оси вращения двух соосных дисков, предлагается асимптотическое решение в виде ряда по степеням безразмерной радиальной координаты и проводится оценка сходимости полученного решения.

Особенности режимов течения капельной жидкости в полостях между двумя вращающимися дисками или конусами имеют большое значение в прикладной механике в связи с проблемами анализа кинетики этих потоков в различных центробежных напорных устройствах, сепараторах, центрифугах и т. д.

Исследованию развития течения жидкости в зазоре между двумя вращающимися эквидистантными дисками или конусами посвящены работы [1–6]. Причем, как часто делают для расходящихся режимов, при анализе течения от точечного или осевого источника в качестве эффективного количественного метода исследования развитого потока применяют способ разложения искомого решения в виде ряда по обратным степеням безразмерной радиальной координаты. Для осесимметричного режима течения данный способ дает возможность практически свести геометрическую размерность задачи до одномерной по поперечной координате при параметрическом характере зависимости решения от радиальной координаты. В результате этого удается свести проблему анализа краевой задачи, например, в безграничной области для уравнений Навье — Стокса к решению редуцированной бесконечной системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачу о течении жидкости между двумя безграничными дисками (плоскостями), вращающимися с одинаковыми или различными угловыми скоростями, удобно отнести к цилиндрической системе координат  $r\vartheta z$ , жестко связанной с одним из дисков. В дальнейшем, не нарушая общности задачи, будем считать, что диски вместе с жидкостью внезапно приведены во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1).

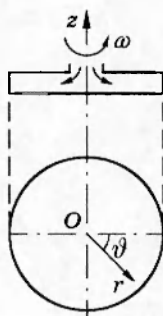


Рис. 1

Пусть  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — радиальная, относительная окружная и поперечная составляющие скорости жидкости  $V$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — коэффициент кинематической

вязкости. Если поместить начало координат на оси вращения посередине между дисками, то в качестве граничных принимаем условия прилипания жидкости к стенкам дисков:

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h/2 \quad (1)$$

( $h$  — расстояние между дисками). Кроме того, должно быть выполнено условие

$$V = 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным величинам, выбирая в качестве характерных длины и скорости [5]  $l = \sqrt{\nu/\omega}$ ,  $U = \sqrt{\nu\omega}$ ; в таком случае  $r = l\bar{r}$ ,  $z = lx$ ,  $u = U\bar{u}$ ,  $v = U\bar{v}$ ,  $w = U\bar{w}$ ,  $\Phi = U^2\bar{\Phi}$ ,  $\Phi = p/\rho - \omega^2 r^2/2$ .

Тогда, если опустить черточки, уравнения движения и неразрывности [7] для установившегося осесимметричного режима течения вязкой несжимаемой жидкости в безразмерной форме записываются в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right], \\ \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + w \frac{\partial v}{\partial x} = -2u + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right], \\ u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial (rw)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание симметрию поля скоростей потока относительно плоскости  $x = 0$ , вместо граничных условий (1) выбираем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (4)$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad x = \mu, \quad \mu = \lambda/2, \quad \lambda = h\sqrt{\omega/\nu}. \quad (5)$$

С учетом (2) функции  $u$ ,  $v$  будем искать в виде рядов

$$u(r, x) = u_1(x)/r + u_2(x)/r^2 + \dots, \quad v(r, x) = v_1(x)/r + v_2(x)/r^2 + \dots \quad (6)$$

В свою очередь,

$$\Phi(r, x) = \Phi_1(x) \ln r + \Phi_2(x)/r + \dots \quad (7)$$

Согласно (4)–(6), для  $u_n$ ,  $v_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеем следующие граничные условия:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (8)$$

$$u_n = v_n = 0 \quad \text{при} \quad x = \mu. \quad (9)$$

Запишем условие расхода жидкости  $Q$  в безразмерном виде:

$$q = 2\pi \int_0^\mu ur dx, \quad q = 0,5QU^{-1}l^{-2}. \quad (10)$$

Принимая во внимание (6), в силу (10) для  $u_n$  находим

$$\int_0^\mu u_1(x) dx = q/(2\pi); \quad (11)$$

$$\int_0^{\mu} u_n(x) dx = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (12)$$

Интегрируя последнее уравнение системы (3) по  $x$ , получим

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^x ur dx,$$

и, согласно (10), граничные условия (4), (5) для  $w$  выполняются. В таком случае, принимая во внимание (6), имеем

$$w(r, x) = \frac{1}{r^3} \int_0^x u_2(x) dx + \frac{2}{r^4} \int_0^x u_3(x) dx + \dots \quad (13)$$

Тогда, подставляя разложения (6), (7), (13) в первые три уравнения системы (3), запишем

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r^2} + \dots\right) \left(\frac{u_1}{r^2} + \frac{2u_2}{r^3} + \dots\right) + \int_0^x \left(\frac{u_2}{r^3} + \frac{2u_3}{r^4} + \dots\right) dx \times \\ & \quad \times \left(\frac{u'_1}{r} + \frac{u'_2}{r^2} + \dots\right) - \frac{1}{r} \left(\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{r^2} + \dots\right) = \\ & = -\frac{\Phi_1}{r} + \frac{\Phi_2}{r^2} + \dots + 2\left(\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{r^2} + \dots\right) + \frac{u''_1}{r} + \dots + \frac{1 \cdot 3}{r^4} u_2 + \frac{2 \cdot 4}{r^5} u_3 + \dots; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r^2} + \dots\right) \left(\frac{v_2}{r^2} + \frac{2v_3}{r^3} + \dots\right) + \int_0^x \left(\frac{u_2}{r^3} + \frac{2u_3}{r^4} + \dots\right) dx \left(\frac{v'_1}{r} + \dots\right) = \\ & = -2\left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r^2} + \dots\right) + \frac{v''_1}{r} + \frac{v'_2}{r^2} + \dots + \frac{1 \cdot 3}{r^4} v_2 + \frac{2 \cdot 4}{r^5} v_3 + \dots; \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r^2} + \dots\right) \int_0^x \left(\frac{1 \cdot 3}{r^4} u_2 + \frac{2 \cdot 4}{r^5} u_3 + \dots\right) dx + \int_0^x \left(\frac{u_2}{r^3} + \frac{2u_3}{r^4} + \dots\right) dx \left(\frac{u_2}{r^3} + \frac{2u_3}{r^4} + \dots\right) = \\ & = -\Phi'_1 \ln r - \Phi'_2/r - \dots + \frac{u'_2}{r^3} + \frac{2u'_3}{r^4} + \dots + \int_0^x \left(\frac{1 \cdot 3^2}{r^5} u_2 + \frac{2 \cdot 4^2}{r^6} u_3 + \dots\right) dx. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь штрихами обозначены производные по  $x$ . Собирая члены, содержащие одинаковые, зависящие от  $r$  множители, исходя из (14)–(16), имеем систему уравнений:

$$\Phi_1 = C_1/2 = \text{const}; \quad (17)$$

$$u''_1 + 2v_1 = \Phi_1, \quad v''_1 - 2u_1 = 0, \quad \Phi'_2 = 0, \quad \Phi_2 = -C_2/2; \quad (18)$$

$$u''_2 + 2v_2 = -\Phi_2, \quad v''_2 - 2u_2 = 0, \quad \Phi_3 = -C_3/4; \quad (19)$$

$$u'_3 + 2v_3 = -2\Phi_3 - u_1^2 - v_1^2, \quad v''_3 - 2u_3 = 0, \quad -\Phi'_4 + u'_2 = 0, \quad \Phi_4 = u_2 - C_4/6; \quad (20)$$

$$u'_4 + 2v_4 = -3\Phi_4 - u_1 u_2 - 2u_1 v_2 - 2v_1 v_2 + 1 \cdot 3 u_2, \quad (21)$$

$$v''_4 - 2u_4 = -u_1 v_2 - v'_1 \int_0^x u_2 dx - 3v_2, \quad -\Phi'_5 + 2u'_3 = 0;$$

$$u_5'' + 2v_5 = -4\Phi_5 - 3u_1u_3 - 2u_2^2 - u_3u_1 + u_2' \int_0^x u_2 dx + 2u_1' \int_0^x u_3 dx - 2v_1v_3 - v_2^2 + 2 \cdot 4u_3, \quad (22)$$

$$v_5'' - 2u_5 = -2u_1v_3 - u_2v_2 + v_2' \int_0^x u_2 dx + 2v_1' \int_0^x u_3 dx - 2 \cdot 4v_3, \quad -\Phi_6' + 3u_4 + 1 \cdot 3^2 \int_0^x u_2 dx = 0;$$

$$u_6' + 2v_6 = -5\Phi_6 - 4u_1u_4 - 3u_2u_3 - 2u_3u_2 - u_4u_1 + \\ + 3u_1' \int_{\mu}^x u_4 dx + 2u_2' \int_{\mu}^x u_3 dx + u_3' \int_{\mu}^x u_2 dx - 2v_1v_4 - 2v_2v_3 + 3 \cdot 5u_4, \quad (23)$$

$$v_6'' - 2u_6 = -3u_1v_4 - 2u_2v_3 - u_3v_2 + v_3' \int_{\mu}^x u_2 dx + 2v_2' \int_{\mu}^x u_3 dx + 3v_1' \int_{\mu}^x u_4 dx - 3 \cdot 5v_3, \\ -2 \cdot 4u_1 \int_0^x u_3 dx - 1 \cdot 3u_2 \int_0^x u_2 dx + u_2 \int_0^x u_2 dx = -\Phi_7' + 4u_5' + 2 \cdot 4^2 \int_0^x u_3 dx;$$

Так как из анализа системы (17)–(23) и граничных условий (3), (9) следует, что четные приближения по скоростям  $u_{2m}$ ,  $v_{2m}$  тождественно равны нулю, то система уравнений по нечетным приближениям принимает вид

$$u_n'' + 2v_n = -(n-1)\Phi_n - \sum_i^{n-2} iu_i u_{n-1-i} + \\ + \sum_i^{n-3} iu_{n-2-i}' \int_{\mu}^x u_{i+1} dx - \sum_i^{n-1} v_i v_{n-1-i} + (n-3)(n-1)u_{n-2}; \quad (24)$$

$$v_n'' - 2u_n = -\sum_i^{n-3} iu_{n-2-i}v_{i+1} + \sum_i^{n-3} iv_{n-2-i}' \int_{\mu}^x u_{i+1} dx - (n-3)(n-1)v_{n-2}; \quad (25)$$

$$\sum_i^{n-4} i(i+2)u_{n-3-i} \int_{\mu}^x u_{i+1} dx + \sum_i^{n-5} (n-4-i)u_{n-3-i} \int_{\mu}^x iu_{i+1} dx = \\ = -\Phi_{n+1}' + (n-2)u_{n-1}' + (n-4)(n-2)^2 \int_{\mu}^x u_{n-3} dx. \quad (26)$$

Здесь  $n = 2m + 1$ ;  $i = 2k + 1$ ;  $k, m = 0, 1, 2, \dots$ ; суммирование ведется по положительным индексам. При этом, исходя из (25), (26), запишем

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ v_n'' + \sum_{i=1}^{n-3} i \left( u_{n-2-i}v_{i+1} - v_{n-2-i}' \int_{\mu}^x u_{i+1} dx \right) + (n-3)(n-1)v_{n-2} \right]; \quad (27)$$

$$\Phi_n = -\frac{C_n}{2(n-1)} + (n-3)u_{n-2} + (n-5)(n-3)^2 \int_0^x \int_{\mu}^x u_{n-4} d\xi dx -$$

$$- \sum_i^{n-5} i(i+2) \int_0^x u_{n-4-i} \int_\mu^x u_{i+1} d\xi dx - \sum_i^{n-6} (n-5-i) \int_0^x u_{n-4-i} \int_\mu^x i u_{i+1} d\xi dx. \quad (28)$$

Таким образом, в силу (27), (28) вместо (24) имеем

$$v_n^{IV} + 4v_n = C_n + f_n(x), \quad (29)$$

где  $C_n$  — постоянная величина;  $f_1 = 0$ ;

$$\begin{aligned} f_n(x) = & -2 \sum_i^{n-2} (v_i v_{n-1-i} + i u_i u_{n-1-i}) + \sum_i^{n-3} i \left[ - (u_{n-2-i} v_{i+1})'' + \left( v'_{n-2-i} \int_\mu^x u_{i+1} dx \right)'' + \right. \\ & \left. + 2u'_{n-2-i} \int_\mu^x u_{i+1} dx \right] + 2(n-1) \sum_i^{n-6} (n-5-i) \int_0^x u_{n-4-i} \int_\mu^x i u_{i+1} d\xi dx - \\ & - 2(n-1) \sum_i^{n-5} i(i+2) \int_0^x u_{n-4-i} \int_\mu^x u_{i+1} d\xi dx - (n-1)(n-3)v''_{n-2} - \\ & - 2(n-1)(n-3)(n-5) \int_0^x \int_\mu^x u_{n-4} d\xi dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Причем на основе (8), (9), (27) по граничным условиям для  $v_n$  дополнительно получим

$$v_n'''(0) = 0, \quad v_n''(\mu) = 0, \quad (31)$$

кроме того, в силу (12), (27)

$$v_n'(\mu) = v_{n**}'. \quad (32)$$

Здесь

$$v_{n**}'(\mu) = \sum_i^{n-3} i \left( - \int_0^\mu u_{n-2-i} v_{i+1} dx + \int_0^\mu v'_{n-2-i} \int_\mu^x u_{i+1} d\xi dx \right) - (n-3)(n-1) \int_0^\mu v_{n-2} dx. \quad (33)$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее граничным условиям (8), (9), (31), (32), запишем в виде [8]

$$v_n(x) = C_{n1}y_1(x) + \dots + C_{n4}y_4(x) + \int_0^x y_4(x-\xi)[C_n + f_n(\xi)] d\xi, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{ch} x \cos x, & y_2 &= (\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x)/2, \\ y_3 &= \operatorname{sh} x \sin x/2, & y_4 &= (\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x)/4. \end{aligned} \quad (35)$$

При этом в силу (8), (31)  $C_{n2} = C_{n4} = 0$ , и тогда вместо (34) имеем

$$v_n = \bar{v}_n + v_{n*}. \quad (36)$$

Здесь

$$\bar{v}_n = C_{n1}y_1(x) + C_{n3}y_3(x) + C_n[1 - y_1(x)]/4, \quad v_{n*} = \int_0^x y_4(x-\xi)f_n(\xi) d\xi. \quad (37)$$

Причем, согласно (9), (31), (32), для определения коэффициентов  $C_{n1}$ ,  $C_{n3}$ ,  $C_n$  получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_{n1}y_1 + C_{n3}y_3 + C_n(1 - y_1)/4 = J_4, \quad -4C_{n1}y_3 + C_{n3}y_1 + C_ny_3 = J_2, \\ -4C_{n1}y_4 + C_{n3}y_2 + C_ny_4 = J_3, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$J_4 = -v_{n*}, \quad J_2 = -v''_{n*}, \quad J_3 = -v'_{n*} + v'_{n**}; \quad (39)$$

$$v_{n*}^{(k)} = \int_0^\mu y_k(x - \xi) f_n(\xi) d\xi, \quad y_k = y_k(\mu), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (40)$$

Решение системы (38) следующее:

$$C_{n1} = \Delta_{n1}/\Delta, \quad C_{n3} = \Delta_{n3}/\Delta, \quad C_n = \Delta_n/\Delta. \quad (41)$$

Здесь

$$\Delta = y_1y_4 - y_2y_3 = (\sin 2\mu - \operatorname{sh} 2\mu)/8; \quad (42)$$

$$\Delta_{n1} = (y_1y_4 - y_2y_3)J_4 + [y_2(1 - y_1)/4 - y_3y_4]J_2 + [y_3^2 - y_1(1 - y_1)/4]J_3, \quad (43)$$

$$\Delta_{n3} = y_4J_2 - y_3J_3, \quad \Delta_n = 4(y_1y_4 - y_2y_3)J_4 - (y_1y_2 + 4y_3y_4)J_2 + (y_1^2 + 4y_3^2)J_3.$$

Согласно (11), (37), (40), (41), по первому приближению имеем

$$v_1(x) = A_1y_1(x) + B_1y_3(x) + C_1/4; \quad (44)$$

$$u_1(x) = v_1''(x)/2 = -4A_1y_3(x) + B_1y_1(x), \quad \Phi_1 = C_1/2, \quad (45)$$

где

$$A_1 = C_{11} - C_1/4, \quad B_1 = C_{13}, \quad C_{11} = q(\operatorname{sh}^2\mu + \cos^2\mu - \operatorname{ch}\mu \cos\mu)/(8\pi\Delta), \quad (46)$$

$$C_{13} = -q\operatorname{sh}\mu \sin\mu/(4\pi\Delta), \quad C_1 = q(\cos^2\mu + \operatorname{sh}^2\mu)/(2\pi\Delta).$$

При этом в силу (33)  $v'_{3**} = 0$ , а в силу (40)

$$v_{3*} = -\frac{D_3}{20}(\operatorname{ch} 2x + \cos 2x - 2y_1) - \frac{C_1}{16}[4A_1xy_4 + B_1(2y_3 - xy_2)] + \frac{C_1^2}{32}(y_1 - 1),$$

$$v'_{3*} = -\frac{D_3}{10}(\operatorname{sh} 2x - \sin 2x + 4y_4) - \frac{C_1}{16}[4A_1(y_4 + xy_3) + B_1(y_2 - xy_1)] - \frac{C_1^2}{8}y_4,$$

$$v''_{3*} = -\frac{D_3}{5}(\operatorname{ch} 2x - \cos 2x + 4y_3) - \frac{C_1}{16}[4A_1(2y_3 + xy_2) + 4B_1xy_4] - \frac{C_1^2}{8}y_3.$$

Здесь  $y_k = y_k(x)$ . Поэтому, согласно (27), (36),

$$v_3 = \bar{v}_3 + v_{3*}, \quad u_3 = (v'_3 + v''_{3*})/2, \quad \Phi_3 = -C_3/4, \quad (47)$$

где  $\bar{v}_3 = C_{31}y_1 + C_{33}y_3 + C_3(1 - y_1)/4$ ;  $C_{31} = \Delta_{31}/\Delta$ ;  $C_{33} = \Delta_{33}/\Delta$ ;  $C_3 = \Delta_3/\Delta$ ;  $\Delta_{31}$ ,  $\Delta_{33}$ ,  $\Delta_3$  рассчитываются по (43). В силу (39)  $J_4 = -v_{3*}(\mu)$ ,  $J_2 = -v''_{3*}(\mu)$ ,  $J_3 = -v'_{3*}(\mu)$ . Причем в соответствии с (13), (27) для поперечной составляющей скорости получим

$$w \approx \frac{2}{r^4} \int_0^x u_3(\xi) d\xi = \frac{v'_3(x)}{r^4}. \quad (48)$$

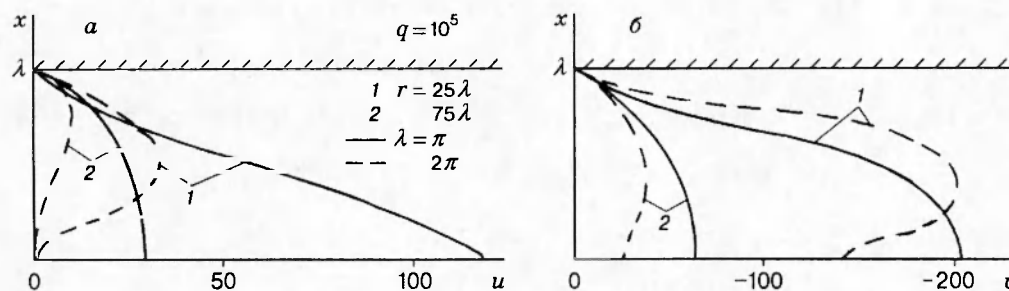


Рис. 2

Таким образом, в качестве расчетных по трем приближениям в силу (6), (7) могут быть приняты формулы

$$u \approx u_1(x)/r + u_3(x)/r^3, \quad v \approx v_1(x)/r + v_3(x)/r^3, \quad \Phi \approx \Phi_1 \ln r + \Phi_3/r^2. \quad (49)$$

Здесь  $u_1, u_3, v_1, v_3, \Phi_1, \Phi_3$  находятся по формулам (44), (45), (47).

Определение в явной форме приближений пятого, седьмого и более высокого порядков представляет собой довольно трудную задачу и поэтому не проводится. Вместе с тем в принципе с помощью современных ЭВМ и алгоязыков символьного программирования могут быть найдены в явном виде согласно рассмотренной итеративной схеме приближения весьма высокого порядка, что на основе численного моделирования дает возможность получить представление о сходимости найденного решения по последовательным приближениям. Результаты расчетов на основе формул (43), (49) для значений параметров  $\lambda$  и  $q$  (число Экмана и Россби соответственно), близких к имеющим место в напорных дисковых устройствах или в рабочих полостях тарельчатых сепараторов, приведены на рис. 2.

Проведенные численные расчеты выявляют при  $\lambda > \pi$  наличие перегибов в профилях окружной и продольной составляющих скорости потока, появление при  $\lambda > 2\pi$  возвратных режимов течений и т. д. [5]. Как показывает сравнительный количественный анализ, полученные данные по максимальной разности отклонений между первыми и третьим приближениями для профилей окружной скорости  $v$  на удалении от оси вращения дисков, равном 50 зазорам, составляет примерно 5%, для продольной скорости  $u$  — 30%.

Очевидно, вопрос о сходимости разложений (6), (7) представляет собой как практический, так и теоретический интерес. Это обусловлено тем, что, согласно предложенной расчетной схеме, реализуется решение полной краевой задачи (1)–(3). С целью оценки сходимости, например, параметрического по  $r$  функционального ряда для окружной составляющей скорости (6) примем во внимание, что наибольшее по модулю значение этой составляющей достигается в середине зазора между дисками. Тогда в качестве мажоранты ряда полагаем

$$v(0) = \sum_i^{\infty} |v_{2i-1}(0)| r^{1-2i} = \sum_i^{\infty} |C_{2i-1}| r^{1-2i}. \quad (50)$$

При этом очевидно, что если обоснована сходимость разложения (50), то тем самым будет доказана и сходимость ряда (6).

В дальнейшем в целях упрощения задачи, ограничиваясь областью небольших значений  $\lambda$ , с точностью до малых, различающихся на три порядка, по функциям А. Н. Крылова (35) приближенно имеем

$$y_1 = 1 - \frac{x^4}{6}, \quad y_2 = x - \frac{x^5}{30}, \quad y_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{180}, \quad y_4 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^7}{1260}. \quad (51)$$

Поэтому, исходя из (44)–(46), по первому приближению получим

$$v_1 = \varepsilon(x^2 - \mu^2)(x^5 - 5\mu^2)/\Delta, \quad u_1 = 6\varepsilon(x^2 - \mu^2)/\Delta, \quad (52)$$

где  $\varepsilon = q/(48\pi)$ ;  $\Delta = -\mu^3/3$ . Кроме того, вместо формул (43) приближенно запишем

$$\begin{aligned} \Delta_{n1} &= \mu^3(8v_{n*} + \mu^2 v_{n*}'' - 5\mu v_{n*}')/24 + 5\mu^4 v_{n**}/24, \\ \Delta_{n3} &= \mu^3(3v_{n*}' - \mu v_{n*}'')/\varepsilon - \mu^2 v_{n**}/2, \quad \Delta_n = (4\mu^3 v_{n*} + 3\mu v_{n*}'' - 3v_{n*}')/3 + v_{n**}. \end{aligned} \quad (53)$$

Причем в силу (41), (51), (53) имеем

$$C_{n1} = -\frac{\mu^3}{144\Delta} \int_0^\mu (\mu^2 + 2\mu\xi - 3\xi^2)(\mu - \xi) f_n(\xi) d\xi + \frac{5\mu^4}{24} v_{n**}, \quad (54)$$

$$C_{n3} = -\frac{\mu^2}{12\Delta} \int_0^\mu (-\mu + 3\xi)(\mu - \xi) f_n(\xi) d\xi - \frac{\mu^2}{2} v_{n**}, \quad C_n = \frac{1}{2\Delta} \int_0^\mu (\mu + \xi)(\mu - \xi) f_n(\xi) d\xi + v_{n**}.$$

Поскольку, как следует из формулы (30), основной вклад по числу членов в значение функции  $f_n(x)$  дает слагаемое  $-2 \sum_i^{n-2} (v_i v_{n-1-i} + i u_i u_{n-1-i})$ , то в целях упрощения анализа проблемы сходимости в дальнейшем полагаем

$$f_n \approx -2 \sum_i^{n-2} (v_i v_{n-1-i} + i u_i u_{n-1-i}). \quad (55)$$

Кроме того, принимая во внимание допущение о значении безразмерного зазора  $\lambda$ , формулу (55) можно заменить приближенной

$$f_n = -2(n-2) \sum_i^{(n-3)/2} u_i u_{n-1-i}.$$

В таком случае в силу (52) с точностью до малых четвертого порядка находим  $f_3 = -2u_1^2 = -72\varepsilon^2(\mu^2 - x^2)^2/\Delta^2$ . Тогда, пользуясь формулой

$$\int_0^\mu x^k (\mu - x)^n dx = \frac{k!m!}{(k+m+1)!} \mu^{k+m+1},$$

в соответствии с (54) имеем

$$\begin{aligned} C_{31} &= \frac{3!\varepsilon^2\mu^{11}}{2\Delta^3} \left( \frac{1!}{4!} + 3 \frac{1!1!}{5!} - 5 \frac{2!}{6!} - 15 \frac{3!}{7!} - 8 \frac{4!}{8!} \right), \\ C_{33} &= \frac{6 \cdot 3!\varepsilon^3\mu^9}{\Delta^3} \left( -\frac{1!}{4!} + \frac{1!1!}{5!} + 5 \frac{2!}{6!} + 5 \frac{3!}{7!} \right), \quad C_3 = -\frac{36 \cdot 3!\varepsilon^2\mu^7}{\Delta^3} \left( 3 \frac{1!}{4!} + 7 \frac{1!1!}{5!} + 5 \frac{2!}{6!} + \frac{3!}{7!} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Очевидно, что структура коэффициентов  $C_{n1}$ ,  $C_{n3}$ ,  $C_n$  аналогична выражениям (56) для коэффициентов  $C_{31}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_3$  и в том случае, когда  $f_n(x)$  определяется по формуле (55). Кроме того,

$$v_{3*} = -\int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{6} \frac{72\varepsilon^2}{\Delta^2} (\mu^2 - \xi^2)^2 d\xi = -\frac{12 \cdot 3!\varepsilon^2}{\Delta^2} \left( \frac{\mu^4 x^4}{4!} - 2 \cdot 2! \frac{\mu^2 x^8}{6!} + \frac{4! x^8}{8!} \right).$$

В результате  $v_3 = C_{31}y_1 + C_{33}y_3 + C_3(1-y_1)/4 + v_{3*}$ .



Таким образом, приближенное значение мажоранты (50) принимаем в форме

$$v(0) = \sum_i^{\infty} \left[ \frac{\mu^2}{144\Delta} \left| \int_0^{\mu} (\mu^2 + 2\mu\xi - 8\xi^2)(\mu - \xi)f_{2i-1}(\xi) d\xi \right| + \frac{5\mu^4}{24} \left| v_{2i-1, **} \right| \right] r^{1-2i}.$$

Хотя из анализа выражений коэффициентов третьего (56) и последующего приближений вытекает, что коэффициенты  $C_{2m+1,1}$ ,  $C_{2m+1,3}$ ,  $C_{2m+1}$  при  $m \rightarrow \infty$  образуют абсолютно сходящиеся числовые ряды, произвести количественную оценку сумм этих рядов не удастся. Однако очевидно, что из их суммируемости следует выполнение неравенства  $\lim_{m \rightarrow \infty} |C_{2m+1}/C_{2m-1}| < r^2$ ,  $r \rightarrow \infty$ , поэтому в рамках принятых допущений обосновывается асимптотическая равномерная сходимости ряда (6).

Вопрос о том, является ли построенное по схеме (6), (7) решение краевой задачи (1)–(3) единственным, остается открытым.

В заключение отметим, что экспериментальное определение кинетических характеристик стационарного расходящегося потока жидкости в полости между двумя вращающимися с одинаковой угловой скоростью дисками производилось в [9–11]. Так, в [9, 10] для  $\lambda = 2,25$ ,  $q \approx 10^6$  излагаются результаты замеров перепада давления вдоль по радиусу, в [11] для  $\lambda = 4$ ,  $q \approx 10^5$  приводятся данные измерений радиальной и окружной составляющих скорости жидкости. При этом выявлено удовлетворительное количественное и качественное согласие расчетных результатов на рис. 2 с экспериментальными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rice W. An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors // Trans. ASME. Ser. A. 1963. N 3. P. 191–200.
2. Peube J.-L. Sur l'écoulement radial permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux plans paralleles // J. Mec. 1963. T. 11, N 4. P. 377–395.
3. Peube J.-L., Kreith F. L'écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques paralleles en rotation // J. Mec. 1966. T. 5. P. 261–286.
4. Kreith F. Reverse transition in radial source flow between two parallel planes // Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1189–1190.
5. Семенов Е. В. К построению асимптотического решения для ламинарного течения жидкости между тарелками сепаратора // Теорет. основы хим. технологии. 1975. № 5. С. 678–683.
6. Debuchy R., Dument A., Muhe H. Radial inflow between a rotating and stationary disc // Comptes Rendus. Acad. Sci. Ser. 2. 1993. N 4. P. 437–442.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.
9. Адамс Р., Райс В. Экспериментальное исследование течения между совместно вращающимися дисками // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. 1970. № 3. С. 28–33.
10. Патер Л., Краутер Е., Райс В. Определение режима течения между совместно вращающимися дисками // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. 1974. № 37. С. 122–128.
11. Kohler M. Die Stromung durch des Spaltelement einer Reibungspumpe // Stromungsmechanik und Stromungsmaschinen. 1971. N 4. S. 24–25.

Поступила в редакцию 17/VIII 1995 г.,  
в окончательном варианте — 5/I 1996 г.