

3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.— УМН, 1963, т. 18, № 2.
6. Whitham G. V. A new approach to problems of shock dynamics. Pt 1. Two dimensional problem.— J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 1.
7. Вахрамеев Ю. С. О кумуляции ударных волн в неоднородной среде.— ПММ, 1966, т. 30, № 4.
8. Имшенник В. С. Двумерные нестационарные модели плазмы и проблема перетяжки в Z-пинчах и плазменном фокусе.— В сб.: Численные методы в физике плазмы. М., Наука, 1977.
9. Имшенник В. С., Сыроватский С. И. Двумерные течения идеального проводящего газа в окрестности нулевой линии магнитного поля.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 4.
10. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963.
11. Имшенник В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 1.
12. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. К магнитогидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1967.
13. Имшенник В. С. Структура ударных волн в плотной высокотемпературной плазме.— Физика плазмы, 1975, т. 1, вып. 2.
14. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта.— ЖВММФ, 1963, т. 3, № 5.
15. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса Z-пинча.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 8. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1974.
16. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. О сходящейся цилиндрически-симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов.— ПММ, 1965, т. 29, № 6.
17. Charman S., Cowling T. G. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge Univ. Press, 1970.
18. Кочин И. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
19. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., ИЛ, 1956.
20. Забабахин Е. И. Неустойчивость неограниченной кумуляции.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 97.

УДК 533.6.011.72.

ОТРАЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭЛЛИПСОИДА

Л. П. Горбачев, В. В. Соколов

(Москва)

Рассматривается отражение от эллипсоида сильной плоской ударной волны (с равномерными параметрами за ней), движущейся вдоль одной из его осей. Вязкость и теплопроводность газа не учитываются. Решение ищется в окрестности критической точки методом малого параметра [1]. Нелинейные дифференциальные уравнения для безразмерных компонент скорости газа в рассматриваемой области решаются методом разделения переменных с дополнительным условием [2]. Найдены аналитические выражения для параметров течения, которые для случаев эллиптического цилиндра и эллипсоида вращения совпадают с соответствующими выражениями, полученными ранее [2].

Следуя приближениям [3], исходные уравнения непрерывности, количества движения и энергии [4], описывающие течение газ за отраженной от эллипсоида ударной волной, в окрестности критической точки

($\theta \ll 1$) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (1+x) \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial x} \right) + 2\rho_0(u_0 + v_0) + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} = 0, \\
 & \rho_0(1+x) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \rho_0 \left(v_0 u_0 + v_0^2 + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - v_1^2 \right) + \frac{2x^0}{r_3} = 0, \\
 & \rho_0(1+x) \left(\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \rho_0 \left(2v_0 v_1 + v_1 u_0 + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p^0}{\partial \varphi} = 0, \\
 & \rho_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \left(\frac{\partial h_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) = \\
 & \quad = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} \right),
 \end{aligned}$$

где $P/P_3 = p_0(x, t_1) + \theta^2 p^0(x, t_1, \varphi) + \dots$; $R/R_3 = \rho_0(x, t_1) + \theta^2 \rho^0(x, t_1, \varphi) + \dots$; $H/H_3 = h_0(x, t_1) + \theta^2 h^0(x, t_1, \varphi) + \dots$; $V_r/a_3 = u_0(x, t_1) + \theta^2 u^0(x, t_1, \varphi) + \dots$; $V_\theta/a_3 = \theta v_0(x, t_1, \varphi) + \dots$; $V_\varphi/a_3 = \theta v_1(x, t_1, \varphi) + \dots$; $r = c(1+x)$; $t = t_1 c/a_3$; индексом 3 помечены постоянные параметры газа за ударной волной, отраженной от плоскости, параллельной ее фронту; $a_3^2 = \gamma_3 P_3/R_3$; $H = \gamma(\gamma-1)^{-1} P/R$ — энтальпия; P — давление; R — плотность; V_r, V_θ, V_φ — составляющие скорости газа в сферической системе координат; t — время; γ — эффективный показатель адиабаты; a, b и c — полуоси эллипсоида (ударная волна движется вдоль полуоси c); θ — угол в сферической системе координат.

В окрестности критической точки движение фронта отраженной ударной волны можно записать в виде $F(r_1, \theta, \varphi, t) \equiv r_1 - c - \delta_1(t) - \theta^2 \delta_1^0(\varphi, t) - \dots = 0$. Тогда скорость отраженной ударной волны D запишется в виде [4]

$$(2) \quad D = - |\nabla F|^{-1} F'(t) = \delta_1'(t)$$

(штрих означает дифференцирование по аргументу, указанному в скобках или обозначенному подстрочным индексом).

При переходе через фронт отраженной ударной волны проекции вектора скорости $-u_2 \mathbf{n}_z \approx -u_2 \mathbf{n} + u_2 \theta \mathbf{n}_\theta$ газа перед отраженным фронтом на направления ортогональных друг другу векторов $\mathbf{n}_1 \approx 2\theta r_1^{-1} \delta_1^0 \mathbf{n}_r + \mathbf{n}_\theta$ и $\mathbf{n}_2 \approx \theta r_1^{-1} (\delta_1^0)' \mathbf{n}_r + \mathbf{n}_\varphi$, лежащих в касательной к этому фронту плоскости, не изменятся. Нормальная к отраженному фронту компонента $V_{n2} = D - (\mathbf{n}_b, -u_2 \mathbf{n}_z)$ скорости газа перед этим фронтом связана с нормальной компонентой V_n скорости газа за фронтом соотношением [4]

$$(3) \quad V_{n2} R_2 = V_n R,$$

где индексом 2 помечены параметры газа перед отраженным фронтом, а $\mathbf{n}_b = |\nabla F|^{-1} \nabla F$ — нормаль к отраженному фронту. Таким образом, на отраженном фронте скорость газа определяется выражением $\mathbf{V} = V_r \mathbf{n}_r + V_\theta \mathbf{n}_\theta + V_\varphi \mathbf{n}_\varphi = (D - V_n) \mathbf{n}_b + \theta u_2 (1 - 2\delta_1^0/r_1) \mathbf{n}_1 - \theta r_1^{-1} u_2 \times (\delta_1^0)' \mathbf{n}_2$, откуда следует

$$(4) \quad V_r = D - V_n, \quad V_\theta = -2(D - V_n) \theta \delta_1^0/r_1 + \theta u_2 (1 - 2\delta_1^0/r_1), \\ V_\varphi = -\theta r_1^{-1} (D - V_n + u_2) (\delta_1^0)'.$$

Тогда из (2), (3) и (4) получим

$$(5) \quad u_0 = x_1'(t_1) (1 - \rho_{23}/\rho_0) - u_{23} \rho_{23}/\rho_0, \quad v_0 = -2\delta_1 u_0/r_1 + u_{23} (1 - 2\delta_1^0/r_1), \\ v_1 = -(u_0 + u_{23}) r_1^{-1} (\delta_1^0)',$$

где $x_1 = \delta_1/c$; $\rho_{23} = R_2/R_3$; $u_{23} = u_2/a_3$.

В плоскости $\varphi = \text{const}$ угол α между нормалью к линии пересечения этой плоскости с поверхностью эллипсоида и осью z связан с углом θ соотношением $\alpha \approx c^2(a^{-2} \cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi) \theta$. В той же плоскости угол β между нормалью к линии пересечения этой плоскости с отраженным фронтом и осью z определяется соотношением [4] $\sin \beta = |\nabla F|^{-1} F'(s) \approx \theta [1 - 2\delta_1^0(\varphi, t, a, b, c)/r_1]$, где $s = r_1 \sin \theta$. В предположении, что в окрестности критической точки $\alpha \approx \beta$, получим

$$(6) \quad (1 - 2\delta_1^0/r_1) = c^2 (a^{-2} \cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi).$$

Граничное условие на теле и начальные условия при $t = 0$, когда падающая ударная волна достигает критической точки $\theta = 0$, $x = 0$, получаются так же, как в [3]:

$$(7) \quad u_0(x = 0) = 0;$$

$$(8) \quad x_1 = 0, \quad x_1'(t_1) = W/a_3 = \varepsilon, \quad p_0 = \rho_0 = h_0 = 1, \quad u_0 = 0, \quad D = W,$$

где W — скорость ударной волны, отраженной от плоскости, параллельной ее фронту.

Будем считать в дальнейшем, что для сильной ударной волны $\gamma \rightarrow 1$ [3]. Тогда аналогично [1, 3] решение можно искать в виде

$$(9) \quad p_0 = 1 + \varepsilon^2 p + \dots, \quad \rho_0 = 1 + \varepsilon^2 \rho + \dots, \quad h_0 = 1 + \varepsilon^2 h + \dots, \\ u_0 = \varepsilon u + \dots, \quad v_0 = \varepsilon v + \dots, \\ v_1 = q\varepsilon^{-1} + \dots, \quad x = \varepsilon^2 \xi, \quad t_1 = \varepsilon \tau.$$

Теперь уравнения (1) примут вид

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + 2v + \frac{\partial q}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v^2 + q \frac{\partial v}{\partial \varphi} - q^2 = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial \tau} + u \frac{\partial q}{\partial \xi} + q \left(2v + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) = 0;$$

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma_3} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0;$$

$$(12) \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} + u \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0.$$

Пользуясь известными соотношениями параметров газа на сильной ударной волне, запишем краевые условия с учетом (9), где $\varepsilon^2 = 2(\gamma - 1)(3\gamma - 1)^{-1}$ [3]. Так, граничные условия (5) на отраженном фронте с учетом (6), условие на теле (7) и начальные условия (8) запишутся в виде

$$(13) \quad p/2 = u = h = \xi_1'(\tau) - 1, \quad v = (a^{-2} \cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi) E c^2, \\ q = \sin 2\varphi (b^{-2} - a^{-2}) E c^2 / 2, \quad E = \varepsilon u_{23};$$

$$(14) \quad u(\xi = 0) = 0;$$

$$(15) \quad \xi_1(\tau = 0) = 0, \quad \xi_1'(\tau = 0) = 1.$$

Из (10), (13) следует, что при $q = \sin 2\varphi \cdot q_1(\xi, \tau)/2$

$$(16) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + u \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{q_1^2}{2} = 0, \quad \frac{\partial q_1}{\partial \tau} + u \frac{\partial q_1}{\partial \xi} - q_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0;$$

$$(17) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi = \xi_1) = -E c^2 (b^{-2} + a^{-2}), \quad q_1(\xi = \xi_1) = E c^2 (b^{-2} - a^{-2}).$$

Будем искать решение в виде $u = \Phi(\xi)T(\tau)$, $q_1 = \Phi_1(\xi)T_1(\tau)$. Подставляя эти выражения в (16), замечаем, что при $T = T_1$ переменные разделяются. Тогда имеем

$$(18) \quad T'/T^2 = \lambda, \quad \Phi\Phi_1'/\Phi_1 - \Phi' + \lambda = 0, \quad -\lambda\Phi' - \Phi\Phi'' + (\Phi')^2/2 + \Phi_1^2/2 = 0.$$

Из (18) получим уравнение Абеля второго рода [5]

$$(19) \quad 3\lambda k + k'k\Phi - k^2 - 2\lambda^2 + c_1\Phi = 0.$$

Преобразуя (19) в уравнение Абеля первого рода и зная его частное решение, получим решение (19) в виде

$$(20) \quad \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\lambda^2 - c_1\Phi} + \frac{c_2}{2\lambda^2 - c_1\Phi} \left(\frac{c_1\Phi}{2c_2^2 + 2\lambda^2 c_1 c_2 - c_1^2 c_3 \Phi} \right)^{1/2},$$

где $k(\Phi) = \Phi'$; $c_{1,2,3}$ — константы.

Из (18) следует!

$$(21) \quad T = (c_4 - \lambda\tau)^{-1},$$

где c_4 — константа.

В силу нелинейности уравнений (16) их решения можно представить в виде сумм $\sum_{\lambda} u_{\lambda}$ и $\sum_{\lambda} q_{1\lambda}$ при условии

$$(22) \quad \sum_{\lambda, n \neq m} (\pm \lambda'_m) c_{4m}^{-1} c_{4n}^{-1} M_n = 0, \\ \sum_{\lambda, n \neq m} c_{4m}^{-1} c_{4n}^{-1} [M_n M_m + (\pm M_{0n})(\pm M_{0m})] = 0,$$

где M принимает значение либо 2λ , либо λ' , а M_0 — либо нуль, либо λ' ($\lambda' = (-c_2^2 c_1^{-1} c_3^{-1})^{1/2}$).

Условия (22) получены из (16) при $\xi = 0$ и $\tau = 0$. Учитывая число условий, накладываемых на собственные значения λ , ограничимся случаем, когда набор λ состоит не более чем из трех величин: $\lambda_1, -\lambda'_2, \lambda'_3$ (остальные комбинации не удовлетворяют условиям задачи). Знак у λ соответствует знаку в выражении

$$(23) \quad \Phi_1 = \pm [(k - 2\lambda)^2 - 2c_1\Phi]^{1/2},$$

полученном из (18), (19). Из (17), (22) при $\xi_1(\tau = 0) = 0$ получим $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -Ec^2/b^2$, $\omega_3 = -Ec^2/a^2$, $\omega = \lambda/c_4$.

Тогда из (14), (20) следует

$$(24) \quad k_1 = (2c_{11}\Phi_1 + c_5^2\Phi_1^2)^{1/2}, \quad \Phi_1 = c_{11}(\exp c_5\xi - 1)^2 \exp(-c_5\xi)/(2c_5^2);$$

$$(25) \quad k_2 = \lambda'_2 - c_{12}\Phi_2/(2\lambda'_2), \quad \Phi_2 = 2\omega_2^2 [1 - \exp(-v_2\omega_2^{-1}\xi/2)] c_{42}v_2^{-1},$$

где c_5 — константа; $v \equiv c_1/c_4$; $k_1 = k(\lambda_1)$; $k_2 = k(\lambda'_2)$.

Выражения для k_3 и Φ_3 получаются из (25) заменой индекса 2 на 3. Из (18), (23), (24) и (25) следует

$$(26) \quad \Phi_{11} = c_3\Phi_1, \quad \Phi_{12} = -\lambda'_2 \exp(-v_2\omega_2^{-1}\xi/2), \quad \Phi_{13} = \lambda'_3 \exp(-v_3\omega_3^{-1}\xi/2),$$

где $\Phi_{11} = \Phi_1(\lambda_1)$; $\Phi_{12} = \Phi_1(\lambda'_2) \dots$

Таким образом, из (24), (24), (25) и (26) получаем

$$(27) \quad u = \frac{v_1}{2c_5^2} (\exp c_5 \xi - 1)^2 \exp(-c_5 \xi) + \frac{2\omega_2^2 [1 - \exp(-v_2 \omega_2^{-1} \xi/2)]}{v_2 (1 - \omega_2 \tau)} + \\ + \frac{2\omega_3^2 [1 - \exp(-v_3 \omega_3^{-1} \xi/2)]}{v_3 (1 - \omega_3 \tau)},$$

$$(28) \quad q_1 = \frac{v_1}{2c_5} (\exp c_5 \xi - 1)^2 \exp(-c_5 \xi) - \frac{\omega_2 \exp(-v_2 \omega_2^{-1} \xi/2)}{1 - \omega_2 \tau} + \\ + \frac{\omega_3 \exp(-v_3 \omega_3^{-1} \xi/2)}{1 - \omega_3 \tau}.$$

Используя (16), (17), находим

$$v_1 = -2E^2 c^4 a^{-2} b^{-2}, \quad v_2 = 2\omega_2 c_5, \quad v_3 = -2\omega_3 c_5, \quad c_5 = -Ec^2(b^{-2} - a^{-2}).$$

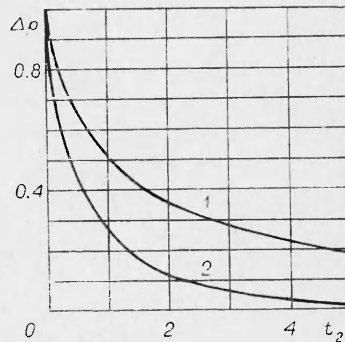
Величина безразмерного давления p находится из (11) дифференцированием (27) и последующим интегрированием. Константа, получающаяся при этом, находится с помощью соответствующего граничного условия (13). Безразмерная энтальпия находится из (12) так же, как в [3].

Полученные выражения для параметров течения при $a = b$ совпадают с соответствующими выражениями в [2] для эллипсоида вращения, а при $a \rightarrow \infty$ или $b \rightarrow \infty$ — совпадают с соответствующими выражениями в [2] для эллиптического цилиндра.

Метод, примененный для решения рассмотренной здесь задачи, может быть использован и для решения аналогичных задач в магнитной гидродинамике [6].

На фигуре показана зависимость величины $\Delta p = (P(t) - P(\infty)) / (P(0) - P(\infty))^{-1}$ от безразмерного времени $t_2 = U_1 t / c$ (U_1 — скорость падающей ударной волны) в критической точке ($\xi = 0, \theta = 0$) для кругового цилиндра (кривая 1) и для сферы (кривая 2). Зависимость Δp от γ в рассматриваемом диапазоне слабая.

Как следует из (27) при $a = b$ или $a \rightarrow \infty$ $u(\xi = 0, \tau) = u(c^2 b^{-2} E \tau) = f(c^2 b^{-2} t_2)$. Тогда из (11) вытекает, что $p = p(c^2 b^{-2} t_2)$. Таким образом, для эллиптического цилиндра и эллипсоида вращения величина $\Delta p(c^2 b^{-2} t_2)$ получается из кривых 1, 2 соответствующим их сжатием или растяжением по оси t_2 в c^2/b^2 раз.



{Поступила 17 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. Соколов В. Б. Отражение сильной ударной волны от эллипсоида вращения и эллиптического цилиндра. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4.
3. Киреев В. Т. Об отражении сильной ударной волны от сферы и цилиндра. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 3.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
6. Горбачев Л. П., Соколов В. Б. Отражение сильной магнитогазодинамической ударной волны от эллиптического цилиндра. — Магнит. гидродинамика, 1977, № 4.