

## О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. П. Мясников

(Москва)

Задача об обтекании тела вязко-пластической жидкостью привлекает в последнее время большое внимание. Однако до сих пор остаются неясными даже многие общие положения, касающиеся постановки подобных задач.

Модель вязко-пластической жидкости, предложенная первоначально Шведовым [1] и Бингамом [2], была обобщена позднее Генки [3] и Ильюшиным [4].

В отличие от модели вязкой жидкости, очень хорошо описывающей реальные свойства многих жидкостей, модель вязко-пластической среды дает лишь достаточно грубое приближение к реальным механическим свойствам дисперсных систем, таких как различного рода краски, пасты, коллоидные и глинистые растворы и т. п.

Известно, например, что в ряде задач о течениях вязко-пластической жидкости, решения содержат границы, отделяющие область течения от области жесткого состояния [5-11]. Такие границы моделируют тонкие слои в реальной среде, внутри которых происходит резкое изменение механического состояния частиц среды. Модель вязко-пластической жидкости строится в предположении, что такие слои являются тонкими, а время пребывания частицы в этом слое много больше времени релаксации напряжений. При больших скоростях движения среды время пребывания частицы в таком слое может стать сравнимым со временем релаксации напряжений и предположение о тонкости такого переходного слоя становится сомнительным.

Тем не менее, при таких скоростях движения, когда релаксационными эффектами можно пренебречь, модель вязко-пластической среды, несмотря на определенную условность принимаемой в ней схемы, является вполне разумной, что подтверждается рядом экспериментальных исследований [12] и широким использованием этой модели для решения важных практических задач [13].

Ввиду большой сложности уравнений движения вязко-пластической жидкости, даже по сравнению с уравнениями Навье — Стокса, а также в силу известной условности модели вязко-пластической среды, представляется весьма важной разработка эффективных методов приближенного решения уравнений движения таких жидкостей.

В предлагаемой работе дается общая постановка задачи об обтекании тела безграничным установившимся потоком вязко-пластической жидкости. Для случая медленных движений тела в такой среде предлагается приближенный метод решения задачи обтекания тела вязко-пластической жидкостью, позволяющий получить достаточно полную картину обтекания и объяснить экспериментальные результаты И. Г. Булиной и В. Г. Савина [14].

**§ 1. Уравнения движения.** Будем рассматривать движение в неподвижной декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Напряженное состояние в каждой точке движущейся сплошной среды полностью определяется тензором напряжений  $p_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), а деформация материала и скорость изменения деформированного состояния характеризуются тензорами деформации  $\epsilon_{ij}$  и скоростей деформации  $e_{ij}$ . Механические свойства рассматриваемой сплошной среды полностью определяются заданием уравнений состояния, связывающих тензоры  $p_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$  и  $e_{ij}$ .

Уравнения состояния вязко-пластической жидкости могут быть получены из следующих предположений о ее механических свойствах.

1°. Если максимальное касательное напряжение в движущейся вязко-пластической жидкости не превосходит некоторой постоянной величины  $\tau_0$ , называемой пределом текучести, то жидкость ведет себя как несжимаемое упругое тело с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.5$  при модуле упругости и модуле сдвига  $E, G \rightarrow \infty$ .

2°. Если максимальное касательное напряжение в движущейся вязко-пластической жидкости превосходит величину  $\tau_0$ , то имеет место

вязкое течение, причем максимальное касательное напряжение линейно зависит от максимальной скорости деформации сдвига.

3°. Девиатор напряжений и тензор скоростей деформации подобны.

4°. В области вязкого течения упругими составляющими деформации частицы можно пренебречь.

Обозначим через  $\sigma_{ij}$  девиатор тензора напряжений  $p_{ij}$

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ii} = 0 \quad (1.1)$$

По определению максимальное касательное напряжение и скорость деформации сдвига есть касательное напряжение и скорость сдвига на октаэдрических площадках с направляющими косинусами нормали  $\pm 1/\sqrt{3}$ . Они равны соответственно

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}}, \quad V = \sqrt{\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}} \quad (1.2)$$

Согласно п.п. 2° и 3° будем иметь

$$\tau = \tau_0 + \mu V, \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{ij} \quad (1.3)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости среды.

Из соотношений (1.3) и (1.2) получим

$$\lambda = \mu + \frac{\tau_0}{V} = \frac{\mu\tau}{\tau - \tau_0}, \quad e_{ij} = 0 \quad (1.4)$$

Последнее соотношение в (1.4) показывает, что предположение п. 3° содержит в себе и условие несжимаемости среды.

Таким образом, из пп. 2°—4° получим уравнения состояния вязко-пластической жидкости в области вязкого течения

$$\sigma_{ij} = \left( \mu + \frac{\tau_0}{V} \right) e_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{при } \tau > \tau_0 \quad (1.5)$$

При  $\tau \leq \tau_0$  уравнения состояния вязко-пластической жидкости будут совпадать с законом Гука, в котором коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$  (см., например, [15]). По повторяющимся индексам в (1.1)—(1.5), как и всюду в дальнейшем, предполагается суммирование.

Равенства  $\tau = \tau_0$  или  $V = 0$  являются естественными условиями, которые должны выполняться на границе между областью вязкого течения и областью упругого состояния.

Модель вязко-пластической среды является частным случаем модели Прандтля — Рейса с упрочнением [16] и может быть получена из последней предельным переходом при  $E, G \rightarrow \infty$ . Подобный предельный переход приводит, как известно, к представлению о жестко-пластическом материале, который при  $\tau \leq \tau_0$  не деформируем и движется, как твердое тело. При этом, в области жесткого состояния распределение напряжений в среде, являясь, вообще говоря, неопределенным, должно пониматься как предельное при  $E, G \rightarrow \infty$  и полученное из решения соответствующей упругой задачи.

Из (1.5) и общих уравнений движения произвольной сплошной среды легко получить уравнения течения вязко-пластической жидкости. Действительно, обозначая через  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) составляющие скорости частиц среды на оси координат, будем иметь

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.2) и (1.5), получим

$$\sigma_{ij} = \left( \mu + \frac{\tau_0}{h} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad h = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \quad (1.7)$$

Из (1.7), (1.4), (1.4) и общих уравнений движения сплошной среды получим теперь уравнения течения вязко-пластической жидкости в следующем виде:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\tau_0}{h} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) содержат две постоянные величины  $\mu$  и  $\tau_0$ , определяющие конкретную вязко-пластическую жидкость.

Законы гидродинамического подобия для течений вязко-пластических жидкостей изучены в работе [17].

**§ 2. Постановка задачи обтекания.** Рассмотрим задачу об обтекании тела вязко-пластической жидкостью. Пусть система координат  $x_i (i = 1, 2, 3)$  жестко связана с телом. Будем предполагать, что тело движется с постоянной скоростью, так что в выбранной системе координат движение будет установившимся.

Жесткость вязко-пластической среды, обусловленная тем, что для появления вязкого течения касательные напряжения должны превзойти некоторый предел, приводит к конечности области течения при обтекании тела конечных размеров.

В самом деле согласно (1.5) при  $e_{ij} \rightarrow 0$  будем иметь

$$\sigma_{ij} = \tau_0 \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} = \lim_{e_{ij} \rightarrow 0} (e_{ij}/V), \quad \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} = 2 \quad (2.1)$$

так что по крайней мере хотя бы одна из величин  $\sigma_{ij}$  на границе области вязкого течения отлична от нуля. Из физических соображений ясно, что в любой среде приложение нагрузок конечной интенсивности в конечной области пространства не должно нарушать однородности состояния среды на бесконечности и на достаточно больших расстояниях от тела среда должна находиться в таком состоянии, как если бы приложенные нагрузки отсутствовали. Поэтому естественно предположить, что на бесконечности касательные напряжения равны нулю и напряженное состояние может быть только гидростатическим сжатием или растяжением. В нашем случае это означает, что тензор  $p_{ij}$  на бесконечности должен быть шаровым, а все  $\sigma_{ij}$  должны обратиться в нуль. Но тогда в силу (2.1) при обтекании тела конечных размеров вязко-пластической жидкостью область вязкого течения будет конечной.

Картина обтекания тела будет иметь вид, указанный на фиг. 1. В области  $A$ , ограниченной поверхностью тела  $\Sigma$  и поверхностью текучести  $S$ , напряженное состояние на которой удовлетворяет соотношениям (2.1), имеет место вязкое течение. Вне поверхности  $S$  вязко-пластическая жидкость будет находиться в упругом состоянии. Область  $B$ , ограниченная частью  $S$  и прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , заполнена частицами среды, прошедшими через область вязкого течения и претерпевшими в результате этого необратимую пластическую деформацию. В области  $C$  напряжения в вязко-пластической жидкости не превзошли предела текучести, и частицы, находящиеся в этой части среды, испытывают только обратимые упругие деформации.

Математически задачу об обтекании тела вязко-пластической жидкостью можно теперь сформулировать следующим образом; найти функции  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $p(x_1, x_2, x_3)$  и поверхность  $S$  такие, чтобы в области  $A$  функции  $u_i, p$  удовлетворяли бы системе уравнений (1.8), а на границах области условиям

$$u_i|_S = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i), \quad h|_S = 0, \quad p|_S = p_0, \quad u_i|_\Sigma = 0 \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{U}$  — скорость движения тела,  $\mathbf{e}_i$  — единичные орты осей координат.

Последнее условие (2.2) означает, что на поверхности тела выполнены условия прилипания.

Поверхность  $S$ , разделяющая области вязкого течения и упругого состояния, заранее неизвестна и должна быть определена в процессе решения задачи. При переходе из одной области в другую, на  $S$  должны быть выполнены условия непрерывности поля напряжений и поля скоростей. Остановимся теперь на определении поля напряжений в областях  $B$  и  $C$ . Как уже указывалось в § 1, распределение напряжений в этих областях надо понимать как решение упругой задачи при  $E, G \rightarrow \infty$ . Более подробно этот вопрос обсуждался в работах [16, 18]. Граничные условия для уравнений теории упругости в областях  $B$  и  $C$  в силу предположения о непрерывности полей напряжений на  $S$  будут иметь вид

$$p_{ii}^e|_s = -3p_0, \quad \sigma_{ij}^e|_s = \tau_0 \gamma_{ij} \quad (2.3)$$

где индекс  $e$  означает, что эти напряжения относятся к областям  $B$  и  $C$ . На бесконечности должны иметь место обычные условия

$$p_{ii}^e|_\infty = -3p_\infty, \quad \sigma_{ij}^e|_\infty = 0 \quad (2.4)$$

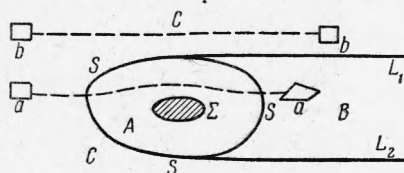
Корректность предельного перехода при  $E, G \rightarrow \infty$  может вызывать сомнения в том случае, когда в решении для конечных  $E, G$  выражения для смещений будут иметь особенности, например, неограниченно возрастать при удалении в бесконечность. Последнее возможно, в частности, при рассмотрении плоской деформации, так как при  $\nu = 0.5$  смещения удовлетворяют уравнению Лапласа с фундаментальным решением  $\ln r$ . Однако возможность появления таких особенностей в настоящей задаче не имеет решающего значения, так как в задаче обтекания интереснее получить хорошее приближение в ограниченной области, окружающей тело. Ошибка в определении смещений вне этой ограниченной области не является существенной, и в любой конечной области такие особенности всегда устранимы.

Указанный процесс определения поля напряжений в той части среды, где предел текучести не превзойден, и пренебрежение упругими деформациями в области вязкого течения для дисперсных систем, не должны, видимо, приводить к большим ошибкам в определении общей картины течения, так как для таких сред модуль упругости  $E$  обычно на несколько порядков больше предела текучести  $\tau_0$  и упругие деформации имеют порядок  $\tau_0 / E \ll 1$ .

Подчеркнем еще раз принципиальное различие областей  $B$  и  $C$ . На фиг. 1 указаны схематически движение элементов  $a$  и  $b$  и положения, занимаемые ими в одинаковые моменты времени. Элементы имеют первоначально одинаковую форму, причем элемент  $a$  проходит при движении через область вязкого течения и попадает в область  $B$ , а элемент  $b$  во все время движения находится в области  $C$ . В результате того, что элемент  $a$  прошел через область течения, он приобрел остаточную пластическую деформацию и изменил свою форму по сравнению с первоначальной, в то время как элемент  $b$  остался неизменным.

Таким образом, несмотря на то что в областях  $B$  и  $C$  элементы находятся одинаково в жестком состоянии, в области  $B$  деформация частиц среды отлична от нуля, хотя при движении в области  $B$  она больше не изменяется.

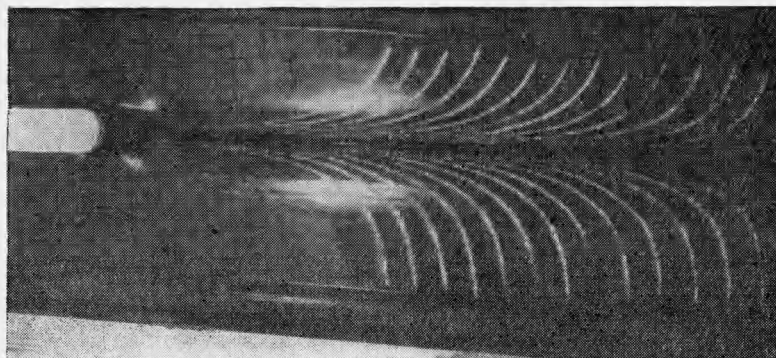
Позади обтекаемого тела имеется след, находящийся в жестком состоянии и простирающийся до бесконечности, внутри которого все частицы, из которых он состоит, имеют остаточную пластическую деформацию,



Фиг. 1

накопленную при прохождении через область вязкого течения, а вне этого следа и области вязкого течения деформация частиц среды равна нулю.

Указанная картина течения и наличие следа хорошо подтверждаются экспериментально. На фиг. 2 хорошо видна область остаточных деформаций позади обтекаемого тела, которая получалась в опытах И. Г. Булиной, В. Г. Савина по той же методике, что и в работе [14].



Фиг. 2

**§ 3. Медленные движения тела в вязко-пластической среде.** Ограничимся в дальнейшем рассмотрением плоских течений вязко-пластической жидкости и будем предполагать, что скорость этих течений мала и в уравнениях движения можно пренебречь инерционными членами.

Уравнения состояния вязко-пластической среды (1.7), как легко видеть, содержат в себе, в качестве предельных случаев, уравнения состояния вязкой жидкости ( $\tau_0 = 0$ ) и идеально пластического тела ( $\mu = 0$ ). Естественно, что в зависимости от соотношения между величинами параметров  $\tau_0$  и  $\mu$  свойства вязко-пластической жидкости будут приближаться к свойствам либо вязкой жидкости, либо идеально пластического материала.

Как следует из уравнений состояния, вязкие касательные напряжения велики там, где имеются большие градиенты скоростей течения. В этом случае основную роль в уравнениях состояния играют члены с  $\mu$  и течение вязко-пластической жидкости по своим свойствам приближается к течению обычной вязкой жидкости.

Наоборот, в областях, где пространственные градиенты скоростей малы, основную роль в уравнениях состояния играют члены с  $\tau_0$  и течение вязко-пластической жидкости по своим свойствам приближается к течению идеально пластических тел.

При обтекании тела вязко-пластической жидкостью в силу условий прилипания частиц к его поверхности, наибольшие градиенты скоростей будут иметь место в его непосредственной окрестности. По мере удаления от поверхности тела величины градиентов скоростей будут уменьшаться и обратятся в нуль на внешней границе течения.

Учитывая сказанное, естественно попытаться построить аналог теории пограничного слоя для вязко-пластической жидкости, в которой идеальная жидкость во внешнем потоке заменяется идеально пластической средой, а в тонком пограничном слое течение вязко-пластической жидкости имеет характер течения в обычном пограничном слое.

Определим условия, при которых большие градиенты скоростей имеют место в тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого тела. Пусть  $x_1, y_1$  — система координат, указанная на фиг. 3. Обозначим через  $\delta$  толщину пограничного слоя, а через  $l$  — характерную длину вдоль слоя

и пусть  $U$  и  $V$  соответственно продольная и поперечная составляющие скорости частиц среды на внешней границе пограничного слоя. Принимая для  $x_1$  и  $y_1$  масштабы  $l$  и  $\delta$ , а для составляющих скорости частиц среды в пограничном слое  $u_1$  и  $v_1$  масштабы  $U$  и  $V$ , из уравнения неразрывности будем иметь

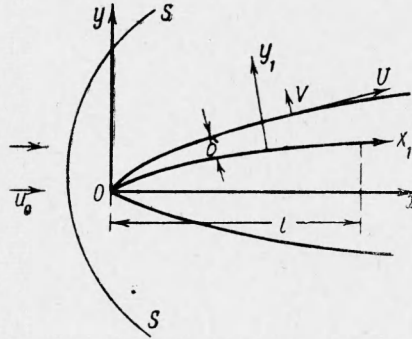
$$Vl \sim U\delta \quad (3.1)$$

Проводя теперь анализ порядков членов в уравнениях движения совершенно аналогично тому, как это делается в классической теории пограничного слоя, получим, что толщина слоя

$$\delta \sim \mu U / \tau_0 \quad (3.2)$$

и что пограничный слой будет тонким, если

$$\mu U / \tau_0 L \sim \epsilon \ll 1 \quad (3.3)$$



Фиг. 3

Пренебрегая тогда в уравнениях состояния членами порядка, найдем

$$p_{xx} = -p + O(\epsilon), \quad p_{yy} = -p + O(\epsilon), \quad p_{xy} = \pm \tau_0 + \mu \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + O(\epsilon) \quad (3.4)$$

в уравнения движения в пограничном слое с точностью до членов порядка  $\epsilon$  можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_1} = 0 \quad (3.5)$$

Таким образом, давление поперек пограничного слоя не меняется и должно определяться течением во внешнем потоке.

На поверхности тела при  $y_1 = 0$  имеют место условия прилипания и  $u_1 = v_1 = 0$ , а на внешней границе пограничного слоя  $\partial u_1 / \partial y_1 \rightarrow 0$ ,  $u_1 \rightarrow U(x_1)$ .

Учитывая (3.3), легко написать уравнения движения во внешнем потоке. В самом деле, пространственные градиенты скоростей малы и имеют одинаковый порядок. Пусть  $u_0$  — скорость набегающего потока. Будем теперь рассматривать движение в системе координат  $x, y$  (фиг. 3). Очевидно, что  $u_0 \sim U$ ,  $x \sim l$ ,  $y \sim l$  и с точностью до членов порядка  $\epsilon$  будем иметь

$$p_{xx} = -p + \frac{2\tau_0}{h} \frac{\partial u}{\partial x} + O(\epsilon), \quad p_{yy} = -p + \frac{2\tau_0}{h} \frac{\partial v}{\partial y} + O(\epsilon)$$

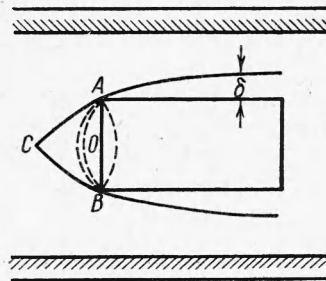
$$p_{xy} = \frac{\tau_0}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + O(\epsilon) \quad (3.6)$$

где

$$h = \sqrt{2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (3.7)$$

Но соотношения (3.6) есть уравнения состояния идеально пластической среды, уравнения движения которой можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 2\tau \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\sigma_x - \sigma_y) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4\tau_0^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$



Фиг. 4

Граничные условия для системы (3.8) могут быть получены из условия непрерывного сопряжения поля скоростей и напряжений на внешней границе пограничного слоя. Заметим, что так как мы пренебрегаем в уравнениях движения членами порядка  $\varepsilon$ , то для внешнего потока условия на внешней границе пограничного слоя можно снести на поверхность обтекаемого тела. Поверхность обтекаемого тела, как видно из последнего равенства в (3.6), является для внешнего потока линией скольжения [18]. Воспользовавшись формулами преобразования компонент тензора напряжений из одной системы координат к другой, получим

$$\tau|_{y=\varphi(x)} = \pm \cos 2\theta \quad (3.9)$$

где  $\theta$  — угол между касательной к поверхности тела и осью, а  $y = \varphi(x)$  — уравнение поверхности тела.

Условие непрерывного сопряжения поля скоростей во внешнем потоке и в пограничном слое приводит к условию непроницаемости поверхности тела, так что

$$u(x, \varphi(x)) \operatorname{tg} \theta = v(x, \varphi(x)) \quad (3.10)$$

Условия на поверхности  $S$  (2.2) должны быть изменены в соответствии с условиями, которые должны выполняться на границе между твердым состоянием и пластическим течением в теории идеально пластических тел. Как показано в работе [19], поверхность  $S$  будет в общем случае течений идеально пластической среды (фиг. 2) линией скольжения.

Порядок расчета течения при обтекании тела должен проводиться по известной схеме классической теории пограничного слоя. Первоначально определяется течение во внешнем потоке, а затем находится течение в пограничном слое с определенными из решения для внешнего потока данными на внешней границе этого слоя.

Предлагаемая постановка задачи позволяет сразу сделать целый ряд качественных выводов о характере обтекания тела вязко-пластической жидкостью.

Рассмотрим для примера движение тупого тела в канале, заполненном вязко-пластичной жидкостью. Граничные условия на его поверхности для внешнего потока соответствуют движению абсолютно шероховатого тела в идеально пластическом материале. Задача об определении внешнего потока соответствует задаче о продавливании заготовки плоским штампом [18]. Впереди тела образуется застойная зона  $ABC$  (фиг. 4). Существование такой застойной зоны экспериментально обнаружено в работе [14]. Возможное поле линий скольжения при отсутствии трения между средой и стенками канала приведено в работе [18].

Из существования застойной зоны впереди обтекаемого тела следует еще один интересный качественный результат. А именно, сопротивление, испытываемое тупым телом при его движении в вязко-пластической жидкости, не зависит от конфигурации его лобовой части. Все тела, конфигурация лобовых частей которых показана пунктиром на фиг. 4, имеют одинаковое сопротивление. Заметим также, что пограничный слой на поверхности обтекаемого тела начинается не от критической точки  $O$  (фиг. 4), а от точек  $A$  и  $B$ . Из окрестности критической точки пограничный слой выдавливается материалом застойной зоны, находящимся в твердом состоянии.

Отсутствие пограничного слоя на границе застойной зоны и внешнего потока объясняется различием механизмов трения внутри среды и на гра-

нице среда — тело. Поэтому, если достроить тело по контуру застойной зоны, то пограничный слой будет начинаться с передней кромки (точка  $C$ ) и сопротивление достроенного тела будет отличаться от сопротивления исходного тела. Действительно, на границе застойная зона — течение имеет место касательный разрыв скоростей и касательное напряжение равно  $\tau_0$ , а после того как тело будет достроено по контуру застойной зоны в силу иного механизма трения на границе тело — течение в соответствии с (3.4)  $\tau \gg \tau_0$ .

Автор глубоко благодарен Г. И. Баренблатту и Г. Г. Черному за руководство при выполнении предлагаемой работы и И. Г. Булиной за любезно предоставленные экспериментальные материалы.

НИИ механики МГУ

Поступила 15 V 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shwedov F. N. La rigidité de liquides. Rapport Congr. international phys., Paris, 1, 478—486, 1900.
2. Bingham F. C. Fluidity and Plasticity. New York, 1922.
3. Генки Г. Пространственная задача упругого и пластического равновесия. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 2.
4. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластичного тела. Уч. зап. МГУ, Механика, 1940, вып. 39.
5. Buxingham E. On plastic flow through capillary tubes. Proc. Amer. Soc. Test. Math., 1921, 21, 1154.
6. Воларович М. П., Толстой Д. М. Определение постоянных пластического потока минеральных суспензий. ЖФХ, 1933, т. IV, вып. 6.
7. Воларович М. П., Гуткин А. М. Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом пространстве между коаксиальными трубками. ЖТФ, 1946, т. XVI, вып. 3.
8. Мирзаджанзаде А. Х., Гурбанов С. Г. Об одном автомодельном решении задачи о вращении цилиндра в вязко-пластичной жидкости. ДАН СССР, 1957, т. 13, № 4.
9. Астрахан И. М. Автомодельное решение задачи о продольном движении цилиндра в вязко-пластичной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
10. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
11. Мясников В. П. Течение вязко-пластической среды при сложном сдвиге. ПМТФ, 1961, № 5.
12. Воларович М. П. Исследование реологических свойств дисперсных систем (обзор). Коллоидный журнал, 1954, т. XVI, № 2.
13. Мирзаджанзаде А. Х. Некоторые вопросы движения вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Изд-во Азнефть, 1959.
14. Булина И. Г., Савин В. Г. Образование передней застойной зоны при обтекании затупленных тел вязко-пластическими жидкостями. ДАН СССР, 1962, т. 145, № 1.
15. Ляв А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
16. Качанов А. М. Основы теории пластичности. М., ГТТИ, 1956, стр. 63.
17. Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Различные формы уравнений движения вязко-пластических жидкостей и закон гидродинамического подобия. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 3.
18. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., ГТТИ, 1956, стр. 153, 218.
19. Ивлев Д. Д. О границе пластического состояния материала. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.